

2.12 Descomposición ortogonal y proyección ortogonal

El resultado $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$, significa que cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de forma única como suma de un vector $\hat{\vec{y}} \in W$ y un vector $\vec{z} \in W^\perp$

$$\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z} \quad \text{con } \hat{\vec{y}} \in W \text{ y } \vec{z} \in W^\perp$$

$\hat{\vec{y}}$ es la **proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre W** , que denotamos también como $\text{proy}_W \vec{y}$

También se puede dar esta definición equivalente: La proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre W es el vector $\hat{\vec{y}} \in W$ tal que $\vec{y} - \hat{\vec{y}} \in W^\perp$

¿Cómo obtener $\text{proy}_W \vec{y}$?

Ya que $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$ podemos obtener una base de $\mathbb{R}^n$ $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d, \vec{b}_{d+1}, \dots, \vec{b}_n\}$, con $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$ base de W y $\{\vec{b}_{d+1}, \dots, \vec{b}_n\}$ base de $W^\perp$.

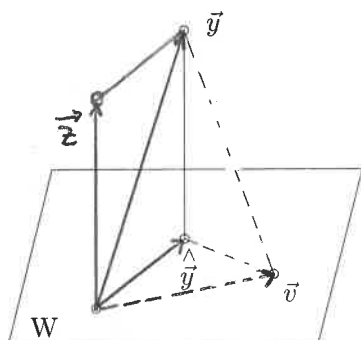
$$\text{Entonces } \vec{y} = \underbrace{c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_d \vec{b}_d}_{\text{proy}_W \vec{y} \in W} + \underbrace{c_{d+1} \vec{b}_{d+1} + \dots + c_n \vec{b}_n}_{\vec{z} \in W^\perp}$$

$$\text{con } \text{proy}_W \vec{y} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_d \vec{b}_d \in W \text{ y}$$

$$\vec{z} = c_{d+1} \vec{b}_{d+1} + \dots + c_n \vec{b}_n \in W^\perp$$

Una vez obtenidas las coordenadas $c_1, c_2, \dots, c_n$, que son únicas (las coordenadas respecto de una base dada son únicas), podremos determinar el vector único $\text{proy}_W \vec{y} \in W$ y el vector único $\vec{z} \in W^\perp$ tales que $\vec{y} = \text{proy}_W \vec{y} + \vec{z}$.

Esquema en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$:



Por otra parte, $\hat{\vec{y}}$ tiene la propiedad de ser el vector de W más cercano a $\vec{y}$

$$\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in W \quad \text{con } \vec{v} \neq \hat{\vec{y}}$$

Decimos entonces que dado $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, la **mejor aproximación** de $\vec{y}$ que puedo obtener mediante un vector de W , subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, es $\text{proy}_W \vec{y}$

¿En qué sentido es mejor aproximación?. En el sentido de menor distancia.

La **distancia** de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ al **subespacio** W se define como la distancia desde $\vec{y}$ al punto más cercano de W . Dicho de otra forma, la distancia de $\vec{y}$ a W es igual a $\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| = \|\vec{z}\|$

OBSERVACIONES

- $\vec{z} = \text{proy}_{W^\perp} \vec{y}$, es decir, $\vec{z}$ es la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $W^\perp$.
- $\| \text{proy}_W \vec{y} \|$ es la distancia de $\vec{y}$ a $W^\perp$.
- Si $\vec{y} \in W$, entonces $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{y}$
- Si $\vec{y} \in W^\perp$, entonces $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{0}$

En temas anteriores hemos estudiado proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, determinando a partir de las características de la transformación cuál era la matriz asociada referida a la “base natural” de la transformación, o base de autovectores de la transformación, y cual era la matriz estándar asociada, obtenida mediante los cambios de base. Con procedimientos similares pudimos obtener la matriz asociada a la simetría ortogonal. A partir de las matrices resultaba sencillo obtener la proyección ortogonal o el simétrico de cualquier vector.

