Tema 5. Endomorfismos: autovalores, autovectores y diagonalización

Ruth Carballo Fidalgo
Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria
carballor@unican.es

30 de Abril 2019

Contenidos

Lección 1

Endomorfismos: autovalores, autovectores, diagonalización

Consideraremos en este capítulo únicamente endomorfismos $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, siendo $\mathbb{R}^n$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

1.1 Valores y vectores propios

Definición 1.1. *Se dice que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es* **autovalor o valor propio** *del endomorfismo* f *en* $\mathbb{R}^n$ *si existe* $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$*.*

Definición 1.2. *Sea* f *un endomorfismo en* $\mathbb{R}^n$ *con autovalor* λ*. Los vectores* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *tales que* $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ *se denominan* **vectores propios o autovectores** *de* f *correspondientes al autovalor* λ*.*

λ puede ser nulo

Si $\vec{x} = \vec{0} \quad \forall\lambda$ se cumple que $f(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$, por eso para aceptar λ como autovalor debe existir $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Teniendo en cuenta que a f le corresponde una matriz estándar asociada A, nos referiremos indistintamente a los autovalores de f o de A y a los autovectores de f o de A.

Ejemplo 1.1. *Sea la aplicación lineal* $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, *sobre* $\mathbb{R}$, *cuya matriz asociada es* $A = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$. *Determina si los vectores* $\vec{u} = (2,1)$ *y* $\vec{v} = (3,2)$ *son vectores propios de* A. *En caso afirmativo da el valor del autovalor asociado.*

Sol:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ *es vector propio porque* $A\vec{u} = 1\vec{u}$
el autovalor asociado es $\lambda = 1$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$ *es vector propio porque* $A\vec{v} = -2\vec{v}$
el autovalor asociado es $\lambda = -2$

Ejemplo 1.2. *Sea la aplicación lineal* $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, *cuya matriz asociada es* $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. *Determina si los vectores* $\vec{u} = (6,-5)$ *y* $\vec{v} = (3,-2)$ *son vectores propios de* A.

Sol:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ *es vector propio porque* $A\vec{u} = -4\vec{u}$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$ *no es vector propio porque no existe* s *tal que* $A\vec{v} = s\vec{v}$, *o lo que es lo mismo,* $(-9,11)$ *no es múltiplo de* $(3,-2)$.

Ejemplo 1.3. *Consideremos el endomorfismo identidad id:* $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$. *Sabemos que su matriz asociada es la identidad.*

$id(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$

La aplicación tiene un único valor propio, que es 1. *Todos los vectores de* $\mathbb{R}^n$ *son autovectores correspondientes a ese autovalor.*

Ejemplo 1.4. *Consideremos la aplicación lineal* $f\colon \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *cuya matriz asociada es la matriz* λI_n *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(\vec{x}) = \lambda I\vec{x} = \lambda\vec{x}$

La aplicación tiene un único valor propio, que es λ. *Todos los vectores de* $\mathbb{R}^n$ *son autovectores correspondientes a ese autovalor.*

Esta transformación lineal es el "Escalamiento" con factor λ.

1.2 Obtención de los valores propios. Ecuación característica

Teorema 1.1. *Sea el endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ y A_n su matriz asociada respecto de la base estándar. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I) < n$.*

Demostración: λ valor propio si $\exists\ \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$, siendo I la matriz identidad de orden n, o lo que es lo mismo, si $\exists\ \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Por tanto λ es valor propio $\Leftrightarrow$ el SL $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ es indeterminado $\Leftrightarrow$ rg $(A - \lambda I) < n \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$ $\square$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se denomina **ecuación característica** de f, o de A. Desarrollando la ecuación se obtiene que $|A - \lambda I|$ es un polinomio de grado n en λ, y por tanto los valores de λ para los que se verifica la ecuación característica son las raíces de este polinomio.

Al polinomio $|A - \lambda I|$ se le denomina polinomio característico de f o (de A), y se denota como $p(\lambda)$.

De acuerdo con el **Teorema Fundamental del Álgebra**, todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales tiene exactamente n raíces reales o complejas (contando multiplicidades). Denotamos la multiplicidad de la raíz λ como p_λ.

Por simplicidad se utilizará en general el determinante $|A - \lambda I|$, que obviamente tiene las mismas raíces que el polinomio característico.

El polinomio $(\lambda - 1)^5$ tiene 5 raíces, todas iguales a 1. Decimos que tiene raíz 1 con multiplicidad 5.

El polinomio $\lambda^2 + 1$ tiene dos raíces complejas, $+i$ y $-i$. (Las raíces complejas siempre forman pares conjugados).

El polinomio $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$ tiene dos raíces complejas, i y $-i$ y dos raíces reales 1 y -1, ambas simples. Se podría escribir cómo $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$.

El polinomio $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2(\lambda + 6)^3(\lambda - i)(\lambda + i)$ tiene las siguientes raíces distintas: -1 de multiplicidad 1, 1 de multiplicidad 2, -6 de multiplicidad 3, i de multiplicidad 1, y $-i$ de multiplicidad 1.

El polinomio característico de A, $p(\lambda)$, de grado n, tendrá n raíces. Las raíces reales del polinomio son los valores propios del endomorfismo f, también designados como valores propios de A. La **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i se define como su **multiplicidad como raíz** del polinomio característico, que habíamos denotado como p_{λ_i}. Al limitarnos a endomorfismos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, y no al espacio $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$, las raíces complejas de $p(\lambda)$ no pueden considerarse como valores propios de A.

Suponiendo <u>s raíces distintas</u>, incluyendo reales y complejas:

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_{\lambda_1}}(\lambda - \lambda_2)^{p_{\lambda_2}} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_{\lambda_s}}$

$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_s} = n$

Si <u>r es el número de raíces reales y distintas</u>, $r \leq s$, entonces tenemos r autovalores distintos, y:

$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_r} < n \Leftrightarrow$ existen raíces complejas

$p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \dots + p_{\lambda_r} = n \Leftrightarrow$ todas las raíces son reales

Si $p(\lambda)$ tiene las n raíces reales y distintas (por tanto todas de multiplicidad algebraica 1), entonces el endomorfismo tiene n autovalores distintos, y:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

<u>**Resumen:**</u> Los valores propios son las raíces reales del polinomio $|A-\lambda I|$, o lo que es lo mismo, las soluciones reales de la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$.

Ejemplo 1.5. *¿Es 5 un valor propio de* $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ *?*

<u>Sol:</u>

5 es autovalor de $A \Leftrightarrow$ *5 es solución de la ecuación* $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |A - 5\ I| = 0$

$|A - 5I| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -30$, *por tanto 5 no es autovalor.*

Ejemplo 1.6. *a) Averigua si* $\lambda = 4$ *es autovalor de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) Determina el valor de c *para que* $\lambda = 4$ *sea autovalor de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & c \end{bmatrix}$

<u>Sol:</u>

a) $|A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 4$ *no es autovalor.*

b) $|A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & c-4 \end{vmatrix} = -3c + 12 - 8 = -3c + 4 = 0 \Rightarrow c = 4/3.$

Ejemplo 1.7. *Encuentra los valores propios de* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ *y un autovector distinto de* $\vec{0}$ *correspondiente a cada uno de los autovalores encontrados.*

$$|A - sI| = \begin{vmatrix} 2-s & 3 \\ 3 & -6-s \end{vmatrix} = (2-s)(-6-s) - 9 = s^2 + 4s - 21$$

Los autovalores, que son las raíces reales del polinomio anterior, son $s = -7$ *y* $s = 3$.

