

# Lección 1

## Forma bilineal y producto escalar

### 1.1 Definición de forma bilineal en $\mathbb{R}^n$

Sea el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  y consideremos en él la base canónica  $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ . Se dice que una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una **forma bilineal** si viene dada por la expresión:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t G \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ siendo } G \text{ una matriz cuadrada de orden } n.$$

El elemento  $(i, j)$  de la matriz  $G$  es el resultado de la aplicación para el par de vectores  $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ , es decir,  $g_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ .

El término “bilineal” indica que  $f$  es lineal respecto de los dos vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ , cumpliéndose específicamente los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{x}', \vec{y}) &= f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}', \vec{y}) & f(\vec{x}, \vec{y} + \vec{y}') &= f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}, \vec{y}') \\ f(\lambda \vec{x}, \vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) & f(\vec{x}, \lambda \vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

Estas igualdades se inferen de forma inmediata a partir de la expresión  $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t G \vec{y}$ , teniendo en cuenta las propiedades del producto de matrices.

Consecuencia de los resultados anteriores son las dos propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} f(\vec{0}, \vec{y}) &= f(\vec{x}, \vec{0}) = 0 \\ f(-\vec{x}, \vec{y}) &= f(\vec{x}, -\vec{y}) = -f(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

- Se dice que la forma bilineal  $f$  es **simétrica**, si  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$$

- Se dice que la forma bilineal  $f$  es **definida positiva**, si  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple

$$f(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \text{ con } f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

## 1.2 Definición de producto escalar en $\mathbb{R}^n$

Se denomina **producto escalar** en  $\mathbb{R}^n$  o **producto interno** en  $\mathbb{R}^n$  a toda forma bilineal  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  que sea simétrica y definida positiva.

**Notación:** El producto escalar se denota con un punto “ $\cdot$ ”, es decir,  $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^t G \vec{y} = \rho$$

Cada producto escalar vendrá dado por una matriz  $G$ , denominada **métrica** del producto escalar.

La matriz  $G$  ha de ser simétrica, a fin de que la forma bilineal sea simétrica.

$$g_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \text{ ha de ser igual a } g_{ji} = f(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$$

La matriz  $G$  además de simétrica ha de ser definida positiva. Una condición necesaria y suficiente para que la matriz simétrica  $G$  sea definida positiva es que todos sus valores propios sean positivos estrictamente<sup>1</sup>. En el Tema 5 ya se ha adelantado que la existencia de  $n$  valores propios reales (incluyendo multiplicidades) está garantizada para toda matriz simétrica.

Al espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , una vez se le dota de un producto escalar determinado, es decir, de una métrica determinada, se le denomina **espacio euclídeo**  $\mathbb{R}^n$ . El producto escalar permite definir conceptos como la norma de un vector, distancia entre dos vectores, y ortogonalidad y ángulo entre dos vectores.

El **producto escalar canónico** en  $\mathbb{R}^n$  es el que corresponde a la métrica más sencilla posible, que es tomar  $G = I$ . Obviamente  $I$  es tanto simétrica como definida positiva.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^t I \vec{y} = \vec{x}^t \vec{y}$$

---

<sup>1</sup>No se presenta en este manual la demostración de este resultado

## Lección 2

# Espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$ : complemento ortogonal y descomposición ortogonal

### 2.1 Definición del producto escalar canónico

El producto escalar  $f$  más sencillo en  $\mathbb{R}^n$  es el definido así :

$f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$  , siendo la función  $\delta_{ij}$  la que toma valor 1 si  $i = j$  y valor 0 si  $i \neq j$ , y siendo  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

La métrica o matriz asociada  $G$  de este producto escalar es por tanto la identidad  $I_n$ , con  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

Se le denomina “producto escalar canónico”, utilizándose también las expresiones “producto escalar usual” o “producto escalar habitual”.

**La expresión del producto escalar canónico es por tanto:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t I \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \quad [1]$$

Al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  en el que se considera el producto escalar canónico se le denomina **espacio euclídeo canónico**  $\mathbb{R}^n$ .

A partir de ahora denotaremos el producto escalar canónico con un símbolo más pequeño, como  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

La definición  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v}$  cumple en efecto los requisitos de todo producto escalar, es decir, ser una forma bilineal simétrica y definida positiva.

Las tres propiedades son sencillas de comprobar, por lo que solo se presenta la comprobación en un apartado.

- Bilinealidad:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\text{En efecto, } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})^t \vec{w} = (\vec{u}^t + \vec{v}^t) \vec{w} = \vec{u}^t \vec{w} + \vec{v}^t \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \text{ con justificación muy similar a la anterior.}$$

$$\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- Simetría:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Definido positivo:  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ , con  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

**Ejemplo 2.1.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$  determina  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  y  $\vec{v} \cdot \vec{u}$ , con  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Sol.:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [2 \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + (-5) \times 2 + (-1) \times (-3) = 6 - 10 + 3 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^t \vec{u} = [3 \quad 2 \quad -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \times 2 + 2 \times (-5) + (-3) \times (-1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

Consideraremos a partir de ahora únicamente el producto escalar habitual o canónico

## 2.2 Longitud o norma de un vector

Sea el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$  y  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Se denomina **norma** o **longitud** de  $\vec{v}$  al *escalar no negativo*  $\|\vec{v}\|$  definido por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^t \vec{v}}$$

Nótese que la raíz está definida, ya que  $\vec{v} \cdot \vec{v}$  es positivo.