En este tema estudiamos la proyección ortogonal a partir de la descomposición ortogonal y extendemos el concepto de proyección ortogonal al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

2.13 Proyección ortogonal sobre un subespacio del que conocemos una base ortogonal

TEOREMA. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2 \dots \vec{b}_d\}$ una base ortogonal de W e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$proy_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_d}{\vec{b}_d \cdot \vec{b}_d} \vec{b}_d \quad [6a]$$

Demostración:

$$proy_W \vec{y} \in W, \text{ por tanto } proy_W \vec{y} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_d \vec{b}_d \quad [I]$$

Multiplicando escalarmente la expresión anterior por el vector $\vec{b}_1$ obtenemos:

$$proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_1 = c_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + 0 + \dots + 0 = c_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 \quad \Rightarrow \quad proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_1 = c_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1$$

$$\text{Despejando } c_1: \quad c_1 = \frac{proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{b}_2$ obtendríamos c_2 y así sucesivamente hasta obtener c_d .

En definitiva:

$$c_i = \frac{proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$$

Por otra parte, $\forall i = 1 \dots d$, $proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_i = (\vec{y} - \vec{z}) \cdot \vec{b}_i = \vec{y} \cdot \vec{b}_i$ ya que $\vec{z} \cdot \vec{b}_i = 0$ por ser $\vec{z}$ la proyección de $\vec{y}$ sobre $W^\perp$ y por tanto ortogonal a todos los $\vec{b}_i$. Podemos entonces escribir los coeficientes c_i cómo:

$$c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$$

Sustituyendo los c_i en la ecuación [I] obtenemos la igualdad [8a] presentada en el teorema.

$$proy_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_p}{\vec{b}_p \cdot \vec{b}_p} \vec{b}_p$$

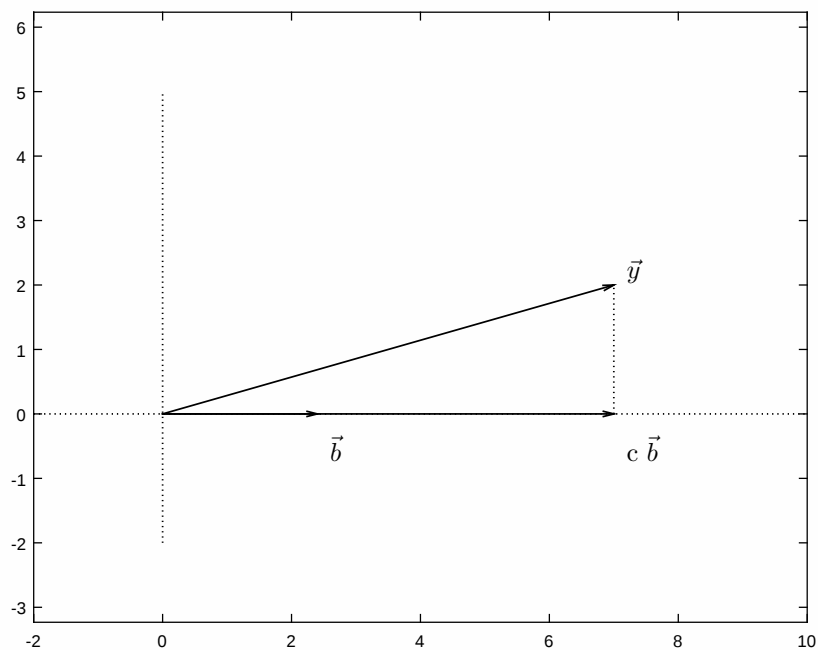
Justificaremos enseguida en un esquema que cada sumando corresponde a la proyección ortogonal sobre un subespacio unidimensional $\langle \vec{b}_i \rangle$. Por tanto la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d \rangle$, siendo $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d\}$ una base ortogonal, es igual a la suma de las d proyecciones ortogonales sobre subespacios unidimensionales, mutuamente ortogonales, en las direcciones de $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_d$.

- Si la base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2 \dots \vec{b}_d\}$ es ortonormal la expresión [6b] queda cómo:

$$proy_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{b}_d) \vec{b}_d \quad [6b]$$

Para cálculos a mano se recomienda utilizar la fórmula [6a] ya que en la [6b] aparecerán en general raíces cuadradas.

