Lección 4

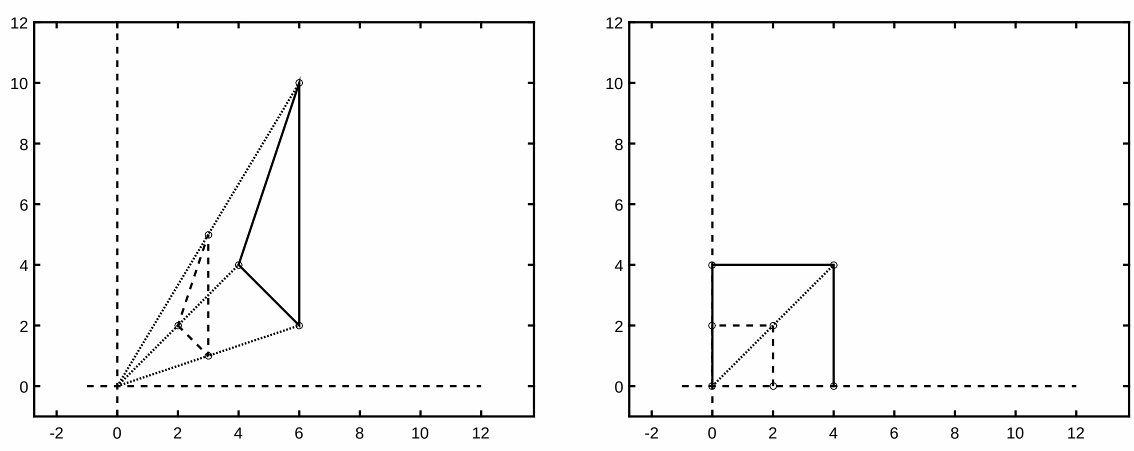
Endomorfismos en $\mathbb{R}^n$ con interpretación geométrica sencilla

4.1 Escalamiento uniforme o isótropo

$f(\vec{x}) = k\vec{x} \quad \text{con } k > 0 \in \mathbb{R}$ La matriz asociada es la matriz escalar $A = kI$

Habíamos visto que para k positivo menor que 1 la transformación también se denomina compresión o contracción, y para k positivo mayor que 1, dilatación o expansión.

Para $k = 1$ la transformación es la identidad, y la matriz asociada la identidad, para cualquier base.



Izquierda: Escalamiento en $\mathbb{R}^2$ de factor 2. El triángulo en línea discontinua es la figura original. El triángulo se define por los tres vértices. Transformando los tres vértices con el escalamiento se obtiene el triángulo transformado, en trazo continuo.

Derecha: Se presenta el mismo escalamiento en $\mathbb{R}^2$, aplicado a la transformación de un cuadrado.

4.2 Escalamiento no uniforme o anisótropo

Similar al anterior, salvo que k no tiene porque ser igual en las n direcciones independientes.

La matriz asociada respecto de una base sobre esas n direcciones independientes es una matriz diagonal. Los elementos de la diagonal son los factores de escala en cada dirección.

Ejemplo: contracción/dilatación unidireccional vertical en $\mathbb{R}^2$

Vertical (eje Y) $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$

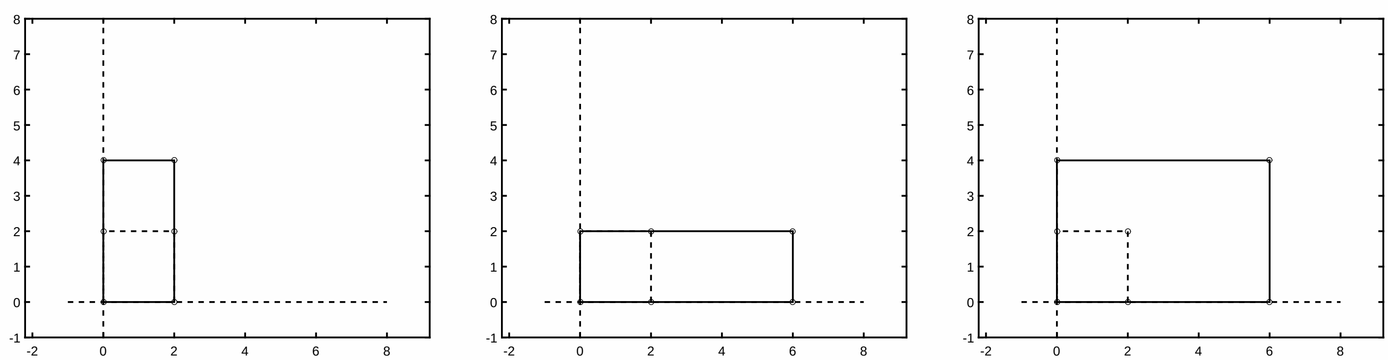
Ejemplo: contracción/dilatación unidireccional horizontal en $\mathbb{R}^2$