La expresión general de la norma es la siguiente:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^t \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \quad [2]$$

Propiedades de la norma:

- $\|c\vec{v}\| = |c| \|\vec{v}\|$
- Desigualdad de Schwarz  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

La igualdad se cumple cuando alguno de los dos vectores es nulo, o, sin serlo,  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$

- Desigualdad de Minkowski o desigualdad triangular  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

La igualdad se cumple cuando alguno de ellos es nulo, o, sin serlo,  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  se dice **vector unitario** si  $\|\vec{v}\| = 1$

Multiplicando el vector no nulo  $\vec{v}$  por el escalar  $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$  obtenemos un vector  $\vec{v}_o = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$  que es unitario y del que decimos que tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{v}$ . El proceso de crear  $\vec{v}_o$  a partir de  $\vec{v}$  se denomina **normalización** de  $\vec{v}$ .

### 2.3 Distancia entre dos vectores

Dados  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , la **distancia entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$** , denotada como  $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v})$ , es la norma del vector  $\vec{v} - \vec{u}$ .

Esto es,  $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{(\vec{v} - \vec{u})^t(\vec{v} - \vec{u})}$

Propiedades de la distancia:

- $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$  si  $\vec{u} \neq \vec{v}$ , y  $\text{dist}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$
- $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{dist}(\vec{v}, \vec{u})$
- Desigualdad triangular  $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) \leq \text{dist}(\vec{u}, \vec{w}) + \text{dist}(\vec{w}, \vec{v})$

La expresión general de la distancia entre dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  en el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$  es la siguiente:

$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2} \quad [3]$$

**Ejemplo 2.2.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^2$ , calcula la distancia entre los vectores  $\vec{v} = (7, 1)$  y  $\vec{u} = (3, 2)$ .

Sol.:

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{(\vec{v} - \vec{u})^t(\vec{v} - \vec{u})} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

**Ejemplo 2.3.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^4$ , calcula la distancia entre los vectores  $\vec{v} = (7, 1, 1, 5)$  y  $\vec{u} = (3, 2, 1, 3)$ .

Sol.:

$$\vec{v} - \vec{u} = (4, -1, 0, 2)$$

$$\text{dist} = \|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{16 + 1 + 0 + 4} = \sqrt{21}$$

## 2.4 Ángulo entre dos vectores

En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$  se define ángulo entre dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , ninguno de ellos nulo, como el escalar  $\alpha = \text{áng}(\vec{u}, \vec{v})$  siguiente:

$$\alpha \in [0, \pi] \text{ tal que } \vec{u}^t \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

$$\text{Despejando } \cos \alpha: \quad \cos \alpha = \frac{\vec{u}^t \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad [4]$$

$$\bullet \vec{u}^t \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$$

$$\bullet \vec{u}^t \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0, \pi/2)$$

$$\text{Si } \vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ con } \lambda > 0 \Rightarrow \vec{u}^t \vec{v} = \vec{u}^t \lambda \vec{u} = \lambda (\vec{u}^t \vec{u}) > 0$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\| \|\lambda \vec{u}\|} = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{|\lambda| \|\vec{u}\|^2} = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\bullet \vec{u}^t \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (\pi/2, \pi]$$

$$\text{Si } \vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ con } \lambda < 0 \Rightarrow \vec{u}^t \vec{v} = \vec{u}^t \lambda \vec{u} = \lambda (\vec{u}^t \vec{u}) < 0$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\| \|\lambda \vec{u}\|} = \frac{\lambda \|\vec{u}\|^2}{|\lambda| \|\vec{u}\|^2} = -1 \quad \Rightarrow \alpha = \pi$$

OBSERVACIÓN: Dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no nulos del espacio euclídeo son linealmente dependientes si y sólo si el ángulo que forman es 0 o  $\pi$ .

**Ejemplo 2.4.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^2$  considera los vectores  $\vec{u} = (7, 1)$ ,  $\vec{v} = (-3, 3)$ ,  $\vec{w} = (3, -3)$  y  $\vec{z} = (4, -3)$ . Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ , y  $\vec{u}$  y  $\vec{z}$ .

$$(7, 1) \cdot (-3, 3) = \sqrt{50} \cdot \sqrt{18} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-21 + 3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{25 \times 4 \times 9}} = \frac{-18}{5 \times 2 \times 3} = -\frac{3}{5}$$

El ángulo es  $\alpha = 2.2143$  radianes = 126.8699 grados

$$(7, 1) \cdot (3, -3) = \sqrt{50} \cdot \sqrt{18} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{21 - 3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \times \sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$

El ángulo es  $\alpha = 0.9273$  radianes = 53.1301 grados

Nótese que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son vectores opuestos, por tanto la suma del ángulo de  $\vec{u}$  con  $\vec{v}$  más el ángulo de  $\vec{u}$  con  $\vec{w}$  es igual a 180 grados.

$$(7, 1) \cdot (4, -3) = \sqrt{50} \cdot 5 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{28 - 3}{5\sqrt{50}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$$

El ángulo es  $\alpha = 45$  grados

## 2.5 Vectores ortogonales

Dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  del espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$  son ortogonales entre sí si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = 0$