Esquema en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^2$ de la proyección ortogonal de un vector sobre una recta.



$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = c \vec{b}$$

$$(\vec{y} - c \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{y} \cdot \vec{b} - c \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow c = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

Obsérvese que el vector proyección de $\vec{y}$ sobre $\langle \vec{b} \rangle$ no depende de como esté escalado $\vec{b}$ (con múltiplos de $\vec{b}$ obtendríamos el mismo vector proyección).

Ejemplo 2.20. Considera en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^2$ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. a) Escribe $\vec{y}$ como suma de un vector en el subespacio generado por $\vec{b}$ y de un vector ortogonal a $\vec{b}$. b) Obtén la distancia de $\vec{y}$ al subespacio generado por $\vec{b}$.

Sol:

a)

$$\text{proy}_{<\vec{b}>} \vec{y} = \frac{(2,6) \cdot (7,1)}{49+1} (7,1) = \frac{14+6}{50} (7,1) = \frac{20}{50} (7,1) = \frac{2}{5} (7,1) = \left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\vec{y} = \text{proy}_{<\vec{b}>} \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_{<\vec{b}>} \vec{y} \Rightarrow$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 14/5 \\ 6 - 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 28/5 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $\underbrace{\begin{bmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}}_{\in <\vec{b}>} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4/5 \\ 28/5 \end{bmatrix}}_{\in <\vec{z}_1>} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

b) $\vec{z} = 4/5(-1, 7)$

$$\|\vec{z}\| = 4/5\sqrt{1+49} = 4/5\sqrt{2 \times 25} = 4\sqrt{2}$$

Ejemplo 2.21. Considera en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{y} = (7, 6)$ y $\vec{b} = (4, 2)$. Encuentra la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\langle \vec{b} \rangle$ y la distancia de $\vec{y}$ a la recta $\langle \vec{b} \rangle$. Encuentra el simétrico de $\vec{y}$ respecto de $\langle \vec{b} \rangle$ y comprueba que la norma del vector simétrico es igual a la norma del vector original.

Sol:

- Puesto que el subespacio sobre el que se proyecta es de dimensión 1, su base puede considerarse como base ortogonal.

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{(7, 6) \cdot (4, 2)}{(4, 2) \cdot (4, 2)} (4, 2) = \frac{28 + 12}{16 + 4} (4, 2) = 2(4, 2) = (8, 4)$$

- La distancia de $\vec{y}$ a $\langle \vec{b} \rangle$ es igual a la norma de $\vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = (7, 6) - (8, 4) = (-1, 2)$

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

- $\vec{y}_{\text{sim}} = \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} - \vec{z} = (8, 4) - (-1, 2) = (9, 2)$

También se podría haber calculado como:

$$\vec{y}_{\text{sim}} = \vec{y} - 2\vec{z} = (7, 6) - (-2, 4) = (9, 2)$$

La norma de $\vec{y} = (7, 6)$ es $\sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}$ y la norma de $\vec{y}_{\text{sim}}$ es $\sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$

- El vector $\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y}$ también se podía haber obtenido mediante el procedimiento visto en la Sección 12.

Calculamos en primer lugar un vector $\vec{z}_1$ ortogonal a $\vec{b} = (4, 2)$. Un ejemplo es $\vec{z}_1 = (1, -2)$.

Considerada la base $B = \{\vec{b}, \vec{z}_1\}$, con un vector en la dirección de $\vec{b}$ y otro en la dirección ortogonal $\vec{z}_1$, se calculan las coordenadas de $(7, 6)$ respecto a esta base, resultando ser $(2, -1)$, es decir:

$$(7, 6) = \underbrace{2(4, 2)}_{\in \langle \vec{b} \rangle} + \underbrace{-1(1, -2)}_{\in \langle \vec{z}_1 \rangle} = (8, 4) + (-1, 2)$$

Por tanto la proyección de $(7, 6)$ sobre $(4, 2)$ es el vector $\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = (8, 4)$

Ejemplo 2.22. Considera en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$ el plano W que pasa por el origen y por los puntos $(0,5,1)$ y $(2,5,1)$. Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (1,2,6)$ sobre W . Determina la distancia del punto $(1,2,6)$ al plano W y a la recta $W^\perp$.