<u>*Autovector para* $s = -7$</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = -7x \\ 3x - 6y = -7y \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x + 3y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \quad [1] \ \Rightarrow \ y = -3x$$

$(1, -3)$ *es autovector correspondiente al autovalor* -7

Comprobación: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Por el mismo procedimiento se puede calcular un vector propio asociado a $\lambda = 3$

<u>*Procedimiento más directo:*</u>

Los autovectores son las soluciones de $A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$, *es decir, del sistema homogéneo* $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

La matriz de coeficientes $(A - \lambda I)$ *para este ejemplo y* $\lambda = -7$ *es:*

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+7 & 3 \\ 3 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

que es precisamente la matriz del SL [1] de arriba.

Los autovectores se obtienen resolviendo el SL $\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Ejemplo 1.8. *Encuentra la ecuación característica de* $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$

Por ser $A - \lambda I$ *una matriz triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.*

Ejemplo 1.9. *El polinomio característico de una matriz* 6×6 *es* $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$. *Encuentra los valores propios y su multiplicidad algebraica.*

$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda - 12)\lambda^4$

Tenemos la raíz $\lambda = 0$ *con multiplicidad 4 y las raíces de* $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. *Éstas últimas son* $\lambda = -2$ *y* $\lambda = 6$, *ambas simples.*

Ejemplo 1.10. *Dado el endomorfismo con matriz asociada* $A = \begin{bmatrix} -5 & 9 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, *obtén los autovalores y sus multiplicidades algebraicas.*

Sol:

Desarrollando $\mid A - \lambda I \mid = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 9 & 7 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0-\lambda \end{vmatrix}$ *por cofactores de la tercera fila tenemos:*

$$\mid A - \lambda I \mid = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 9 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\ (-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)\ (-\lambda)\ ((-5-\lambda)(1-\lambda)+9) = (2-\lambda)\ (-\lambda)\ (-5+5\lambda-\lambda+\lambda^2+9) =$$

$$(\lambda^2+4\lambda+4)(2-\lambda)(-\lambda) = (\lambda+2)^2(2-\lambda)(-\lambda)$$

Los autovalores son $\lambda = -2$ *con multiplicidad 2,* $\lambda = 2$ *con multiplicidad 1, y* $\lambda = 0$ *con multiplicidad 1.*

1.3 Subespacio propio

El conjunto de todos los vectores propios de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ correspondientes a un autovalor λ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, denotado como V_λ, y denominado subespacio propio correspondiente al autovalor λ. En efecto, considerando la matriz estándar A asociada a f, tenemos:

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \ = \ \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\} \ = \ \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$$

Vemos a continuación la definición formal de los subespacios propios de un endomorfismo o de su matriz estándar asociada A.

Definición 1.3. *Sea f endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ con matriz estándar asociada A y sea λ_i un autovalor de f. Al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n/(A-\lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}\}$ se le denomina* **subespacio propio correspondiente al valor propio** λ_i. *Se denota como V_{λ_i}.*

$$V_{\lambda_i} = \mathrm{Nul}(A - \lambda_i I)$$

Observaciones:

1) $\dim V_\lambda \geq 1$ ya que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ tiene soluciones de $\vec{x}$ no nulas.

2) Sabemos que V_λ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, al ser su forma implícita la de un SLH. Presentamos no obstante a continuación la demostración independiente de que V_λ cumple los tres axiomas de los subespacios.

- V_λ contiene el vector $\vec{0}$ pues $f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$.
- El producto por un escalar es cerrado, pues $\vec{x} \in V_\lambda \Rightarrow \alpha\ \vec{x} \in V_\lambda$
  $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, entonces $f(\alpha\ \vec{x}) = \alpha\ f(\vec{x}) = \alpha\ \lambda\vec{x} = \lambda\ \alpha\vec{x}$, por tanto $\alpha\vec{x} \in V_\lambda$
- La suma es cerrada: $\vec{x}, \vec{x'} \in V_\lambda \Rightarrow \vec{x} + \vec{x'} \in V_\lambda$

  $$f(\vec{x} + \vec{x'}) = f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{x'} = \lambda(\vec{x} + \vec{x'})$$

Como consecuencia de que la suma sea cerrada y el producto por un escalar también, se tiene que toda combinación lineal de autovectores de un valor propio λ de A es también autovector de ese valor propio.

1.4 Dimensión del subespacio propio

V_λ es el conjunto de soluciones del sistema lineal con matriz ampliada $[\ A - \lambda I \mid \vec{0}\ ]$, por tanto:

dim $V_\lambda = n^{\underline{o}}$ de parámetros libres $= n^{\underline{o}}$ de columnas no pivotales de la matriz $[\ A - \lambda I\ ]$

$$\boxed{\dim V_\lambda = n - \text{rango}\ (A - \lambda I)}$$

Por ser λ autovalor rg $(A - \lambda I) < n$ por tanto: $\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq n}$

dim $V_\lambda = n$ cuando rg$(A - \lambda I)$=0, es decir si $A - \lambda I$ es la matriz nula, o lo que es lo mismo, $A = \lambda I$. En este caso $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, y por tanto $V_\lambda = \mathbb{R}^n$

Teorema 1.2. dimV_λ *es menor o igual que la multiplicidad algebraica del valor propio* λ.[1]

$$\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq p_\lambda \leq n}$$

Se define **multiplicidad geométrica** de un autovalor λ como la dimensión de V_λ.

1.5 Obtención de los subespacios propios

En primer lugar se calculan los valores propios, es decir, las raíces reales de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$.
A continuación:

- Se determina $V_{\lambda_i} = \text{Nul}(A - \lambda_i I)$ para cada valor propio λ_i, que es lo mismo que determinar la solución de cada sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ (un sistema para cada autovalor). La resolución del sistema nos permitirá obtener una base y la dimensión del subespacio propio.
- Es conveniente comprobar que dim V_{λ_i} esté dentro del rango permitido, $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq p_{\lambda_i}$, siendo p_{λ_i} la multiplicidad algebraica de λ_i.

[1] No demostramos este teorema

1.6 La suma directa de los subespacios propios

Teorema 1.3. *La suma de los subespacios propios de un endomorfismos es suma directa. Es decir, si λ_1, λ_2, ..., λ_r son los autovalores distintos del endomorfismo dado por la matriz A, entonces:*

$$\boxed{V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \ \dots \ \bigoplus V_{\lambda_r}}$$

Demostración: Habíamos visto en el Tema 3 que suma directa era equivalente a que todos los conjuntos $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_r\}$ con $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ y $\vec{v}_i \in V_{\lambda_i}$ (un autovector no nulo de cada subespacio propio) fueran linealmente independientes. Demostraremos que efectivamente tales conjuntos son linealmente independientes.

Supongamos que el conjunto es linealmente dependiente, entonces existe un índice mínimo k tal que $\vec{v}_{k+1}$ es combinación lineal de los k anteriores, linealmente independientes, es decir,

$$\vec{v}_{k+1} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k, \qquad \text{con } \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots\ ,\ \vec{v}_k \quad \text{l.i.} \qquad [1]$$

multiplicando por la izquierda por A tenemos:

$$A\ \vec{v}_{k+1} = A\ c_1\vec{v}_1 + A\ c_2\vec{v}_2 + \ldots + A\ c_k\vec{v}_k,$$

$$\lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1} = \lambda_1 c_1\vec{v}_1 + \lambda_2 c_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_k c_k\vec{v}_k \qquad [2]$$

multiplicando la ecuación [1] por λ_{k+1} obtenemos:

$$\lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1} = \lambda_{k+1} c_1\vec{v}_1 + \lambda_{k+1} c_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_{k+1} c_k\vec{v}_k \qquad [3],$$

y restando [3]$-$[2] se obtiene;

$$\vec{0} = (\lambda_{k+1} - \lambda_1)c_1\vec{v}_1 + (\lambda_{k+1} - \lambda_2)c_2\vec{v}_2 + \ldots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)c_k\vec{v}_k$$

Como el conjunto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ es l.i., los coeficientes de la combinación lineal son nulos, es decir:

$$\begin{cases} (\lambda_{k+1} - \lambda_1)c_1 = 0 \\ (\lambda_{k+1} - \lambda_2)c_2 = 0 \\ \qquad \ldots \\ (\lambda_{k+1} - \lambda_k)c_k = 0 \end{cases}$$

Y como hemos supuesto que los λ_i son todos distintos, ninguno de los $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)$ es nulo, por lo que $c_i = 0$ $\forall i = 1, \ldots, k$.