Horizontal (eje X) $\qquad A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$

Ejemplo: distintos escalamientos en la dirección horizontal y vertical en $\mathbb{R}^2$

$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ k'y \end{bmatrix}$

Se muestran gráficos correspondientes a 1) Una expansión vertical, 2) Una expansión horizontal y 3) Una expansión con escalas distintas en las direcciones horizontal y vertical.



4.3 Simetría respecto del origen

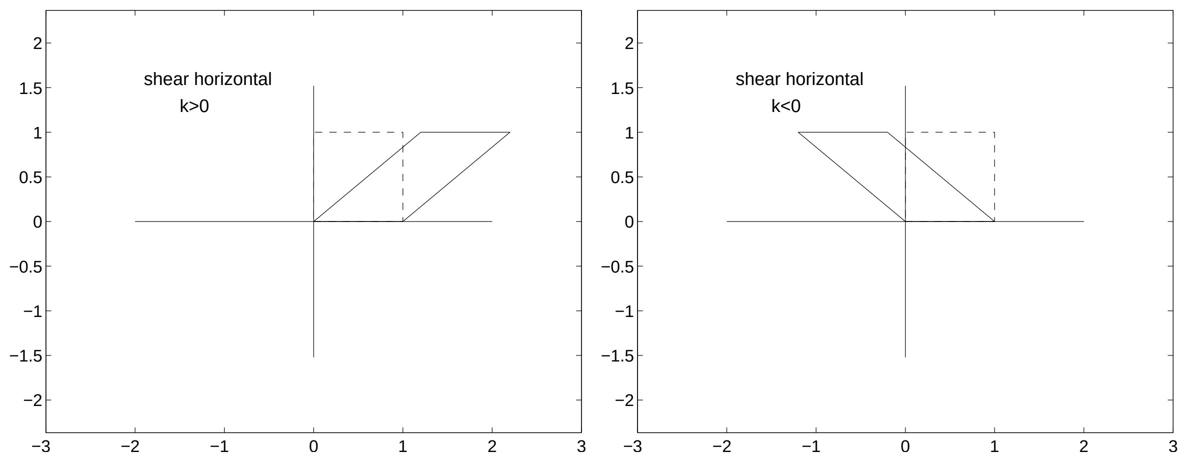
$f(\vec{x}) = -\vec{x}$

La matriz asociada relativa a cualquier base es la opuesta a la identiddad. $A = -I$.