Sol.:

Veamos la resolución del ejercicio siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 12:

Para resolver el problema buscaremos la expresión de $\vec{v}$ en una base B que contenga los dos vectores generadores de W , que son $\vec{a} = (0,5,1)$ y $\vec{b} = (2,5,1)$, y un vector $\vec{z}_1 \in W^\perp$. Los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{z}_1\}$, con $\vec{a} \in W$, $\vec{b} \in W$ y $\vec{z}_1 \in W^\perp$.

Obtenemos $W^\perp = \langle (0,1,-5) \rangle$ mediante los métodos anteriormente descritos (es decir, buscando vector (x,y,z) ortogonal a la vez a $(0,5,1)$ y a $(2,5,1)$, y que por tanto cumpla las ecuaciones $5y + z = 0$ y $2x + 5y + z = 0$, o mediante el producto vectorial). Tomamos $\vec{z}_1 = (0,1,-5)$.

Se obtiene seguidamente que las coordenadas de $\vec{v} = (1,2,6)$ en la base $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{z}_1\}$ son $\begin{bmatrix} 3/26 \\ 1/2 \\ -14/13 \end{bmatrix}$, por tanto,

$$\vec{v} = \frac{3}{26} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{14}{13} \vec{z}_1$$

Nos fijamos ahora en que $3/26 \vec{a} + 1/2 \vec{b} \in W$ y $-14/13 \vec{z}_1 \in W^\perp$. Por tanto ya tenemos el vector $\vec{v}$ expresado como suma de un vector de W y otro de $W^\perp$,

$$\vec{v} = \text{proy}_W \vec{v} + \vec{z}$$

$$\bullet \text{ proy}_W \vec{v} = \frac{3}{26} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \dots = \left(1, \frac{40}{13}, \frac{8}{13}\right) = \frac{1}{13}(13, 40, 8) = (1, 3.0769, 0.6154)$$

$$\vec{z} = -\frac{14}{13} \vec{z}_1 = -\frac{14}{13}(0, 1, -5) = \left(0, -\frac{14}{13}, \frac{70}{13}\right) = (0, -1.0769, 5.3846)$$

- La distancia de $\vec{v}$ al plano es la norma de $\vec{z}$,

$$d = \sqrt{0^2 + (-1.0769)^2 + 5.3846^2} = 5.4913 \text{ si usamos el formato decimal.}$$

$d = 14/13 \sqrt{0 + 1^2 + 5^2} = 14/13 \sqrt{26} = 14/13 \sqrt{2 \times 13} = 14 \sqrt{2/13}$ presentando la solución exacta simplificada.

- La distancia de $\vec{v}$ a la recta $W^\perp$ es la norma de $\text{proy}_W \vec{v}$, es decir:

$$d' = \sqrt{1^2 + (3.0769)^2 + 0.6154^2} = 3.2933 \text{ si usamos formato decimal.}$$

$$d' = 1/13 \sqrt{13^2 + 40^2 + 8^2} = 1/13 \sqrt{1833} \text{ presentando la solución exacta simplificada.}$$

Presentamos ahora la solución del ejercicio (la parte de calcular la proyección ortogonal) aplicando el procedimiento visto en la Sección 13.

Ya que $\dim W = 2$ y $\dim W^\perp = 1$, en la descomposición $\vec{v} = \text{proy}_W \vec{v} + \vec{z}$ calcularemos primero $\vec{z}$ y seguidamente $\text{proy}_W \vec{v} = \vec{v} - \vec{z}$, ya que en este procedimiento hay que hacer menos cálculos para proyectar sobre un subespacio de dimensión 1 que para proyectar sobre un subespacio de dimensión 2. De entrada, en el caso de que la dimensión sea mayor que 1 necesitamos que la base sea ortogonal.