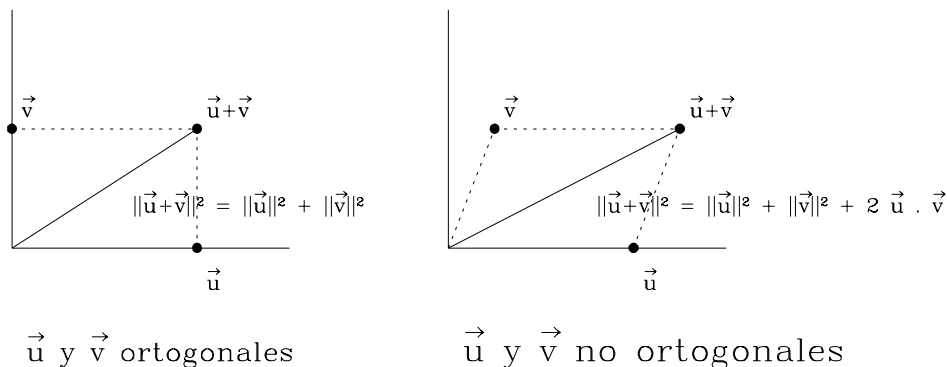
El vector cero es ortogonal a todos los vectores de  $\mathbb{R}^n$ , pues  $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

### Teorema de Pitágoras

Dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales si y sólo si  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$  [5a]

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad [5b]$$

Esquema para el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^2$ :



Observación: En la figura de la derecha se tiene que  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  es mayor que cero por lo que la norma al cuadrado de la suma es mayor que la suma de los cuadrados de las normas. Si el ángulo formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  fuera obtuso, y por tanto el producto escalar negativo, entonces el cuadrado de la norma de la suma sería menor que la suma de los cuadrados de las normas.

## 2.6 Ángulo formado por dos rectas o dos subespacios de dimensión 1

Dados dos subespacios unidimensionales de  $\mathbb{R}^n$ ,  $V_1 = \langle \vec{v}_1 \rangle$  y  $V_2 = \langle \vec{v}_2 \rangle$  se obtiene el ángulo formado por ellos tomando un vector base de cada uno, con producto escalar mayor o igual a cero, y determinando el ángulo para ese par de vectores.

Obviamente el ángulo entre dos rectas o dos subespacios de dimensión 1 solo puede tomar valores entre 0 y  $\pi/2$  radianes.

**Ejemplo 2.5.** *Obtén el ángulo formado por las siguientes rectas de  $\mathbb{R}^3$ :  $r_1 = \langle (1, 2, 3) \rangle$  y  $r_2 = \langle (3, 5, -7) \rangle$ .*

Sol.:

*El producto escalar de los dos vectores base dados en el enunciado es  $1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times (-7) = 3 + 10 - 21 = -8$ . Tomamos entonces como base de  $V_2$  el vector opuesto,  $(-3, -5, 7)$  y calculamos el ángulo con este vector.*

$$(1, 2, 3) \cdot (-3, -5, 7) = -3 - 10 + 21 = 8$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{(1+4+9)(9+25+49)}} = 0.2347$$

$$\alpha = 76.4269 \text{ grados}$$

## 2.7 Conjuntos ortogonales y ortonormales

Consideremos el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$ .

Un conjunto de vectores  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice que es un **conjunto ortogonal** si cada par de vectores distintos del conjunto es ortogonal, es decir, si  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \ \forall i \neq j$ .

Un conjunto de vectores  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \ \forall i \neq j \quad \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1 \ \forall i = 1, \dots, n$$

**TEOREMA.** Si  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $S$  es un conjunto linealmente independiente y por tanto es una base del subespacio generado por  $S$ .

**Demostración:** Supongamos que  $\exists \ c_1, c_2, \dots, c_p \ / \ \vec{0} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_p \vec{v}_p \quad [\text{I}]$

$$0 = \vec{0} \cdot \vec{v}_1 = (c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_p \vec{v}_p) \cdot \vec{v}_1$$

$$0 = (c_1 \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 + (c_2 \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 + \dots + (c_p \vec{v}_p) \cdot \vec{v}_1$$

$$0 = c_1(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) + c_2(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) + \dots + c_p(\vec{v}_p \cdot \vec{v}_1)$$

$$0 = c_1(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) \quad \text{ya que } \vec{v}_1 \text{ es ortogonal a } \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p.$$

Como  $\vec{v}_1$  es no nulo,  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$  no es nulo y por tanto  $c_1 = 0$ . Similarmente se puede demostrar que  $c_2, \dots, c_p$  tienen que ser cero, multiplicando [I] por  $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$  respectivamente. Por tanto el conjunto  $S$  es linealmente independiente.  $\square$

## 2.8 Base ortogonal y base ortonormal

Una **base ortogonal** de un subespacio  $W$  del espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$  es una base de  $W$  que es además un conjunto ortogonal.

Una **base ortonormal** de un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , es una base de  $W$  que es además un conjunto ortonormal.

**TEOREMA.** De cualquier subespacio  $W$  del espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$  se puede obtener una base ortogonal, y mediante normalización de ésta, una base ortonormal.

**TEOREMA.** La base canónica de  $\mathbb{R}^n$  es base ortonormal del espacio euclídeo canónico.

En efecto, al ser la métrica  $G = I$ , los vectores de la base canónica son unitarios y ortogonales dos a dos.