$\Rightarrow \vec{v}_{k+1} = \vec{0}$ (ec. [1]), lo cual es una contradicción puesto que habíamos partido de que todos los $\vec{v}_i$ fueran no nulos.

$\Rightarrow$ El conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ es linealmente independiente.

Queda por tanto demostrado el teorema por reducción al absurdo. $\square$

• Ya que la suma de subespacios no puede ser mayor que el espacio completo tenemos el siguiente resultado obvio:

$$\boxed{V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \ \ldots \ \bigoplus V_{\lambda_r} \subseteq \mathbb{R}^n}$$

• Por ser suma directa los subespacios propios son linealmente independientes entre sí , y la unión de las bases constituye una base del subespacio suma.

$$\boxed{\text{dim}V_{\lambda_1} + \text{dim } V_{\lambda_2} + \ \ldots \ + \text{dim}V_{\lambda_r} = \text{dim } (V_{\lambda_1} \bigoplus \ \ldots \ \bigoplus V_{\lambda_r})}$$

• Recordemos que una de las consecuencias de que la suma de subespacios propios sea directa es que su intersección es el vector $\vec{0}$.

Aunque el Teorema 3 ya garantiza que la intersección es el vector cero, se puede demostrar fácilmente, de forma directa, que la intersección de subespacios propios distintos es el vector cero. En efecto, si $\vec{x}$ pertenece a todos los subespacios propios $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_r}$, entonces $A\vec{x} = \lambda_1\vec{x} = \lambda_2\vec{x} = \ldots = \lambda_r\vec{x}$.

De las igualdades se deduce: $\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x} = \vec{0} \\ (\lambda_1 - \lambda_3)\vec{x} = \vec{0} \\ \qquad ... \\ (\lambda_1 - \lambda_r)\vec{x} = \vec{0} \end{cases}$

Como por hipótesis $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

1.7 Existencia o no de base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f

Teorema 1.4. *Existe base de* $\mathbb{R}^n$ *formada por autovectores de* $f \Leftrightarrow V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \ \ldots \ \bigoplus V_{\lambda_r} = \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ p(\lambda)$ *tiene n raíces reales contando multiplicidades (o lo que es lo mismo, no hay raíces complejas) y* $dimV_{\lambda_i} = p_{\lambda_i}$

Demostración: Existe base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores si y sólo si tenemos n autovectores l.i. es decir, si y sólo si la suma de los subespacios propios es igual a $\mathbb{R}^n$, o lo que es lo mismo, si y sólo si $\text{dim}V_{\lambda_1} + \text{dim}V_{\lambda_2} + ... + \text{dim}V_{\lambda_r} = n$

Sabemos que $\text{dim}V_{\lambda_i} \leq p_{\lambda_i} \quad i = 1, ..., r$, por tanto:

$\text{dim}V_{\lambda_1} + \text{dim}V_{\lambda_2} + ... + \text{dim}V_{\lambda_r} \ \leq \ p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} + \ldots p_{\lambda_r} \ \leq \ n$

Para obtener la dimensión máxima igual a n se debe cumplir $\text{dim}V_{\lambda_i} = p_{\lambda_i} \ \forall i = 1, ..., r$ (para que el primer "menor o igual" sea un "igual") y que todas las raíces sean reales (para que el segundo "menor o igual" sea un "igual"). □

Teorema 1.5. *Si la matriz* A_n *asociada a un endomorfismo* f *en* $\mathbb{R}^n$ *tiene* n *valores propios distintos, entonces en* $\mathbb{R}^n$ *se puede obtener una base cuyos vectores sean todos autovectores de* f.

En efecto, si el polinomio característico de grado n tiene n autovalores distintos, significa que las multiplicidades algebraicas son todas igual a uno. Por tanto los n subespacios V_{λ_i} tienen dimensión 1, y la dimensión de la suma directa será $n \times 1 = n$, existiendo entonces la base de autovectores.

Nótese que este teorema nos da una <u>condición suficiente</u> para que exista base de autovectores, pero <u>no es una condición necesaria</u>.

1.8 Diagonalización

Base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f y matriz asociada a f respecto de esa base

Suponemos un endomorfismo f tal que existe base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f. Sabemos por tanto que todas las raíces de $p(\lambda)$ son reales y que la dimensión de cada subespacio propio es igual a la multiplicidad algebraica de su autovalor asociado.

$B = \{\ \vec{v}_1{}^1\ ,\ ...\ ,\ \vec{v}\,^1_{p_{\lambda_1}}\ ,\ \vec{v}_1{}^2\ ,\ ...\ ,\ \vec{v}\,^2_{p_{\lambda_2}}\ ,\ ....\ ,\ \vec{v}_1{}^r\ ,\ ...\ ,\ \vec{v}\,^r_{p_{\lambda_r}}\ \} = B_1 \bigcup B_2 \ldots \bigcup B_r$, siendo B_i la base de V_{λ_i}, y siendo el número de vectores de $B_i = p_{\lambda_i}$.

$$\begin{cases} f(\vec{v}\,^1_1) = \lambda_1\ \vec{v}^1_1 \\ \quad\vdots \\ f(\vec{v}\,^1_{p_{\lambda_1}}) = \lambda_1\ \vec{v}\,^1_{p_{\lambda_1}} \\ \\ \quad\vdots \\ \\ f(\vec{v}_1{}^r) = \lambda_r\ \vec{v}_1{}^r \\ \quad\vdots \\ f(\vec{v}\,^r_{p_{\lambda_r}}) = \lambda_r\ \vec{v}\,^r_{p_{\lambda_r}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_1 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_r & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix} \\ \leftarrow\ p_{\lambda_1}\ \rightarrow \qquad\qquad \leftarrow\ p_{\lambda_r}\ \rightarrow \end{array}$$

Observamos que la matriz asociada respecto de la base de autovectores es diagonal y que el elemento de la diagonal principal en cada columna es el autovalor correspondiente al autovector de esa columna.

A, que es la matriz asociada a f relativa a la base canónica, y D, relativa a la base de autovectores, son matrices semejantes entre sí , pues se refieren al mismo endomorfismo pero utilizando bases distintas (la misma en el espacio inicial y final). Entre ambas matrices se cumple la relación: $A = P\ D\ P^{-1}$, siendo P la matriz que tiene por columnas la base de autovectores de f.

En la Lección 3 del Tema 4 habíamos adelantado que un endomorfismo f o su matriz estándar asociada es diagonalizable si existe base respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal, o lo que es lo mismo, si A tiene una semejante diagonal. Por tanto, siempre que exista base de autovectores podremos decir que el endomorfismo es diagonalizable.

Recíprocamente, si un endomorfismo f tiene matriz asociada diagonal respecto de una base dada $C = \{\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \ldots\ \vec{c}_n\}$, es obvio que esos vectores son autovectores de f, y que por tanto existe la base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f. En efecto, si F es la matriz diagonal relativa a esa base, la columna i de F será $[f(\vec{c}_i)]_C$, por tanto $f(\vec{c}_i) = f_{ii}\vec{c}_i$, por lo que concluimos que $\vec{c}_i$ es autovector y f_{ii} su autovalor asociado.