Obtenemos en primer lugar una base de $W^\perp$ (el procedimiento está descrito arriba porque también se necesitó en el método anterior).

Una vez obtenido $\vec{z}_1$ se obtiene la proyección de $\vec{v}$ sobre la recta $\langle \vec{z}_1 \rangle = W^\perp$:

$$\text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{z}_1}{\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1} \vec{z}_1 = \frac{(1, 2, 6) \cdot (0, 1, -5)}{26} \vec{z}_1 = -\frac{28}{26} \vec{z}_1 = -\frac{14}{13} \vec{z}_1 = (0, -\frac{14}{13}, \frac{70}{13})$$

A continuación:

$$\text{proy}_W \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = (1, 2, 6) - (0, -\frac{14}{13}, \frac{70}{13}) = (1, \frac{40}{13}, \frac{8}{13}) = (1, 3.0769, 0.6154)$$

Este es el método más simple para los casos en los que en la descomposición $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$ uno de los dos subespacios tiene dimensión 1.

Ejemplo 2.23. Supongamos dos clases de alimento, A y B , con las cantidades de vitamina C , calcio y magnesio dadas en la tabla siguiente. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

a) Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:

$$\vec{v} = (17 \text{ mg de vitamina } C, 54 \text{ mg de calcio}, 31 \text{ mg de magnesio})$$

b) Determina el aporte más cercano al aporte exacto que se podría conseguir combinando los dos alimentos.

Sol.:

a) Para determinar si el aporte $(17, 54, 31)$ se puede obtener combinando x unidades de alimento A con aporte $(1, 5, 3)$ e y unidades de B con aporte $(1, 2, 1)$ hay que resolver la siguiente ecuación:

$$x(1, 5, 3) + y(1, 2, 1) = (17, 54, 31)$$

$$\text{Por tanto el SL: } \begin{cases} x + y = 17 \\ 5x + 2y = 54 \\ 3x + y = 31 \end{cases} \quad , \quad \text{con matriz ampliada } A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 17 \\ 5 & 2 & 54 \\ 3 & 1 & 31 \end{array} \right]$$

$$A^* \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 17 \\ 0 & -3 & -31 \\ 0 & -2 & -20 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 17 \\ 0 & -3 & -31 \\ 0 & 1 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -31 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

El SL es incompatible pues $\text{rg}A=2$ y $\text{rg}A^*=3$

Esto significa que $\vec{v}$ no es combinación lineal de $\vec{a} = (1, 5, 3)$ y $\vec{b} = (1, 2, 1)$, o dicho de otra forma, que $\vec{v}$ no pertenece al plano $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

b) El vector más cercano a $\vec{v} = (17, 54, 31)$ que se puede obtener combinando los alimentos A y B será la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre el subespacio generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto tenemos que obtener:

$$\text{proy}_W \vec{v}, \text{ siendo } W = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

• Procedimiento según la sección 12:

Tomamos $W = \langle (1, 5, 3), (1, 2, 1) \rangle$, y nos falta el vector $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in W^\perp$.

$$\begin{aligned} (1, 5, 3) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0 \\ (1, 2, 1) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} n_1 + 5n_2 + 3n_3 = 0 \\ n_1 + 2n_2 + n_3 = 0 \end{cases} \quad A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10/3 + 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow (1/3n_3, -2/3n_3, n_3)$$

$$W^\perp = \langle (1/3, -2/3, 1) \rangle \text{ o más simple } W^\perp = \langle (1, -2, 3) \rangle$$

Este vector también se podría haber obtenido mediante el producto vectorial.

Expresando $(17, 54, 31)$ como combinación lineal de los vectores de la base $B = \{(1, 5, 3), (1, 2, 1), (1, -2, 3)\}$ obtenemos:

$$(17, 54, 31) = \underbrace{\frac{48}{7}(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1)}_{\text{proy}_W \vec{v}} + \underbrace{\frac{1}{7}(1, -2, 3)}_{\text{proy}_{W^\perp} \vec{v}},$$

sin más que resolver el $SL [\vec{a} \vec{b} \vec{n} \mid \vec{v}]$, y tras encontrar que dicha solución es $(48/7, 10, 1/7)$.