**Ejemplo 2.6.** Muestra que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  es un conjunto ortogonal del espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$ , siendo

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Consideremos los tres posibles pares de vectores distintos, a saber  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$  y  $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ .

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3(-1) + 1(2) + 1(1) = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 3(-1/2) + 1(-2) + 1(7/2) = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1(-1/2) + 2(-2) + 1(7/2) = 0$$

Cada par de vectores distintos es ortogonal, por tanto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  es un conjunto ortogonal.

**Ejemplo 2.7.** Muestra que  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  es una base ortonormal del espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$ , siendo:

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = \frac{9}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{(9+1+1)}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{(1+4+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_3 = \frac{1}{66} + \frac{16}{66} + \frac{49}{66} = \frac{(1+16+49)}{66} = \frac{66}{66} = 1$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \frac{-3}{\sqrt{11}\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{(-3+2+1)}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \frac{-3}{\sqrt{11}\sqrt{66}} + \frac{-4}{\sqrt{11}\sqrt{66}} + \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = \frac{(-3-4+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{66}} + \frac{-8}{\sqrt{6}\sqrt{66}} + \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{66}} = \frac{(1-8+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

El conjunto  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  es un conjunto ortonormal, luego es linealmente independiente, y por tanto forma una base de  $\mathbb{R}^3$  (son 3 vectores). Por ser un conjunto ortonormal es una base ortonormal.

Cuando los vectores de un conjunto ortogonal se “normalizan” para tener longitud unidad, el nuevo conjunto sigue siendo ortogonal, y por tanto, al tener longitud unidad, forma un conjunto ortonormal.

Estos son de hecho los vectores ortogonales del ejemplo anterior, pero normalizados para hacerlos unitarios.

## 2.9 Obtención de bases ortogonales de subespacios

**Ejemplo 2.8.** Sea  $B = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$  base del subespacio  $W$  del espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^4$ . Calcula la ecuación implícita de  $W$  y una base ortonormal de  $W$ .

Solución:

Obtendremos en primer lugar la ec. implícita de  $W$ .  $(x, y, z, t) \in W$  si y sólo si  $(x, y, z, t)$  es combinación lineal de los vectores de la base  $B$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & t-z \end{array} \right] \quad \text{compatible} \Leftrightarrow t-z=0$$

Por tanto la ecuación implícita de  $W$  es  $z-t=0$

La forma implícita también se podría haber obtenido resolviendo el SLH con matriz de coeficientes  $P_B^t$ , siendo  $P_B$  la matriz cuyas columnas son los vectores de la base  $B$ . Obtendríamos la solución  $(0, 0, 1, -1)$ , y esa solución es fila de la matriz de coeficientes de la forma implícita de  $W$ , por tanto  $z-t=0$ .

Seguidamente pasamos a determinar una base ortonormal. En este caso es sencillo, ya que de la expresión general de los vectores de  $W$  como  $(x, y, z, z)$  la base inmediata que se deduce es directamente ortogonal.

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 0) \quad \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$$

La base ortonormal es:  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)\}$

**Ejemplo 2.9.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^4$  se considera el subespacio  $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$ . Calcula una base ortonormal de  $S$ .

Solución:

$S$  tiene 4 variables y una ecuación implícita por tanto  $\dim S = 3$ . De la forma implícita se deduce la forma paramétrica  $(z + t, y, z, t)$ , y a partir de esta vemos que la base más sencilla que se obtendría es:

$$B = \{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$$

Los vectores primero y segundo o primero y tercero son conjunto ortogonal, pero no los tres. Tomaremos los dos primeros, y para calcular el tercer vector  $(z + t, y, z, t)$  impondremos la ortogonalidad a los dos primeros:

$$\begin{cases} (z + t, y, z, t) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ (z + t, y, z, t) \cdot (1, 0, 1, 0) = 0 & \Rightarrow z + t + z = 0 \Rightarrow 2z + t = 0 \Rightarrow t = -2z \end{cases}$$

Por tanto  $(z + t, y, z, t)$  pasa a ser  $(-z, 0, z, -2z)$ , y el tercer vector ortogonal más sencillo es:  $(-1, 0, 1, -2)$

Comprobaciones:

$$\begin{aligned} (0, 1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1, 0) &= 0 \\ (0, 1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 1, -2) &= 0 \\ (1, 0, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1, -2) &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Base ortonormal: 
$$B = \{(0, 1, 0, 0), \frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1, 0, 1, -2)}{\sqrt{6}}\}$$

Otro procedimiento para calcular el tercer vector consiste en resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es la de  $S$  y las otras dos las de las condiciones de ortogonalidad a  $\vec{v}_1 = (0, 1, 0, 0)$  y a  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$ .

**Ejemplo 2.10.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^5$  se considera el subespacio  $S = \{(x, y, z, t, r) \in \mathbb{R}^5 / x - z - t + r = 0\}$ . Calcula una base ortonormal de  $S$ .

