2.14 Coordenadas relativas a una base ortogonal

Si en el TEOREMA de la Sección 2.13 consideramos $\vec{y} \in W$, entonces $\text{proy}_W\ \vec{y} = \vec{y}$. Se tienen por tanto los siguientes resultados:

COROLARIO 1 . Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_d\}$ una base ortogonal del subespacio W del espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$. Entonces, las coordenadas de $\vec{y} \in W$ relativas a esa base son los c_i tales que

$$c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \qquad (i = 1, \ldots, d) \qquad [\mathbf{7a}]$$

El teorema se verifica para todo subespacio de $\mathbb{R}^n$, incluido el propio $\mathbb{R}^n$. Por tanto dada la base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$, las coordenadas de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ relativas a esa base son los c_i tales que

$$c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

COROLARIO 2. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d\}$ una base ortonormal del subespacio W del espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$. Entonces, las coordenadas de $\vec{y} \in W$ relativas a esa base son los $c_i = \vec{y} \cdot \vec{u}_i \quad (i = 1, \ldots, d) \quad [\mathbf{7b}]$

Si se considera $W = \mathbb{R}^n$, dada la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, las coordenadas de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ relativas a esa base son los c_i tales que

$$c_i = \vec{y} \cdot \vec{u} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Las coordenadas de un vector de W respecto de una base B ortogonal de W se pueden calcular, aparte de utilizando el método general, aplicando las expresiones sencillas [**7a**] o [**7b**]. W puede ser un subespacio estricto o el espacio total $\mathbb{R}^n$.

Podemos expresar este resultado afirmando que la coordenada de un vector para cada vector base, en un subespacio, coincide con la coordenada de la proyección ortogonal del vector sobre la dirección dada por esa base, cuando la base que se toma es ortogonal.

Ejemplo 2.28. *El conjunto de vectores* $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ *del Ejemplo 6 es base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$. *Calcula las coordenadas del vector* $\vec{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ *respecto de la base* B.

Sol.:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \underbrace{\frac{\vec{y}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}}_{\textit{coordenada } c_1} \vec{v}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2} \vec{v}_2 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{v}_3}{\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3} \vec{v}_3$$

$$\vec{y}\cdot\vec{v}_1 = [6 \;\; 1 \;\; -8] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 18 + 1 - 8 = 11$$

$$\vec{y}\cdot\vec{v}_2 = [6 \;\; 1 \;\; -8] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 + 2 - 8 = -14 + 2 = -12$$

$$\vec{y}\cdot\vec{v}_3 = [6 \;\; 1 \;\; -8] \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = -3 - 2 - 28 = -33$$

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 = [3 \;\; 1 \;\; 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 + 1 + 1 = 11$$

$$\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 = [-1 \;\; 2 \;\; 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 1 = 6$$

$$\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3 = [-1/2 \;\; -2 \;\; 7/2] \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = 1/4 + 4 + 49/4 = (1 + 16 + 49)/4 = 66/4 = 33/2$$

$$c_1 = \frac{11}{11} = 1 \qquad c_2 = \frac{-12}{6} = -2 \qquad c_3 = \frac{-33}{33/2} = -2$$

Obviamente, las coordenadas de $\vec{y}$ *se pueden calcular también mediante el método habitual, resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$