Teorema 1.6. Teorema de la diagonalización. *Una matriz A_n es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes, es decir, si y sólo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A. En la factorización $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal, las columnas de P son n autovectores de A linealmente independientes, y los elementos de D son los autovalores correspondientes y en el mismo orden.*

Teorema 1.7. *Una matriz A_n con n valores propios distintos es diagonalizable.*

Demostración: En el teorema 5 se demostraba que si A_n tiene n valores propios distintos existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A. Aplicando el Teorema de la Diagonalización, que establece que A es diagonalizable si y sólo si $\mathbb{R}^n$ admite una base de autovectores de A, queda demostrado el presente teorema. $\square$

Teorema 1.8. *El determinante de la matriz A_n correspondiente a un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ diagonalizable es igual al producto de sus n autovalores. Es decir, si A diagonalizable, entonces* $\det A = \lambda_1^{p_{\lambda_1}} \times \lambda_2^{p_{\lambda_2}} \times \ldots \times \lambda_r^{p_{\lambda_r}}$*, siendo λ_i los r autovalores distintos y p_{λ_i} sus respectivas multiplicidades.*

Demostración: En la Lección 3 del Tema 4 vimos que las matrices semejantes tienen el mismo determinante. Si A diagonalizable, significa que A es semejante a D, siendo D una matriz diagonal, con los autovalores en dicha diagonal. El determinante de A, que es igual al de D, es por tanto igual al producto de todos los autovalores, incluyendo multiplicidades. $\square$

Teorema 1.9. *La traza de la matriz A_n correspondiente a un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ diagonalizable, es igual a la suma de sus autovalores, incluyendo multiplicidades. Es decir,* $\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i} \lambda_i$*, siendo λ_i los r autovalores distintos y p_{λ_i} sus respectivas multiplicidades.*

Demostración: En la Lección 3 del Tema 4 vimos que las matrices semejantes tienen la misma traza. Si A diagonalizable, significa que A es semejante a D, siendo D una matriz diagonal, con los autovalores en dicha diagonal. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(D)$, que es igual a la suma de todos los autovalores, incluyendo multiplicidades. $\square$

Obsérvese que este resultado es muy útil para comprobación de autovalores.

RESUMEN sobre diagonalización

Dada A_n existen P invertible y D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$ si y sólo si A tiene n valores propios reales (incluidas multiplicidades) y $\dim V_{\lambda_i}$ es igual a la multiplicidad algebraica de λ_i.

Los elementos de D son los autovalores. Las columnas de P son los vectores de una base de vectores propios de A, con los vectores ordenados en P igual que sus autovalores están ordenados en D.

La matriz de la aplicación lineal en la base canónica es A. La matriz D no es más que la matriz de la aplicación lineal respecto a la base de vectores propios dada en P.

La base de vectores propios se construye como la unión de las bases de los subespacios propios, siendo la dimensión de cada uno de éstos igual a la multiplicidad del autovalor como raíz.

Expresemos en fórmulas algunos resultados que verifica toda matriz A diagonalizable:

1. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_{\lambda_1}} (\lambda - \lambda_2)^{p_{\lambda_2}} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{p_{\lambda_r}}$, con λ_i raíces reales y distintas y $\sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i} = n$
2. $\dim V_{\lambda_i} = p_{\lambda_i}$
3. $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + ... + \dim V_{\lambda_r} = n$
4. Existe base B de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A y $B = B_1 \bigcup B_2 \ldots \bigcup B_r$, siendo B_i la base de V_{λ_i}.

$$1 \text{ y } 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow A \text{ diagonalizable}$$

Esquema para las matrices asociadas A y D:

$$\begin{array}{lccc}
f: & \mathbb{R}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & \vec{x} & \xrightarrow[A]{} & \vec{y} \\
P^{-1} & \downarrow & & \uparrow \; P \\
 & [\vec{x}]_B & \xrightarrow[D]{} & [\vec{y}]_B
\end{array}$$

B: base de autovectores

elementos de D: autovalores en el mismo orden

$A = P\ D\ P^{-1}$ $\quad$ P es la matriz de paso de la base usada en D a la base canónica.

$D = P^{-1}\ A\ P$ $\quad$ P^{-1} es la matriz de paso de la base canónica a la base usada para D.

1.9 Algunas propiedades de autovalores y autovectores

Teorema 1.10. *Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal.*

Demostración: Se demuestra para una matriz triangular superior y $n = 3$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

λ es un autovalor $\iff$ $|A - \lambda I| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) = 0$

Las raíces de $p(\lambda)$ son a_{11}, a_{22}, a_{33}

Se obtiene el mismo resultado para una matriz triangular inferior. □

Ejemplo 1.11. *Determina los valores propios de las matrices A y B.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Son matrices triangulares, y por tanto sus autovalores son los elementos de la diagonal principal. Los autovalores de A son 3,0,6 y los autovalores de B son 4 (multiplicidad algebraica 2) y 1.

Teorema 1.11. *Si λ es autovalor de A con autovector asociado $\vec{x}$, entonces λ^k $(k = 2, 3, ...)$ es autovalor de A^k con el mismo autovector asociado $\vec{x}$.*

Demostración: $$A^k \ \vec{x} = \overbrace{A \ \ ... \ \ A}^{k \ veces} \ \vec{x} = \lambda^k \ \vec{x}$$ □

Teorema 1.12. *A_n es invertible $\iff$ el escalar 0 no es autovalor de A.*

Demostración: A es invertible $\iff |A| \neq 0 \iff |A - 0I| \neq 0 \iff$ 0 no es autovalor de A □

Teorema 1.13. *Si A es invertible y λ autovalor de A con autovector asociado $\vec{x}$, entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1} con autovector asociado también $\vec{x}$.*

Demostración: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\quad A$ invertible $\Longrightarrow \quad \exists A^{-1}$ y $\lambda \neq 0$

Multiplicando por A^{-1} por la izquierda, $\quad A^{-1}A\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$

$\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \quad \lambda^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$ □

Teorema 1.14. *A y A^t tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores y con la misma multiplicidad algebraica.*

Demostración: $I^t = I \quad \Longrightarrow \quad |A^t - \lambda I| = |A^t - \lambda I^t| = |(A - \lambda I)^t| = |A - \lambda I|$

$|A^t - \lambda I| = |A - \lambda I| \Longrightarrow \quad A$ y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores y con la misma multiplicidad algebraica. □

Los autovectores serán en general diferentes, pues los sistemas lineales $[A - \lambda\ I \mid \vec{0}\ ]$ y $[A^t - \lambda\ I \mid \vec{0}\ ]$ no tienen necesariamente la misma solución.

Teorema 1.15. *Si dos matrices A_n y F_n son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores y con la misma multiplicidad algebraica.*

Demostración: A y F semejantes $\quad \Leftrightarrow \ \exists\ P \ \ / \ \ A = PFP^{-1}$

$A - \lambda I = PFP^{-1} - \lambda I = PFP^{-1} - P\lambda IP^{-1} = P(F - \lambda I)P^{-1}$

$|A - \lambda I| = |P||F - \lambda I||P^{-1}| = |F - \lambda I|$, por tanto $\quad |A - \lambda I| = |F - \lambda I|$ □

Los autovectores de A y F son los mismos, pero debemos de darnos cuenta de que si resolvemos $[A - \lambda\ I \mid \vec{0}\ ]$ obtendremos las coordenadas canónicas de esos vectores, mientras que si resolvemos $[F - \lambda\ I \mid \vec{0}\ ]$ obtendremos las coordenadas de los autovectores relativas a la base B.

Nota importante: La relación de equivalencia por filas, equivalencia por columnas, o equivalencia en general (filas y/o columnas), no implica la igualdad del polinomio característico. Sólo en el caso de relación de semejanza, como se vio en el teorema anterior.

Veámoslo por ejemplo con la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Su polinomio característico es $(2 - \lambda)(1 - \lambda)$, que es distinto al de la matriz I_2, que es equivalente a A.

