Ejercicios

Cuando se pide el núcleo de una aplicación lineal, si no es el vector cero, y por tanto Ker $f = \{\vec{0}\}$, hay que dar una base.

1. Determina si las aplicaciones $f(x) = 5x$ y $g(x) = 5x + 3$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, son o no aplicaciones lineales.

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$. Halla el núcleo de la aplicación lineal.

3. Considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2) = (3x_1, 3x_1 + x_2)$. Comprueba que es una aplicación lineal y halla el núcleo.

4. Demuestra que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por $f(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1, x_1-x_2)$ es inyectiva y no suprayectiva.

5. Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}_0$, siendo $\vec{v}_0$ un vector constante, no es una aplicación lineal. Esta transformación es una traslación.

6. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por:

   $$(1, 0, 0) \longmapsto (2, 1)$$
   $$(0, 1, 0) \longmapsto (0, 1)$$
   $$(0, 0, 1) \longmapsto (1, 1)$$

   Halla una base de la imagen de $\mathbb{R}^3$ para esta aplicación lineal, las ecuaciones de la aplicación lineal y el núcleo.

7. **Manualmente y con Matlab**. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

   $$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, -1)$$
   $$(0, 1, 0) \longmapsto (1, -1, 1)$$
   $$(0, 0, 1) \longmapsto (1, -3, 3)$$

   Halla una base del núcleo de f (si no es el subespacio cero) y una base de la imagen de f.

   Determina si f es inyectiva o no y si es sobreyectiva o no.

8. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

   $$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, 0)$$
   $$(0, 1, 0) \longmapsto (0, 1, 1)$$
   $$(0, 0, 1) \longmapsto (1, 1, 1)$$

   Demuestra que f es inyectiva y suprayectiva.

9. Considera la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases canónicas es $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Determina una base de Imf.

10. **Manualmente y con Matlab**. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

    $(1,0,0) \longmapsto (1,1,1)$

    $(0,1,0) \longmapsto (2,0,-3)$

    $(0,0,1) \longmapsto (0,0,4)$

    a) Halla la matriz correspondiente a la aplicación lineal, indicando las bases a las que está referida

    b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2,-3,5)$

    c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2,-5,4)$

11. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c+3, 2)$. Determina una base de Ker$f$ en función del parámetro c.

12. Construye, si es posible, una aplicación lineal con las condiciones pedidas en cada uno de los casos siguientes, dando su matriz asociada:

    a) una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$

    b) una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$

    c) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$ cuyo rango sea 5

    d) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ tal que dim Ker$f$ = 3

13. **Manualmente y con Matlab**. Considera las siguientes aplicaciones lineales:

    $f(x,y) = (x-y, 3x, 2y) \qquad \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$

    $g(x,y) = (x, x+y, x-y, y) \qquad \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^4$

    $h(x,y,z,t) = (x-t, x+y+z, y-z) \qquad \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$

    Demuestra que $f = h \circ g$

14. Sea f la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

    $f(1,1,1,1) = (1,1,1)$

    $f(1,1,1,-1) = (1,1,-1)$

    $f(1,1,-1,-1) = (1,-1,-1)$

    $f(1,-1,-1,-1) = (-1,-1,-1)$

    Determina la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases canónicas.

15. **Manualmente y con Matlab**. Sea $L = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la aplicación lineal L de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Determina la matriz asociada a L respecto:

a) Las bases $S = \{(1,-1),(0,1)\}$ y $T = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,-1,1)\}$

b) La base canónica en $\mathbb{R}^2$ y la base T en $\mathbb{R}^3$

c) La base S en $\mathbb{R}^2$ y la base canónica en $\mathbb{R}^3$

16. Obtén una matriz F semejante a la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (que no sea la propia matriz A). Suponiendo que A representa una transformación lineal referida a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, la matriz F corresponderá a la misma transformación lineal respecto a otra base B (la misma en espacio inicial y final). Determina esa base B.

17. **Manualmente y con Matlab**. Determina la ecuación de la recta cuyos puntos permanecen fijos en la transformación lineal
$$g(x,y) = (\frac{3x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$$
¿Cual es la matriz asociada a esta aplicación lineal, respecto de la base canónica?.

18. **Manualmente y con Matlab**. Calcula (expresión en forma implícita o proporcionando una base) la imagen del subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $z = 2y$, mediante la transformación lineal $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

19. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida de la siguiente forma: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1 + x_2, x_1 + ax_3, x_2 + x_4)$. Se pide:

    a) Valores de a para los cuales f es inyectiva

    b) Valores de a para los cuales f es sobreyectiva

    c) Base del núcleo de f en función de a, y para el caso particular $a = 2$

    d) Considerado el subespacio H de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, obtener las ecuaciones implícitas de $f(H)$ para $a = 0$.

20. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la transformación lineal f correspondiente al escalamiento de factores $k = 2$ y $k' = 5$ en las direcciones $(1,3)$ y $(2,1)$. Determina la matriz estándar asociada a f.

21. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, los subespacios $U =< (1,3) >$ y $V =< (2,1) >$, y la transformación lineal f que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^2$ su proyección sobre V paralelamente a U. Determina la matriz estándar asociada a f. Dtermina la imagen del vector $\vec{v} = (1,1)$.

22. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano XY. Determina la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

23. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano XY. Determina la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

24. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x+y+z=0$. a) Determina la matriz más sencilla posible asociada a f respecto a una base, la misma en los espacios inicial y final, e indica cual es dicha base. b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

25. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x+y+z=0$. a) Determina la matriz más sencilla posible asociada a f respecto una base, la misma en espacio inicial y final, e indica cual es dicha base. b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

26. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la transformación lineal correspondiente a la rotación de un ángulo de 30 grados en sentido contrario al de las agujas del reloj. Determina la matriz asociada respecto de la base canónica.

27. **MATLAB** En este ejercicio se estudia la composición de dos aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^2$, realizándose en primer lugar una rotación de un ángulo ϕ en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y después una simetría o reflexión respecto del eje X. La transformación se aplica sobre los vértices de un triángulo. Se representan gráficamente los vértices iniciales y los transformados en los dos pasos.

```
% EN R2: COMPOSICION DE UNA REFLEXION Y DE UNA ROTACION
Dat=[ [5 10]' [3 17]' [8 10]' [5 10]']
figure(1)
axis equal, hold on, grid on
axis([-20 20 -20 20])

plot(Dat(1,:),Dat(2,:),'ko-')

% DAR ANGULO FI:
%
% ESCRIBIR LA MATRIZ DE ROTACION R
%
% ESCRIBIR LA MATRIZ DE LA REFLEXION S RESPECTO DEL EJE X
%

% Rot=R*Dat
% plot(Rot(1,:),Rot(2,:),'rs-')

% RRo=S*R*Dat
% plot(RRo(1,:),RRo(2,:),'gs-')

quiver(0,0,5,10)  % dibuja vector correspondiente al primer dato
%quiver(0,0,Rot(1,1),Rot(2,1)) % vector rot. del primer dato
%quiver(0,0,RRo(1,1),RRo(2,1)) % vector rot. y despues reflej. del primer dato

plot([-20 20],[ 0   0],'-k')  % dibuja eje X
plot([  0  0],[-20 20],'-k')  % dibuja eje Y
```