Solución:

$S$  tiene 5 variables y una ecuación implícita por tanto  $\dim S = 4$ . De la forma implícita se deduce la forma paramétrica  $(z + t - r, y, z, t, r)$ , y a partir de ésta vemos que la base más sencilla que se obtendría es:

$$B = \{(0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\}$$

Los vectores primero y segundo o primero y tercero son conjunto ortogonal, pero no los cuatro. Tomaremos los dos primeros, y para calcular los otros dos vectores  $(z + t - r, y, z, t, r)$  impondremos la ortogonalidad a los dos primeros:

$$\begin{cases} (z + t - r, y, z, t, r) \cdot (0, 1, 0, 0, 0) = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ (z + t - r, y, z, t, r) \cdot (1, 0, 1, 0, 0) = 0 & \Rightarrow z + t - r + z = 0 \Rightarrow 2z + t - r = 0 \Rightarrow r = 2z + t \end{cases}$$

Por tanto  $(z + t - r, y, z, t, r)$  pasa a ser  $(z + t - 2z - t, 0, z, t, 2z + t) = (-z, 0, z, t, 2z + t)$ .

Los vectores l.i. entre sí más sencillos que salen son  $(-1, 0, 1, 0, 2)$  y  $(0, 0, 0, 1, 1)$ . Ambos son ortogonales a  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , pero no son ortogonales entre sí. Por tanto tomamos  $\vec{v}_3 = (0, 0, 0, 1, 1)$ , por ser el más sencillo, y buscamos un vector de la forma  $(-z, 0, z, t, 2z + t)$  que sea ortogonal a  $\vec{v}_3$ .

$$\{(-z, 0, z, t, 2z + t) \cdot (0, 0, 0, 1, 1) = 0 \Rightarrow t + 2z + t = 0 \Rightarrow 2z + 2t = 0 \Rightarrow t = -z\}$$

Por tanto la forma paramétrica  $(-z, 0, z, t, 2z + t)$  (familia de vectores de  $S$  ortogonales a  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ ), pasa a ser  $(-z, 0, z, -z, z)$  (familia de vectores de  $S$  ortogonales a  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  y  $\vec{v}_3$ ), y el vector más sencillo que obtenemos es:  $\vec{v}_4 = (-1, 0, 1, -1, 1)$

Comprobaciones:

$$\begin{array}{ll} (0, 1, 0, 0, 0) \cdot (1, 0, 1, 0, 0) = 0 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ (0, 1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 1, 1) = 0 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \\ (1, 0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 1, 1) = 0 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \\ (-1, 0, 1, -1, 1) \cdot (0, 1, 0, 0, 0) = 0 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 \\ (-1, 0, 1, -1, 1) \cdot (1, 0, 1, 0, 0) = 0 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2 \\ (-1, 0, 1, -1, 1) \cdot (0, 0, 0, 1, 1) = 0 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_3 \end{array}$$

Base ortonormal:  $B = \{(0, 1, 0, 0, 0), \frac{(1, 0, 1, 0, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(0, 0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1, 0, 1, -1, 1)}{2}\}$

**Ejemplo 2.11.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^4$  se considera el subespacio  $F$  de forma implícita:  $\begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ .

Calcula una base ortonormal de  $F$ .

Solución:

$S$  tiene 4 variables y dos ecuaciones implícitas independientes por tanto  $\dim F = 2$ . De las ecuaciones se deduce la siguiente forma paramétrica:  $(2y - t, y, -y, t)$ . La base más sencilla que resulta es  $\{(2, 1, -1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ , que no es ortogonal.

Para obtener una base ortogonal tomamos  $\vec{v}_1 = (-1, 0, 0, 1)$ , que es el más sencillo de los dos, y resolvemos el sistema de tres ecuaciones siguiente (dos de  $F$  y la otra es la condición de ortogonalidad a  $\vec{v}_1$ ).

$$\begin{cases} x - 2y & + t = 0 \\ & y + z & = 0 \\ -x & & + t = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = t; y = t; z = -t$ , por tanto el segundo vector es  $\vec{v}_2 = (1, 1, -1, 1)$

Sólo queda normalizar la base:  $B = \left\{ \frac{(-1, 0, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1, 1, -1, 1)}{2} \right\}$

## 2.10 Subespacios vectoriales ortogonales

Consideremos el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^n$ .

Se dice que  $\vec{z}$  es **ortogonal a un subespacio**  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  si  $\vec{z}$  es ortogonal a todo vector  $\vec{w} \in W$ .

**TEOREMA.**  $\vec{z}$  es ortogonal al subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $\vec{z}$  es ortogonal a una base de  $W$ .

Se dice que el subespacio  $H$  es ortogonal a  $W$  si  $\forall \vec{z} \in H$ ,  $\vec{z}$  es ortogonal a  $W$ .

**TEOREMA.**  $H$  es ortogonal al subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si los vectores de una base de  $H$  son ortogonales a los de una base de  $W$ .

Si  $H$  es ortogonal a  $W$ ,  $W$  es a su vez ortogonal a  $H$  (por la simetría del producto escalar), y se dice de  $W$  y  $H$  que son **subespacios de  $\mathbb{R}^n$  ortogonales** entre sí.

**Ejemplo 2.12.** En el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$ , considera las rectas  $\mathbf{r} = \langle (1, a, 2) \rangle$  y  $\mathbf{s} = \langle (1, -2, 0) \rangle$ . Determina el o los valores de  $a$  tales que  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  sean subespacios ortogonales.

Sol:

Las bases de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  son respectivamente  $\{(1, a, 2)\}$  y  $\{(1, -2, 0)\}$ .