Teorema 1.16. *Toda matriz A_n simétrica es diagonalizable.* [2]

[2] No demostramos este teorema

1.10 Los cuatro casos respecto al tipo de raíces de $p(\lambda)$ en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 1.12. *Determinar los valores propios y subespacios propios correspondientes a los endomorfismos con matrices estándar asociadas:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \;,\; C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \;,\; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar para cada caso si existe base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios del endomorfismo considerado.

- $|A - sI| = \begin{vmatrix} -2-s & -2 \\ -5 & 1-s \end{vmatrix} = (-2-s)(1-s) - 10 = s^2 + s - 12$ *raíces* $3, -4$

  Para calcular V_3 hay que resolver el sistema $A\vec{x} = 3\vec{x}$, es decir, $(A - 3I)\ \vec{x} = \vec{0}$

  $\begin{bmatrix} -5 & -2 & | \ 0 \\ -5 & -2 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -2 & | \ 0 \\ 0 & 0 & | \ 0 \end{bmatrix}$, *solución:* $5x + 2y = 0 \Rightarrow V_3 =< (-2, 5) >$

  Para calcular V_{-4} hay que resolver el sistema $A\vec{x} = -4\vec{x}$, es decir, $(A + 4I)\ \vec{x} = \vec{0}$

  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & | \ 0 \\ -5 & 5 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | \ 0 \\ 0 & 0 & | \ 0 \end{bmatrix}$, *solución:* $x = y \Rightarrow V_{-4} =< (1, 1) >$

  Cualquier conjunto formado por un vector de V_3 y un vector de V_{-4} es linealmente independiente $\Rightarrow$ $B = \{(-2, 5), (1, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios $\Rightarrow$ la matriz asociada al endomorfismo es diagonalizable. En efecto:
  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ *y* $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ *cumplen* $A = PDP^{-1}$.
  D es la matriz asociada al endomorfismo respecto de la base $B = \{(-2, 5), (1, 1)\}$.

  Nótese como A y D tienen la misma traza y el mismo determinante.

  Para comprobar que $A = PDP^{-1}$, resultará más sencillo realizar la comprobación sobre la ecuación $AP = PD$, que es la misma que la anterior, y evita tener que calcular P^{-1}.

- $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *es una matriz diagonal, por tanto sus valores propios son los elementos de la diagonal.* $p(s) = (s - 2)(s - 2)$ *raíz 2 doble*

  Para calcular V_2 hay que resolver el sistema $A\vec{x} = 2\vec{x}$, es decir

  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = 2\vec{x}$. *La ecuación se verifica para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, es decir, $V_2 = \mathbb{R}^2$.*
  En efecto en el sistema homogéneo $[\ A - 2I \mid 0\ ]$ las dos ecuaciones se anulan, por tanto hay cero pivotes y dos parámetros libres.

  OBSERVACION: Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ son vectores propios de este endomorfismo, por tanto cualquier base de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, es base de vectores propios. La matriz asociada al endomorfismo es $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ respecto de cualquier cualquier base de $\mathbb{R}^2$.

  Podemos darnos cuenta también de que por la definición de matriz estándar asociada, $B = [\ f(\vec{e_1})\ f(\vec{e_2})\ ]$, se tiene:
  $f(1, 0) = (2, 0)$ y $f(0, 1) = (0, 2)$, deduciéndose que $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son autovectores del autovalor 2. La matriz B original ya está referida a una base de autovectores, puesto que es diagonal.

  Es obvio que el endomorfismo se puede escribir como $A\vec{x} = 2I\vec{x} = 2\vec{x}$, lo que claramente señala que todo $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$ es autovector asociado a $\lambda = 2$ y que por tanto $V_2 = \mathbb{R}^2$.

- $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ *es una matriz triangular, por tanto sus valores propios son los elementos de la diagonal.*
  raíz -3 doble

$p(s) = (s+3)(s+3)$

Para calcular V_{-3} *hay que resolver el sistema* $A\vec{x} = -3\vec{x}$, *es decir* $(A+3I)\vec{x} = \vec{0}$.

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & | \ 0 \\ 0 & 0 & | \ 0 \end{bmatrix}$ *tiene como solución* $y = 0$ *(x parámetro libre).* $V_{-3} =< (1,0) >$

$\lambda = 3$ *es raíz doble, sin embargo* $dimV_3$ *no es 2, sino 1, por tanto no existe base de* $\mathbb{R}^2$ *formada por autovectores de este endomorfismo. La matriz* C *no es diagonalizable.*

- $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $p(s) = (1-s)(1-s)+1 = s^2 - 2s + 2$ *Las raíces son los complejos conjugados,* $1+i$, $1-i$. *Por tanto no hay autovalores para el endomorfismo real.*

<u>*Tabla de resultados*</u>

	Raíces	*Auto-valores*	*Multip. algebr.*	*Subespacios propios*	*Multip. geomét.*	*Existe base de* $\mathbb{R}^2$ *formada por autovect.*
A	*3* *-4*	$\lambda = 3$ $\lambda = -4$	*1* *1*	$V_3 =< (-2,5) >$ $V_{-4} =< (1,1) >$	*1* *1*	*sí* $\{ (-2,5), (1,1) \}$
B	*2 doble*	$\lambda = 2$	*2*	$V_2 =< (1,0), (0,1) >$	*2*	*sí* $\{ (1,0), (0,1) \}$
C	*-3 doble*	$\lambda = -3$	*2*	$V_{-3} =< (1,0) >$	*1*	*no*
D	*1+i* *1-i*					*no*

1.11 Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 1.13. *Considérese la aplicación lineal* $f\colon \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ *cuya matriz asociada es* $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. *Sabiendo que un valor propio de la aplicación es* $\lambda = 2$, *encuentra una base del subespacio propio correspondiente a este valor propio.*

Hay que resolver el SL $A\vec{x} = 2\vec{x}$, *o lo que es lo mismo,* $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Tenemos que resolver el SL de matriz ampliada: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & \mid 0 \\ 2 & -1 & 6 & \mid 0 \\ 2 & -1 & 6 & \mid 0 \end{bmatrix}$

Las soluciones son los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *verificando* $2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0$. *Tomando* x_1 *y* x_3 *como parámetros libres,* $V_2 = (x_1, 2x_1 + 6x_3, x_3)$ *con* $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

V_2 *tiene dimensión 2 y una posible base de* V_2 *es* $B = \{(1,2,0),(0,6,1)\}$

Ejemplo 1.14. *a) Determina los valores propios y subespacios propios correspondientes a los endomorfismos con matrices asociadas:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \text{ (matriz igual a la del Ejemplo 13)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Determina para cada caso si existe base de $\mathbb{R}^3$ *formada por vectores propios del endomorfismo considerado, y en caso afirmativo calcular matrices* P *y* D *para su diagonalización.*

Solución para la matriz A

$$0 = \begin{vmatrix} 4-s & -1 & 6 \\ 2 & 1-s & 6 \\ 2 & -1 & 8-s \end{vmatrix} \underset{F_{12(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 2-s & -2+s & 0 \\ 2 & 1-s & 6 \\ 2 & -1 & 8-s \end{vmatrix} = (2-s)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1-s & 6 \\ 2 & -1 & 8-s \end{vmatrix} \underset{F_{23(-1)}}{=}$$

$$(2-s)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2-s & -2+s \\ 2 & -1 & 8-s \end{vmatrix} = (2-s)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 8-s \end{vmatrix} = (2-s)^2((8-s)+2-1) =$$

$(2-s)^2(9-s)$ *Los autovalores son* $\lambda_1 = 2$ *(doble) y* $\lambda_2 = 9$

V_2**:** *Son las soluciones de* $A\vec{x} = 2\vec{x}$ $[\ A - 2I \mid \vec{0}\ ] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & \mid 0 \\ 2 & -1 & 6 & \mid 0 \\ 2 & -1 & 6 & \mid 0 \end{bmatrix}$, *que se determinaron en el ejemplo anterior.*

V_2 *tiene una única ec. implícita* $2x - y + 6z = 0$, *y la base encontrada fue:* $\{(1,2,0),(0,6,1)\}$

V_9**:** *Son las soluciones de* $A\vec{x} = 9\vec{x}$

$$[\ A-9I \ \ | \ \ \vec{0}\ ] \begin{bmatrix} -5 & -1 & 6 & | & 0 \\ 2 & -8 & 6 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & | & 0 \\ -5 & -1 & 6 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & | & 0 \\ 0 & -21 & 21 & | & 0 \\ 0 & 7 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{Se deduce:} \ \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Por tanto podemos escribir por ejemplo: $V_9 =< (1,1,1) >$

$B = \{(1,2,0),(0,6,1),(1,1,1)\}$ *es base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores del endomorfismo* A.

