

1.15 Semejante triangular

En el caso de matrices A en las que el polinomio característico tenga todas las raíces reales, y existan por tanto n autovalores propios contando multiplicidades, pero no se cumpla la condición de diagonalización, por existir un autovalor múltiple con dimensión geométrica menor que su dimensión algebraica, podemos obtener todavía una semejante sencilla, concretamente una semejante triangular superior T .

Se puede por tanto obtener la factorización $A = PTP^{-1}$ con T triangular superior y P invertible.

No presentaremos en este manual la demostración de este resultado, ni los procedimientos de obtención de la matriz T y de la base a la que ésta está referida.

Por ser T triangular los autovalores de T son los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} - \lambda & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (t_{11} - \lambda)(t_{22} - \lambda)\dots(t_{nn} - \lambda) = 0$$

Por tanto:
$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}$$

La traza de T es entonces la suma de los autovalores y el determinante de T el producto de los autovalores (por ser triangular), y por ser la traza y el determinante invariantes entre matrices semejantes, se tiene que la traza de A será también igual a la suma de los autovalores y el determinante de A también igual al producto de los autovalores.

En los Teoremas 8 y 9 vimos que para A diagonalizable $|A|$ era el producto de los autovalores y $\text{tr}A$ la suma de los autovalores. Ahora vemos que esa propiedad se aplica no solo a A diagonalizable sino a toda matriz A con n autovalores contando multiplicidades, o lo que es lo mismo, con todas las raíces del polinomio característico reales.

Resumen

- Si A tiene n autovalores contando multiplicidades, o lo que es lo mismo, todas las raíces de su polinomio característico son reales, entonces:

$$\det A = \lambda_1^{p_{\lambda_1}} \times \lambda_2^{p_{\lambda_2}} \times \dots \times \lambda_r^{p_{\lambda_r}} \quad \text{tr} A = \sum_{i=1}^r p_{\lambda_i} \lambda_i,$$

, siendo λ_i los r autovalores distintos y p_{λ_i} sus respectivas multiplicidades.

- En la hipótesis anterior, y si además las multiplicidades geométricas coinciden con las multiplicidades algebraicas:

La matriz semejante más sencilla es una matriz diagonal y la base a la que está referida es una base de autovectores en el mismo orden.

- En la hipótesis anterior, y si alguna de las multiplicidades geométricas no coincide con la multiplicidad algebraica:

La matriz semejante más sencilla es una matriz triangular superior, no diagonal, llamada **forma de Jordan** de A .