El producto escalar de los dos vectores es  $1 - 2a$ , por tanto las rectas son ortogonales si y solo si  $a = 1/2$ .

La recta  $\mathbf{r}$  es la siguiente:  $\langle (1, 1/2, 2) \rangle$ .

**TEOREMA.** La suma de dos subespacios  $H$  y  $W$  ortogonales entre sí es suma directa.

En efecto todo par de vectores  $\vec{z}$ ,  $\vec{w}$  no nulos, cada uno perteneciente a un subespacio, es un conjunto linealmente independiente, por ser los vectores ortogonales entre sí, y ello garantiza que la suma es directa.

En relación con el **Tema 5**, se tiene el siguiente resultado sobre los subespacios propios de los endomorfismos:

**TEOREMA.** En una matriz  $A$  simétrica de orden  $n$ , los subespacios propios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí respecto del producto escalar canónico en  $\mathbb{R}^n$ .

Veamos la demostración:

Consideremos el producto  $\vec{x}^t A \vec{y}$  siendo  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  autovectores de  $A$  correspondientes a los autovalores distintos  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente.

$$\vec{x}^t A \vec{y} = \vec{x}^t \mu \vec{y} = \mu \vec{x}^t \vec{y} \quad [1]$$

Por otra parte, por ser  $A$  simétrica ( $A = A^t$ ):

$$\vec{x}^t A \vec{y} = \vec{x}^t A^t \vec{y} = (A \vec{x})^t \vec{y} = (\lambda \vec{x})^t \vec{y} = \lambda \vec{x}^t \vec{y} \quad [2]$$

Igualando los dos últimos términos de [1] y [2] obtenemos:

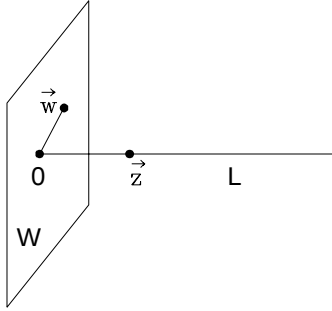
$$\mu \vec{x}^t \vec{y} = \lambda \vec{x}^t \vec{y} \Rightarrow (\lambda - \mu) \vec{x}^t \vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{x}^t \vec{y} = 0 \text{ (pues } \lambda - \mu \neq 0 \text{ por hipótesis).}$$

Se obtiene por tanto que para los autovectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ , correspondientes a autovalores distintos,  $\vec{x}^t \vec{y} = 0$ , y que por tanto son ortogonales respecto del producto escalar canónico.

## 2.11 Complemento ortogonal de un subespacio

El conjunto de todos los vectores  $\vec{z}$  que son ortogonales a  $W$  se denomina **complemento ortogonal** de  $W$  y se denota como  $W^\perp$ .

**Ejemplo 2.13.** Consideremos en el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$  el subespacio  $W$  identificado con un plano que contiene el origen y el subespacio  $L$  identificado con la recta que pasa por el origen y perpendicular al plano anterior. Se tiene entonces que  $\forall \vec{z} \in L$  y  $\forall \vec{w} \in W$ ,  $\vec{z} \cdot \vec{w} = 0$ . Ver la figura. En efecto,  $L$  está formado por **todos** los vectores que son ortogonales a los  $\vec{w}$  de  $W$  y recíprocamente  $W$  está formado por **todos** los vectores ortogonales a los  $\vec{z}$  de  $L$ . Es decir,  $L = W^\perp$  y  $W = L^\perp$ .



Tomemos por ejemplo el caso de  $W = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ .

Los vectores ortogonales a  $W$  serán los  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ortogonales a la base de  $W$ , es decir, tales que:

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Por tanto } W^\perp = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

**TEOREMA.** Se cumplen los siguientes resultados sobre  $W^\perp$ , siendo  $W$  un subespacio del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ .

1.  $W^\perp$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$
2.  $(W^\perp)^\perp = W$
3.  $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$

OBSERVACIÓN:

Todo subespacio  $W \subset \mathbb{R}^n$  (salvo el  $\vec{0}$  y el propio  $\mathbb{R}^n$ ) admite infinitos subespacios complementarios, pero solo uno de ellos es complemento ortogonal respecto al producto escalar que se haya adoptado.

Por ejemplo, en el espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$ , cualquier recta pasando por el origen y no incluida en el plano  $XY$  es subespacio complementario del subespacio formado por el plano  $XY$ , pero el complemento ortogonal del plano  $XY$  es un subespacio único, que es la recta que define el eje  $Z$ .

Nótese en el ejemplo anterior que para obtener los vectores ortogonales a  $(a, b, c)$  en  $\mathbb{R}^3$  hay que resolver la ec.  $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$ , es decir, la ec. lineal homogénea  $ax + by + cz = 0$ .

Si  $ax + by + cz = 0$  es la forma implícita de un subespacio bidimensional  $F$  de  $\mathbb{R}^3$ , dicha forma expresa que los vectores  $(x, y, z)$  de  $F$  y los vectores  $\langle (a, b, c) \rangle^1$  son ortogonales entre sí, y que por tanto  $F$  y  $\langle (a, b, c) \rangle$  son complementos ortogonales.  $F^\perp = \langle (a, b, c) \rangle$ .