La matriz es diagonalizable, y una elección posible de P *y* D *es:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}. \ \textit{Se puede comprobar que } AP = PD.$$

Solución para la matriz B

Autovalores:

$$|A - sI| = \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ -4 & -6-s & -3 \\ 3 & 3 & 1-s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ -2-s & -2-s & 0 \\ 3 & 3 & 1-s \end{vmatrix} = (-2-s) \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1-s \end{vmatrix} =$$

$$(-2-s) \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s \end{vmatrix} = (-2-s)(1-s) \begin{vmatrix} 2-s & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2-s)(1-s)(2-s-4) =$$

$$(-2-s)(1-s)(-2-s) = (-2-s)^2(1-s)$$

Los valores propios son $s = -2$ *doble y* $s = 1$ *simple.*

Subespacio propio V_{-2}**:** *Son las soluciones de* $A\vec{x} = -2\vec{x}$

$$[\ A+2I \ \ | \ \ \vec{0}\ ] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & | & 0 \\ -4 & -4 & -3 & | & 0 \\ 3 & 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 4 & 4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

dim V_{-2} *= 3 - rango*$(A - I)$ *= 3 - 2 = 1 (sólo hay un parámetro libre).*

$z = 0$, $x = -y \Rightarrow V_{-2} =< (1,-1,0) >$

El autovalor $s = -2$ *es doble, mientras que la dimensión del subespacio propio correspondiente es* 1*, por tanto el endomorfismo no es diagonalizable.*

Subespacio propio V_1**:** *Son las soluciones de* $A\vec{x} = \vec{x}$

$$[\ A-I \ \ | \ \ \vec{0}\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 0 \\ -4 & -7 & -3 & | & 0 \\ 3 & 3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 9 & 9 & | & 0 \\ 0 & -9 & -9 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{por tanto podemos escribir por ejemplo: } V_1 =< (1,-1,1) >$$

<u>Solución para la matriz C</u>

$$0 = \begin{vmatrix} 5-s & -8 & 1 \\ 0 & -s & 7 \\ 0 & 0 & -2-s \end{vmatrix} = -s(5-s)(-2-s)$$

La matriz asociada es triangular, y por tanto los autovalores son los elementos de la diagonal principal, $s = 5$, $s = 0$ y $s = -2$. Los tres autovalores son distintos, y por tanto simples. Por ser las tres raíces de $p(\lambda)$ reales y distintas tendremos que el endomorfismo es diagonalizable.

V_5*: son las soluciones de* $A\vec{x} = 5\vec{x}$ $\quad [\ A - 5I \mid \vec{0}\ ] = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & -7 & | & 0 \end{bmatrix}$

Del sistema obtenemos $z = 0$, $y = 0$, por tanto $V_5 =< (1, 0, 0) >$

V_0*: son las soluciones de* $A\vec{x} = \vec{0}$ $\quad [\ A \mid \vec{0}\ ] = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$

Del sistema obtenemos $z = 0$, $y = y$, $5x = 8y$ por tanto $V_0 =< (8/5, 1, 0) >$ o $V_0 =< (8, 5, 0) >$ si queremos evitar fracciones en el vector base.

V_{-2}*: son las soluciones de* $A\vec{x} = -2\vec{x}$ $\quad [\ A + 2I \mid \vec{0}\ ] = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 0 & 29 & | & 0 \\ 0 & 2 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

Del sistema obtenemos $y = -7/2z$, $x = -29/7z$, por tanto $V_{-2} =< (-29/7, -7/2, 1) >$ o $V_{-2} =< (-58, -49, 14) >$ si queremos evitar fracciones en el vector base.

$B = \{(1, 0, 0), (8, 5, 0), -58, -49, 14\}$ *es base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores del endomorfismo C.*

Una posible elección para P y D para la diagonalización de la matriz es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -58 \\ 0 & 5 & -49 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$ *Se puede comprobar que $CP = PD$.*

<u>Solución para la matriz D</u>

$$0 = \begin{vmatrix} 3-s & -2 & 0 \\ 4 & -1-s & 0 \\ 2 & 1 & 1-s \end{vmatrix} = (1-s)\begin{vmatrix} 3-s & -2 \\ 4 & -1-s \end{vmatrix} = (1-s)\ ((3-s)(-1-s)+8) = (1-s)(-3-3s+ s+s^2+8) = (1-s)(s^2-2s+5)$$

Las raíces son $s = 1$, que es por tanto autovalor, y $s = 1 \pm 2i$, que por no ser raíces reales no son autovalores.

V_1*: son las soluciones de* $A\vec{x} = \vec{x}$

$$[\ A - I \mid \vec{0}\ ] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 4 & -2 & 0 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

se deduce que $x = 0$ e $y = 0$. Por tanto $V_1 =< (0, 0, 1) >$

La matriz no es diagonalizable, pues no existe base de $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores del endomorfismo D. El máximo número de autovectores linealmente independientes es uno.*

Tabla de resultados

	Raíces	Auto-val.	Mult. alg.	Subespacios propios	Mult. geom.	Existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovect.
A	2 doble 9	2 9	2 1	$V_2 =< (1,2,0),(0,6,1) >$ $V_9 =< (1,1,1) >$	2 1	sí $\{(1,2,0),(0,6,1),(1,1,1)\}$
B	-2 doble 1	-2 1	2 1	$V_{-2} =< (1,-1,0) >$ $V_1 =< (1,-1,1) >$	1 1	no
C	-2 0 5	-2 0 5	1 1 1	$V_{-2} =< (-58,-49,14) >$ $V_0 =< (8,5,0) >$ $V_5 =< (1,0,0) >$	1 1 1	sí $\{(-58,-49,14),(8,5,0),(1,0,0)\}$
D	1 1-2i 1+2i	1	1	$V_1 =< (0,0,1) >$	1	no

1.12 Aplicación de la diagonalización para obtener la potencia de una matriz

Si A es diagonalizable, con $A = PDP^{-1}$, entonces $A^k = PD^kP^{-1}$.

En efecto $\quad A^k = \overbrace{PDP^{-1}\ PDP^{-1}\ \ldots\ PDP^{-1}}^{k \quad veces} = PD^kP^{-1}$

Ejemplo 1.15. *Diagonaliza la matriz A y aprovecha el resultado para simplificar el cálculo de $A^5\vec{x}$ con $\vec{x} = (6, 17, 5)$.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En primer lugar calculamos los autovalores

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) + 2 + 2 - (3-\lambda) - 2(2-\lambda) - 2(2-\lambda)$$

$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$

Polinomio de grado 3 que resolvemos por Ruffini, tomando $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & -7 & 11 & -5 \\
1) & & 1 & -6 & 5 \\
 & --- & --- & --- & --- \\
 & 1 & -6 & 5 & 0 \\
1) & & 1 & -5 & \\
 & --- & --- & --- & --- \\
 & 1 & -5 & 0 & \\
5) & & 5 & & \\
 & --- & --- & --- & --- \\
 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$

Los autovalores son $\lambda = 1$ (multiplicidad 2) y $\lambda = 5$ (multiplicidad 1)

Se calcula V_1 obteniendo $V_1 = < \vec{v_1}, \vec{v_2} >$, con $\vec{v_1} = (1, 0, -1)$, $\vec{v_2} = (1, -1, 0)$, confirmando que su dimensión es 2, y que por tanto A es diagonalizable.