$\text{proy}_W \vec{v} = 48/7(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1) = (118/7, 380/7, 214/7) = (16.8571, 54.2857, 30.5714)$
es el aporte más cercano posible.

Se puede simplificar más como: $\text{proy}_W \vec{v} = 2/7(59, 190, 107)$.

• Procedimiento según la sección 13:

El vector más cercano a $\vec{v} = (17, 54, 31)$ que se puede obtener combinando los alimentos A y B será la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre W . Obtendremos en primer lugar la proyección ortogonal sobre $W^\perp$, por ser más sencillo aplicar la fórmula sobre un subespacio de dimensión 1. Además la base de W que conocemos no es ortogonal.

En el procedimiento de descomposición ortogonal ya se presentó la obtención de la base de $W^\perp$, $\{\vec{n} = (1, -2, 3)\}$.

La proyección de $\vec{v}$ sobre la recta $\langle \vec{n} \rangle = W^\perp$ es:

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(17, 54, 31) \cdot (1, -2, 3)}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{(17 - 108 + 93)}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_W \vec{v} = \vec{v} - \hat{\vec{v}} = (17, 54, 31) - \frac{1}{7}(1, -2, 3) = (118/7, 380/7, 214/7) = 2/7(59, 190, 107).$$

Ejemplo 2.24. En el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^4$ demuestra que no es posible expresar el vector $\vec{v} = (15, 10, 3, -5)$ como combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \{(-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2)\}$.
Obtén los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de S que dan el vector más cercano a $\vec{v}$.

Sol.:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

La suma de las ecuaciones 2 y 3 da incompatibilidad.

El vector de $\langle S \rangle$ más cercano a $\vec{v}$ es la proyección de $\vec{v}$ sobre $\langle S \rangle$. Presentaremos la obtención de la proyección y de sus coeficientes respecto de la base S , utilizando dos métodos distintos.

Método de descomposición ortogonal de $\vec{v}$ (Sección 12)

Para obtener una base del complemento ortogonal de $\langle S \rangle = \langle (-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2) \rangle$ tenemos que resolver el SL homogéneo con matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

La solución general en forma paramétrica es: $(t, z - 2t, z, t)$

Y la base más sencilla de $\langle S \rangle^\perp$ es $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$

Resolviendo el sistema: $\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right]$, obtenemos la solución $(11/4, 17/4, 29/4, 3/4)$.

Base de $\langle S \rangle$ Base de $\langle S \rangle^\perp$

Los coeficientes buscados son $11/4$ y $17/4$, ya que

$$\text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} = 11/4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 17/4 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ es el vector de } \langle S \rangle \text{ más cercano a } \vec{v}$$

$$\text{proy}_{\langle S \rangle} \vec{v} = \begin{bmatrix} 57/4 \\ 17/4 \\ -17/4 \\ -23/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.25 \\ 4.25 \\ -4.25 \\ -5.75 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula de proyección, cuando se conoce base ortogonal del subespacio (Sección 13)

Los dos vectores de S forman base de $\langle S \rangle$, pero esa base no es ortogonal. Para obtener una base ortogonal de $\langle S \rangle$ debemos obtener en primer lugar la forma implícita de $\langle S \rangle$. Una opción es determinarla a partir del método anterior, teniendo en cuenta que si $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ es base de $\langle S \rangle^\perp$, entonces las implícitas de S son $x - 2y + t = 0$, $y + z = 0$, o deducirla en la forma siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & & x \\ 0 & 1 & & y \\ 0 & -1 & & z \\ 1 & -2 & & t \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & & x \\ 0 & 1 & & y \\ 0 & -1 & & z \\ 0 & 2 & & x+t \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & & x \\ 0 & 1 & & y \\ 0 & 0 & & y+z \\ 0 & 0 & & x-2y+t \end{array} \right]$$

La forma implícita resultante es: $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \end{cases}$

De las ecuaciones implícitas de W pasamos a la siguiente forma paramétrica, resolviendo el SL:

$$(x, y, -y, -x + 2y)$$

De ella obtenemos directamente la base $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 2)\}$, que tampoco es base ortogonal.