### Complemento ortogonal de un subespacio $W$ dado en implícitas: $A\vec{x} = \vec{0}$

De forma más general, para un subespacio  $W$  de dimensión  $d$  de  $\mathbb{R}^n$ , su forma implícita  $A_{n-d} \vec{x} = \vec{0}$  expresa que los  $\vec{x} \in W$ , que son las soluciones y por tanto  $\text{Nul}A$ , son ortogonales a las filas de  $A$ .

La base de  $W$  la forman las  $d$  soluciones independientes del SLH, o lo que es lo mismo la base de  $\text{Nul}A$ .

La base de  $W^\perp$  la forman las filas de  $A$ .

Por ejemplo, para el subespacio  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 0\}$

$B = \{(-3, 2)\}$  es base de  $W$ , porque  $(-3, 2)$  es solución de la ecuación implícita.

$B = \{(2, 3)\}$  es base de  $W^\perp$ .

Es importante darse cuenta de que el “vector que aparece” en la ecuación, en este caso  $(2, 3)$ , es precisamente el ortogonal, y por tanto no perteneciente al subespacio que define la ecuación.

### Complemento ortogonal de un subespacio $W$ con base $B$ conocida

Si partimos de un subespacio  $W$  de dimensión  $d$  del cual conocemos una base  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d\}$ , tomando  $P_B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_d]$  se tiene que la base de  $W^\perp$  son las soluciones independientes del SLH  $P_B^t \vec{x} = \vec{0}$ , o lo que es lo mismo la base de  $\text{Nul}(P_B^t)$ .

Por ejemplo partiendo de  $W = \langle (1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0) \rangle$ ,  $W^\perp$  son las soluciones del SLH  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ .

$$P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$W^\perp = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ . La matriz tiene rango 2, por tanto el SL tiene dos parámetros libres y la base de  $W^\perp$  tendrá dos vectores. Un ejemplo de base es  $B = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .

Nótese (enlazando con el Tema 3 y con el apartado de arriba) que la base obtenida, puesta por filas, produce la matriz de coeficientes de la forma implícita de  $W$ .

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_3 = 0, x_4 = 0\}$$

<sup>1</sup>Si  $(a, b, c)$  cumple la ecuación también la cumple todo múltiplo de  $(a, b, c)$

**Ejemplo 2.14.** Sea  $\{(3, 2, 2, 4), (1, 0, 0, 2), (1, -1, -1, 1)\}$  un sistema generador de  $F$ , subespacio vectorial del espacio euclídeo canónico  $\mathbb{R}^4$ . Halla una base del complemento ortogonal de  $F$ .

Sol:

Los vectores ortogonales a los dados serán los  $(x, y, z, t)$  que cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (3, 2, 2, 4) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, 0, 0, 2) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, -1, -1, 1) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{forma impl. de } F^\perp: \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 4t = 0 \\ x + 2t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Las 3 ecuaciones anteriores forman un SLH por lo que ya estamos viendo que  $F^\perp$  es un subespacio vectorial. Para obtener la base de  $F^\perp$  hay que resolver el sistema.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tenemos 3 ecuaciones, rango 3, y 4 incógnitas. Por tanto tenemos  $4 - 3 = 1$  parámetro libre. Tomando  $z$  como parámetro libre deducimos:

$$\begin{aligned} -4t &= 0 \Rightarrow \boxed{t=0} \\ y + z + t &= 0 \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow \boxed{y=-z} \\ x &= -2t \Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

El vector solución es de la forma  $(x, y, z, t) = (0, -z, z, 0) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los tres dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es:  $\{(0, -1, 1, 0)\}$

Nótese que aunque en el enunciado  $F$  viene dado por un sistema generador, ese sistema es base, ya que al resolver las implícitas de  $F^\perp$  se encontró rango 3.

Nótese también que  $0x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 = 0$ , o lo que es lo mismo,  $-x_2 + x_3 = 0$  es la ecuación implícita de  $F$ .

**Ejemplo 2.15.** Se considera el espacio vectorial euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$  y en él los siguientes subespacios vectoriales:  $W_1 = \langle (1, 1, 0), (0, 3, 6) \rangle$ ,  $W_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$  y  $W_3 = \langle (7, 8, 5), (6, 3, 1), (1, 3, 6) \rangle$ . Halla una base de cada uno de los subespacios ortogonales correspondientes,  $W_1^\perp$ ,  $W_2^\perp$ ,  $W_3^\perp$ .

Sol:

a)  $W_1^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ es ortogonal a } (1, 1, 0) \text{ y a } (0, 3, 6)\}$

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 0) = x + y = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (0, 3, 6) = 3y + 6z = 0$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema se encuentra ya en la forma escalonada. Tomamos  $z$  como parámetro libre.

$$3y + 6z = 0 \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$$

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x = 2z$$

El vector solución es de la forma  $(x, y, z) = (2z, -2z, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los dos dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es  $\{(2, -2, 1)\}$

$W_1^\perp$  se expresaría como  $W_1^\perp = \langle (2, -2, 1) \rangle$

NOTA: Se puede obtener  $W_1^\perp = \langle \vec{n} \rangle$ , siendo  $\vec{n} = (1, 1, 0) \times (0, 3, 6)$  (**producto vectorial**).

b)  $W_2^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ es ortogonal a } (1, 2, 1)\}$

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = x + 2y + z = 0$$

La última ecuación es la ecuación implícita de  $W_2^\perp$

Tenemos una sola ecuación y tres incógnitas, por tanto dos parámetros libres. Dejando como parámetros libres  $y$  y  $z$  tendremos

$$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x = -2y - z \quad y = y, \quad z = z$$

El vector solución en forma paramétrica es  $(x, y, z) = (-2y - z, y, z) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales al dado es un subespacio vectorial de dimensión 2. Una posible base es:  $\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ .

$W_2^\perp = \langle (-2, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$

c)  $W_3^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ es ortogonal a } (7, 8, 5), (6, 3, 1) \text{ y } (1, 3, 6)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & | & 0 \\ 6 & 3 & 1 & | & 0 \\ 7 & 8 & 5 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 100$$

$\det A \neq 0$ , por tanto tenemos un sistema de Cramer, con solución única, y como el sistema es homogéneo, la solución única es la trivial.

Por tanto  $W_3^\perp = \{(0, 0, 0)\}$ .

$W_3$  representa todo el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , por lo que era de esperar que  $W_3^\perp = \{\vec{0}\}$ .

Habíamos visto anteriormente como  $\vec{0}$  es ortogonal a todos los vectores.

**Ejemplo 2.16.** Se considera el espacio vectorial euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$  y el subespacio vectorial  $W$  dado por  $2x + y - z = 0$ . Determina una base de  $W^\perp$ .

Sol:

Podemos interpretar la ecuación  $2x + y - z = 0$  como la expresión del producto escalar de dos vectores, igualado a cero, siendo los vectores  $(2, 1, -1)$  y  $(x, y, z)$ . Los vectores  $(x, y, z)$  contenidos en el plano que representa el subespacio vectorial  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  son los vectores ortogonales al vector  $(2, 1, -1)$ , y obviamente a los múltiplos de éste.

En efecto si  $(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow \lambda(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0$

Por tanto  $W^\perp = \langle (2, 1, -1) \rangle$ , y una posible base  $B = \{(2, 1, -1)\}$ ,

**Ejemplo 2.17.** Se considera el espacio vectorial euclídeo canónico  $\mathbb{R}^3$  y el subespacio vectorial  $W$  dado por la forma implícita siguiente: 
$$\begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} .$$
 Determina una base de  $W^\perp$ .

Sol:

Las ecuaciones implícitas expresan que los vectores  $(x, y, z)$  de  $W$  son a la vez ortogonales al vector  $(1, 4, 8)$  y al vector  $(1, -1, 1)$ , por tanto una base de  $W^\perp$  es  $\{(1, 4, 8), (1, -1, 1)\}$ .

**Ejemplo 2.18.** Obtén una base del complemento ortogonal de

$$W = \langle (-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2), (3, 1, -1, -1) \rangle.$$

Sol.:

Los vectores ortogonales a los dados serán los  $(x, y, z, t)$  que cumplan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (-1, 0, 0, 1) \cdot (x, y, z, t) = 0 \\ (4, 1, -1, -2) \cdot (x, y, z, t) = 0 \\ (3, 1, -1, -1) \cdot (x, y, z, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + t = 0 \\ 4x + y - z - 2t = 0 \\ 3x + y - z - t = 0 \end{cases}$$

Las 3 ecuaciones anteriores son las ecuaciones implícitas de  $W^\perp$ .

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tenemos en realidad dos ecuaciones, por tanto  $\dim W^\perp = 4 - 2 = 2$  (dos parámetros libres).

La base se obtiene resolviendo el sistema:

$$x = t \quad y = z - 2t \quad z \text{ y } t \text{ parámetros libres.}$$

Por tanto la forma paramétrica de los vectores de  $W^\perp$  es  $(t, z - 2t, z, t)$  y la base más sencilla:  $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$

**Ejemplo 2.19.** Considerado en  $\mathbb{R}^4$  el subespacio  $W$  de ecuaciones implícitas:  $\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$ , una base ortonormal del complemento ortogonal de  $W$  es:

Sol.:

Los coeficientes de las ecuaciones de  $W$  son la base de  $W^\perp$ ,  $B = \{(-1, 0, 0, 1), (-2, -1, 1, 0)\}$ . La base no es ortonormal. Para calcular la base ortonormal tomamos el primer vector de  $B$  y determinamos el segundo imponiendo la pertenencia a  $W^\perp$  y la ortogonalidad al anterior.

Obtenemos la forma implícita y forma paramétrica de  $W^\perp$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc} -1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & t \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc} -1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -2 & x + t \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc} -1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & y + z \\ 0 & 0 & x - 2y + t \end{array} \right]$$

Las ecuaciones impl. de  $W^\perp$  son:  $y + z = 0, x - 2y + t = 0$  y la forma paramétrica:  $(-2z - t, -z, z, t)$ .

La condición de ortogonalidad al primer vector añade:  $-x + t = 0$ .

Sustituyendo la igualdad anterior en la expresión paramétrica obtenemos  $2z + t + t = 0$ , por tanto  $t = -z$ . La expresión paramétrica queda entonces en función de un único parámetro:  $(-z, -z, z, -z)$  y la base ortonormal será:

$$B = \{(-1, 0, 0, 1)/\sqrt{2}, (1, 1, -1, 1)/2\}$$