Seguidamente se calcula V_5 obteniendo $V_5 = < \vec{v_3} >$, con $\vec{v_3} = (1, 2, 1)$.

Por tanto $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A. Las matrices P y D de la diagonalización son:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad con\ D = P^{-1}AP$$

(Compruébese que $AP = PD$)

Podemos calcular $A^5\vec{x}$ por varios métodos.

Método 1: $\vec{y} = A^5\vec{x}$ *(Hay que obtener la potencia quinta de una matriz 3×3 que no tiene ningún elemento nulo, por tanto tendríamos que hacer muchísimas operaciones).*

Método 2: *Obteniendo la imagen en la base de vectores propios.*

$D^5[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ *(La potencia k de una matriz diagonal es igual a la matriz diagonal que resulta de elevar cada elemento a la potencia k, por tanto D^5 es la matriz diagonal 3×3 que tiene por entradas los elementos de D elevados a la quinta potencia).*

- *Para obtener $[\vec{x}]_B$ efectuamos: $[\vec{x}]_B = P^{-1}\vec{x}$ o resolvemos el SL de matriz ampliada $[\ P \mid \vec{x}\ ]$, que es más sencillo.*
- $D^5[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- *Para obtener $\vec{y}$ efectuamos: $\vec{y} = P\ [\vec{y}]_B$*

$\vec{x} = (6, 17, 5)$ *tiene por coordenadas respecto de la base B:*

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 21875 \end{bmatrix} = [\vec{y}]_B$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 21875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21874 \\ 43753 \\ 21873 \end{bmatrix}$$

Método 3

$\vec{y} = A^5\vec{x} = (PDP^{-1})^5\vec{x} = PD^5P^{-1}\vec{x}$

Nótese como las operaciones de los métodos 2 y 3 son las mismas.

Método 4 *Utilizando únicamente notación vectorial y el hecho de que si $\vec{v}_i$ es autovector con autovalor asociado λ_i, $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ y $A^k\vec{v}_i = \lambda_i^k\vec{v}_i$*

$A^5\vec{x} = A^5(c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3}) = c_1A^5\vec{v_1} + c_2A^5\vec{v_2} + c_3A^5\vec{v_3} =$

$$c_1\ 1^5\ \vec{v}_1 + c_2\ 1^5\ \vec{v_2} + c_3\ 5^5\ \vec{v}_3 = (2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (7)\ \times\ 3125\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21874 \\ 43753 \\ 21873 \end{bmatrix}$$

Este método ha precisado de la obtención de las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base de vectores propios. Es un método sencillo que ilustra como los autovectores y autovectores permiten reducir operaciones matriciales a operaciones vectoriales.

1.13 Transformaciones lineales con interpretación geométrica sencilla y diagonalizables

Las siguientes transformaciones geométricas en $\mathbb{R}^2$ son endomorfismos diagonalizables:

- Transformación escalamiento uniforme de razón k.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$

- Transformación escalamiento no uniforme de factores k y k' distintos.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, señalando $\vec{a}$ la dirección del escalamiento de factor k y $\vec{b}$ la dirección del escalamiento de factor k'.

- Proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- Simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- Simetría respecto del origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$.

Las siguientes transformaciones geométricas en $\mathbb{R}^3$ son endomorfismos diagonalizables:

- Transformación escalamiento uniforme de razón k.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$

- Transformación escalamiento no uniforme de factores k_1, k_2, k_3 (al menos uno distinto del resto).

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, correspondiendo cada dirección al escalamiento asociado k_1, k_2 o k_3.

- Proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- <u>Simetría ortogonal respecto de un plano</u> que pasa por el origen.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- <u>Simetría respecto del origen</u>.

  Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.16. *Considérese en* $\mathbb{R}^2$ *la simetría ortogonal respecto de la recta generada por el vector* $(3,1)$.
a) Determine la matriz M *asociada a este endomorfismo respecto de la base* $B = \{(3,1),(-1,3)\}$
b) Determine la matriz A *asociada respecto de la base canónica.*
c) Determine la imagen del vector $\vec{x} = (4,3)$ *(el vector* $\vec{x}$ *está en base canónica, y la imagen de* $\vec{x}$ *también hay que darla en base canónica).*
d) ¿ Tiene este endomorfismo subespacios propios?. En caso afirmativo da una base de cada uno de ellos.

Sol:

a)

$B = \{(3,1),(-1,3)\}$. *El primer vector se encuentra sobre la recta de simetría. El segundo es ortogonal al primero, formando los dos vectores una base ortogonal.*

$f(3,1) = (3,1)$ *pues los vectores de la recta de simetría permanecen fijos.*

$f(-1,3) = -(-1,3)$ *pues el simétrico de un vector ortogonal a la recta es su opuesto.*

Nombrando los vectores $\vec{b}_1 = (3,1)$, $\vec{b}_2 = (-1,3)$, *resulta sencillo definir la aplicación lineal respecto de esta base ortogonal* $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

$$\begin{cases} f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 \\ f(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2 \end{cases} \qquad \text{o lo que es lo mismo:} \begin{cases} f(\vec{b}_1) = 1\ \vec{b}_1 + 0\ \vec{b}_2 \\ f(\vec{b}_2) = 0\ \vec{b}_1 - 1\ \vec{b}_2 \end{cases}$$

Por tanto la matriz asociada respecto de la base $B = \{(3,1),(-1,3)\}$ *es* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Si se expresa un vector respecto de esa base, la componente sobre la recta permanece fija en esta transformación, mientras que la componente sobre la perpendicular cambia de signo. Esa es la geometría de la simetría ortogonal.

b) *La matriz* A *relativa a la base canónica es* $A = PMP^{-1}$, *con* $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Mediante los cálculos pertinentes obtenemos $P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A = PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

c) $f(4,3) = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Otra forma de resolver este apartado, sin usar A:
- *Se calculan las coordenadas de* $(4,3)$ *en base* B, *resultando* $(3/2, 1/2)$.
- *la imagen de este último vector mediante la matriz* M *es* $(3/2, -1/2)$.
- *reconvirtiendo a la base canonica* $P * (3/2, -1/2) = (5,0)$

d) Este endomorfismo tiene dos subespacios propios: V_1 *con base* $B = \{(3,1)\}$ *y* V_{-1} *con base* $B = \{(-1,3)\}$

1.14 Ejercicios

Ejercicio 1.1. *Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. En caso afirmativo encontrar una matriz P y una matriz diagonal D, tales que $A = PDP^{-1}$. (Comprrueba los resultados demostrando que AP=PD.)*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 1.2. *Dado el endomorfismo con matriz estándar asociada* $A = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ 48 & -13 \end{bmatrix}$ *, obtén una base de cada subespacio propio, indicando el correspondiente autovalor asociado.*

Ejercicio 1.3. *Dado el endomorfismo con matriz estándar asociada* $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 30 & -7 \end{bmatrix}$*, se pide:*

a) Sus autovalores y multiplicidades algebraicas.

b) Una base de cada subespacio propio.

c) Razonar si existe alguna recta en $\mathbb{R}^2$ cuyos vectores permanezcan fijos en la transformación, y en caso afirmativo escribir su forma implícita.

d) Razonar si existe alguna recta en $\mathbb{R}^2$ que permanezca fija en la transformación, y en caso afirmativo escribir su forma implícita.