Tomamos entonces como primer vector de la base ortogonal, $\vec{b}_1 = (1, 0, 0, -1)$, por ser el más sencillo.

El segundo vector base lo obtenemos siguiendo cualquiera de estos procedimientos:

- *Método 1.* Tomamos la forma paramétrica general, e imponiendo ortogonalidad al vector $\vec{b}_1$ tenemos: $(x, y, -y, -x + 2y) \cdot (1, 0, 0, -1) = x + x - 2y = 0$. Por tanto $x = y$, y la forma paramétrica reduce un parámetro, quedando: $(y, y, -y, y)$. El segundo vector base es pues $\vec{b}_2 = (1, 1, -1, 1)$.
- *Método 2.* Añadimos a la forma implícita de W la condición de ortogonalidad a $(1, 0, 0, -1)$, quedándonos entonces el SL siguiente:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

La solución general de este sistema es $(y, y, -y, y)$, de donde deducimos $\vec{b}_2 = (1, 1, -1, 1)$

Ahora ya tenemos una base ortogonal en $\langle S \rangle$, $B = \{(1, 0, 0, -1), (1, 1, -1, 1)\}$, y por tanto podemos aplicar la fórmula de la sección 13.

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \frac{(15, 10, 3, -5) \cdot (1, 0, 0, -1)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{(15, 10, 3, -5) \cdot (1, 1, -1, 1)}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{17}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 17/4 \\ 17/4 \\ -17/4 \\ -10 + 17/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57/4 \\ 17/4 \\ -17/4 \\ -23/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A continuación obtenemos los coeficientes de la combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de $\langle S \rangle$ que dan el vector más cercano a $\vec{v}$. Para ello hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 57/4 \\ 0 & 1 & 17/4 \\ 0 & -1 & -17/4 \\ 1 & -2 & -23/4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 57/4 \\ 0 & 1 & 17/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 34/4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 57/4 \\ 0 & 1 & 17/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -11/4 \\ 0 & 1 & 17/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{\begin{cases} c_1 = 11/4 \\ c_2 = 17/4 \end{cases}}$$

Ejemplo 2.25. En el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$ considera $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Observa que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortogonal de $W = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. a) Escribe $\vec{y}$ como suma de un vector de W y un vector perpendicular a W . b) Obtén el punto de W más cercano a $\vec{y}$ y la distancia de $\vec{y}$ a W . c) Encuentra el simétrico de $\vec{y}$ respecto de $\langle \vec{W} \rangle$ y comprueba que la norma del vector simétrico es igual a la norma del vector original.

a) Por ser $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base ortogonal podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W \vec{y} &= \frac{\vec{y} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 = \\ &= \frac{(2+10-3)}{(4+25+1)} \vec{v}_1 + \frac{(-2+2+3)}{(4+1+1)} \vec{v}_2 = \frac{9}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{y} = \text{proy}_W \vec{y} + \vec{z} \quad \text{con } \vec{z} \in W^\perp \Rightarrow \vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_W \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix} \\ &\in W \quad \in W^\perp \end{aligned}$$

b) El punto más cercano es $(-2/5, 2, 1/5)$.

La distancia de $\vec{y}$ a W es la norma de $\vec{z} = (7/5, 0, 14/5)$:

$$d = 7/5 \sqrt{1^2 + 2^2} = 7/5 \sqrt{5} = 7/\sqrt{5}$$

c) $\vec{y}_{\text{sim}} = \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} - \vec{z} = (-2/5, 2, 1/5) - (7/5, 0, 14/5) = (-9/5, 2, -13/5)$

También se podría haber calculado como:

$$\vec{y}_{\text{sim}} = \vec{y} - 2\vec{z} = (1, 2, 3) - (14/5, 0, 28/5) = (-9/5, 2, -13/5)$$

La norma de $\vec{y} = (1, 2, 3)$ es $\sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ y la norma de $\vec{y}_{\text{sim}}$ es $1/5 \sqrt{9^2 + 10^2 + 13^2} = 1/5 \sqrt{350} = \sqrt{14}$.