Ejercicio 1.4. *En $\mathbb{R}^3$, dado el endomorfismo con matriz asociada* $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$*, señala la afirmación correcta:*

a) $\lambda = 6$ *es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado* V_6 *es 1.*
b) $\lambda = 6$ *es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado* V_6 *es 2.*
c) $\lambda = 6$ *no es autovalor*

Considerado el endomorfismo anterior

a) Calcula todos los autovalores y sus multiplicidades algebraicas.

b) Obtén la forma implícita más simplificada posible de uno de los subespacios propios, indicando cual ha sido el autovalor que has tomado.

Ejercicio 1.5. *Considerado el endomorfismo f en $\mathbb{R}^5$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *, señala la respuesta correcta:*

a) f tiene un subespacio propio de dimensión 3
b) f tiene un autovalor con multiplicidad algebraica 2
c)f tiene un autovalor con multiplicidad algebraica 3
d) f tiene cuatro o más autovalores distintos

Ejercicio 1.6. *Para el endomorfismo con la matriz asociada A del ejercicio anterior, se pide:*

a) Los autovalores y sus multiplicidades algebraicas.

b) Una base de cada subespacio propio.

c) Determinar si el endomorfismo es diagonalizable o no y en caso afirmativo obtener P y D tales que $A = PDP^{-1}$.

c) Justificar si el endomorfismo es o no inyectivo.

Ejercicio 1.7. *De la matriz* $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ \beta & 4 & 0 \\ \gamma & 10 & -1 \end{bmatrix}$ *se sabe que* $\lambda_1 = 2$ *es uno de sus valores propios y que* $(1, -2, -3)$ *es un vector propio de* A *asociado al valor propio* λ_1.

a) Halla los valores α, β *y* γ.

b) Halla los valores propios de A *y una base de cada subespacio propio.*

c) Halla, si existe, una base de $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores de* A.

d) Diagonaliza la matriz A*, si es posible, obteniendo* D *diagonal y* P *invertible tales que* $A = PDP^{-1}$

Ejercicio 1.8. *Determina el valor o los valores de c, si existe alguno, para que la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ *sea diagonalizable, razonando el procedimiento y obteniendo en caso afirmativo las matrices* P *y* D *tales que* $A = PDP^{-1}$.

Ejercicio 1.9. Manualmente y con Matlab *Dada* $T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ a+4 & -2 & 0 \\ 0 & b+3 & 2 \end{bmatrix}$*, halla los valores de a y b para que* T *no sea diagonalizable.*

Ejercicio 1.10. Matlab *Considerado el endomorfismo* f *de* $\mathbb{R}^4$ *con matriz asociada:*

$$A = \begin{bmatrix} 3.2 & 1.0 & -1.0 & 2.0 \\ 4.7 & 4.2 & -5.7 & 11.4 \\ 4.7 & 1.0 & -2.5 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

a) Obtén sus autovalores y la multiplicidad algebraica de cada uno de ellos.

b) Obtén una base de cada subespacio propio.

c) Determina un antecedente del vector $\vec{v} = (5.40, -0.80, 9.90, 3.75)$*, si es que existe. Si no existe indícalo explícitamente.*

d) Justifica si el endomorfismo es o no inyectivo.

Ejercicio 1.11. *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *y el vector* $\vec{x} = \{7, 0, 5\}$*, sin calcular* A^4*, calcula el vector* $\vec{y} = A^4\vec{x}$ *(*A*,* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *referidos a la base canónica. Pista:* $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^4 = PD^4P^{-1}$*).*
(Ejercicio del mismo tipo que el Ejemplo 15, y además la misma matriz A).

Ejercicio 1.12. *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ *y el vector* $\vec{v} = (3,6)$, *obtén* $A^5\vec{v}$. *Para simplificar las operaciones realiza los siguientes pasos, si es posible.*

- *encuentra una base de* $\mathbb{R}^2$ *formada por autovectores de* A
- *obtén las coordenadas de* $\vec{v}$ *respecto de la base de vectores propios*
- *obtén la imagen de* $\vec{v}$ *utilizando la matriz definida respecto a la base de vectores propios, pues ésta es diagonal y* D^5 *se obtiene sin más que elevar a la quinta potencia los elementos de la diagonal*
- *transforma la imagen a la base canónica, pues el resultado anterior está en la base de vectores propios.*

(Ejercicio del mismo tipo que el Ejemplo 15)

Ejercicio 1.13. *a) Encuentra los autovalores del endomorfismo* $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *con matriz asociada* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Determina una base B *de* $\mathbb{R}^2$ *formada por vectores propios de* A.

c) Determina la matriz asociada a f *respecto de la base* B *del apartado anterior.*

d) Demuestra que existe una recta de vectores que permanecen fijos respecto de la transformación f *y obtén la ecuación implícita de esa recta.*

Ejercicio 1.14. *Se considera un endomorfismo en* $\mathbb{R}^4$ *definido de la siguiente manera:*

** Su núcleo es el subespacio cuyas ecuaciones son* $x + y + z = 0$, $t = 0$.

** Los vectores (1,1,1,0) y (0,0,0,1) se transforman en sí mismos.*

Halla:

a) La matriz estándar de la aplicación.
b) La imagen del subespacio cuyas ecuaciones son $x + y + z = 0$, $t = 0$, $x - y + 2t = 0$.

Ejercicio 1.15. Manualmente y con Matlab *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ *un endomorfismo* <u>*no sobreyectivo*</u> *tal que:*

*** $\lambda = 1$ *es autovalor doble de* f

** Los subespacios propios de* f *son* H *y* F *de ecuaciones:*

$$H : \{x + y + z = 0\} \qquad\qquad F : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

a) Razona si el endomorfismo f *es o no diagonalizable.*

b) Calcula la matriz A *asociada a* f *respecto de la base canónica.*

c) Determina A^n *siendo* n *un número natural cualquiera.*

Ejercicio 1.16. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ *un endomorfismo con matriz asociada* A *respecto de la base canónica, y para el que se cumplen los siguientes resultados:*

* $Kerf = < (1,2,0),(0,3,1) >$

* *transforma el eje* Z *en el eje* Z

* *la suma de los elementos de la diagonal de* A *es igual a 3*

a) Determina los autovalores de f*, sus multiplicidades algebraicas y sus multiplicidades geométricas.*

b) Obtén la matriz A

c) Obtén una base de la imagen del endomorfismo, expresando el o los vectores de la base en coordenadas canónicas.

d) Calcula A^6

Ejercicio 1.17. Manualmente y con Matlab. *Considera el enfomorfismo* f *dado por las siguientes ecuaciones:* $\begin{cases} y_1 = 1/5x_1 + 2/5x_2 \\ y_2 = 2/5x_1 + 4/5x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

a) Obtén una base de Imf.

b) Obtén una base de $Kerf$.

c) Obtén los valores propios y sus multiplicidades algebraicas.

d) Obtén una base de cada subespacio propio.

e) Interpreta geométricamente la transformación tanto cualitativa como cuantitativamente.

Ejercicio 1.18. Matlab *Considerado el endomorfismo* f *en* $\mathbb{R}^3$*, con matriz asociada respecto de la base canónica*

$$A = \begin{bmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \end{bmatrix}$$ *, presenta los siguientes resultados:*

a) Los autovalores de A *y sus multiplicidades algebraicas, rellenando un recuadro por cada autovalor distinto. (Usa los recuadros que necesites).*

Autovalor:	*Multiplicidad algebraica:*
Autovalor:	*Multiplicidad algebraica:*
Autovalor:	*Multiplicidad algebraica:*

b) Una base de $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores de* f*, si es que dicha base existe. Si no existe dicha base indícalo explícitamente.*

c) Razona si el endomorfismo es o no sobreyectivo basándote en resultados de apartados anteriores.

d) Interpreta geométricamente la transformación, tanto cualitativa como cuantitativamente.