También se podía haber resuelto calculando un vector $\vec{n}$ normal al plano generado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, aplicar la fórmula de la proyección sobre la perpendicular al plano para obtener $\vec{z}$ y finalmente obtener la proyección sobre el plano como $\vec{y} - \vec{z}$.

Ejemplo 2.26. Considerando el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$, los vectores $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $W = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, obtén $\text{proy}_W \vec{y}$.

Se puede comprobar que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales, y que por tanto es aplicable la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W \vec{y} &= \frac{(\vec{y} \cdot \vec{v}_1)}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{(\vec{y} \cdot \vec{v}_2)}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 = \frac{(63 + 1 + 24)}{(49 + 1 + 16)} \vec{v}_1 + \frac{(9 + 1 - 12)}{(1 + 1 + 4)} \vec{v}_2 = \frac{88}{66} \vec{v}_1 - \frac{2}{6} \vec{v}_2 \\ &= \frac{4}{3} \vec{v}_1 - \frac{1}{3} \vec{v}_2 = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28/3 + 1/3 \\ 4/3 - 1/3 \\ 16/3 + 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27/3 \\ 3/3 \\ 18/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este caso encontramos que $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{y}$. Esto es debido a que $\vec{y} \in W$, es decir, es combinación lineal de $\vec{v}_1$ y de $\vec{v}_2$. El punto más cercano de W a $\vec{y}$ es el propio $\vec{y}$.

Ejemplo 2.27. En el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$

- Calcula una base ortonormal de S .
- Calcula una base ortonormal de $S^\perp$.
- Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (1, 0, 1, 1)$ sobre S .
- Calcula la distancia de $\vec{v}$ a S .

Sol.:

El apartado a) es igual al Ejemplo 9.

$$B = \{(0, 1, 0, 0), \frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1, 0, 1, -2)}{\sqrt{6}}\}$$

b) Base ortonormal de $S^\perp$

Un vector genérico de S cumple: $x - z - t = 0$, que puedo expresar como $(x, y, z, t) \cdot (1, 0, -1, -1) = 0$, por tanto un vector $(x, y, z, t) \in S$ es aquel que es ortogonal a $(1, 0, -1, -1)$.

$\alpha(1, 0, -1, -1)$ será también ortogonal a $(x, y, z, t) \in S$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, por tanto:

$$S^\perp = \langle (1, 0, -1, -1) \rangle$$

Base ortonormal:

$$B = \left\{ \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} \right\}$$

c) $\vec{v} = \text{proy}_S \vec{v} + \text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$

Es más fácil calcular la proyección sobre $S^\perp$ que la proyección sobre S , puesto que $S^\perp$ tiene dimensión uno (una recta en $\mathbb{R}^4$) mientras que S tiene dimensión 3. Por tanto obtendremos en primer lugar $\text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$ y a continuación $\text{proy}_S \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$.

La base de $S^\perp$ obtenida en el apartado anterior, $B = \{ 1/\sqrt{3} (1, 0, -1, -1) \}$ es base ortonormal, lo que simplifica la fórmula de la proyección.

$$\text{proy}_{\langle \vec{u} \rangle} \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \vec{u}$$

$$\text{proy}_{S^\perp} \vec{v} = (1, 0, 1, 1) \cdot \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{1 - 1 - 1}{\sqrt{3}} \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} = \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3}$$

$$\text{proy}_S \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{S^\perp} \vec{v} = (1, 0, 1, 1) - \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3} = \frac{(4, 0, 2, 2)}{3}$$

d) La distancia de $\vec{v}$ a S es igual a la norma de $\text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$

$$d = \|\text{proy}_{S^\perp} \vec{v}\| = \left\| \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3} \right\| = \frac{1}{3} \sqrt{1 + 1 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$