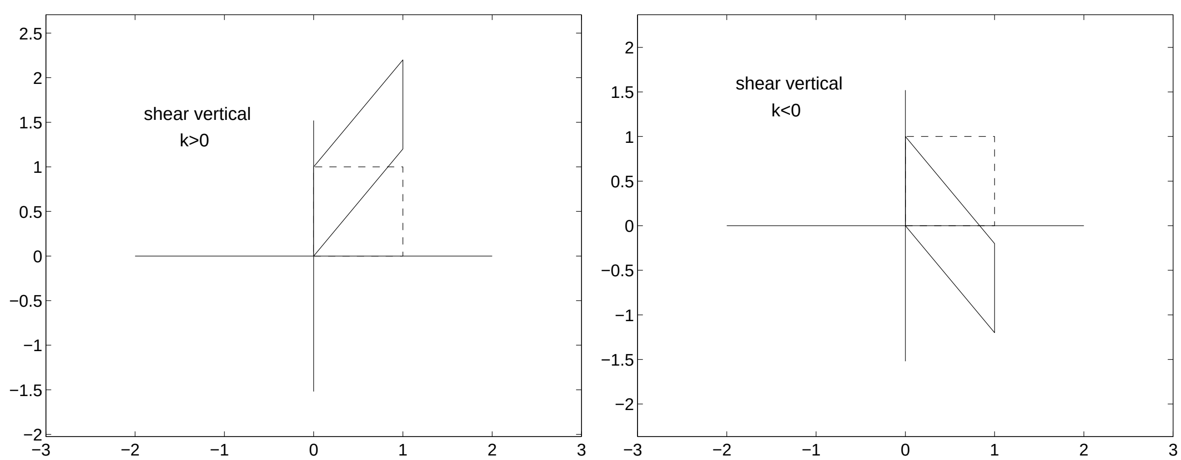
4.4 Cizalladura ("shear") en $\mathbb{R}^2$

Todas las líneas paralelas a una línea fija se trasladan paralelamente a la línea fija en una cantidad proporcional a la distancia entre la línea y la línea fija.

"shear" horizontal $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $k \neq 0$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$



"shear" vertical $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ con $k \neq 0$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$



4.5 Giro (o rotación) en $\mathbb{R}^2$ de centro en el origen y ángulo α

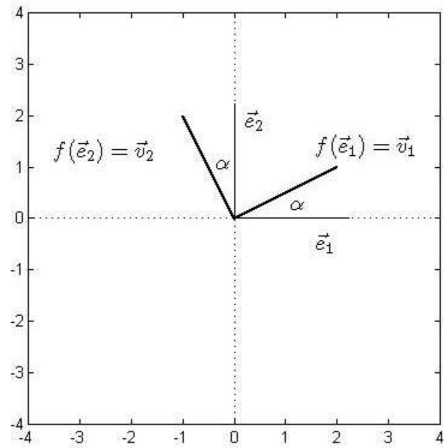
La matriz de este endomorfismo respecto de la base canónica es:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

En efecto:

$f(\vec{e_1}) = \cos\alpha\vec{e}_1 + \text{sen}\alpha\vec{e}_2$

$f(\vec{e_2}) = -\text{sen}\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha\vec{e}_2$



Es un **giro de centro** $(0,0)$ **y ángulo** α: $-\pi < \alpha \leq \pi$

$0 \leq \alpha \leq \pi$ en el sentido antihorario o positivo

$-\pi < \alpha < 0$ en el sentido horario o negativo

- $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$
- $R_\alpha^{-1} = R_\alpha^t$ (es matriz ortogonal)

Ejemplo 4.1. *Giro en el plano, respecto del punto (0,0), del cuadrado de vértices (0,0),(1,0),(1,1) y (0,1), un ángulo $\pi/3$ (60 grados) en el sentido horario.*

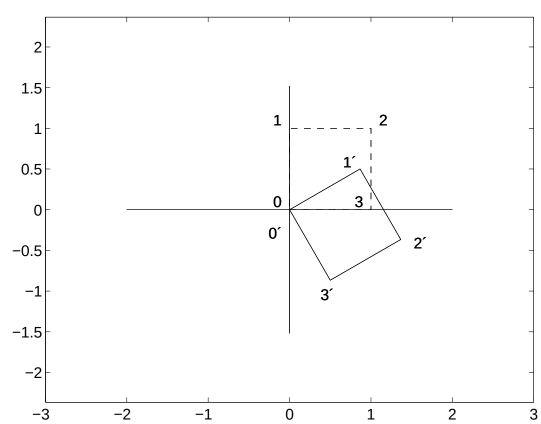
Matriz estándar asociada: $$R = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\text{sen}(-\pi/3) \\ \text{sen}(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ -\text{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\sqrt{3})/2 \\ (1-\sqrt{3})/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

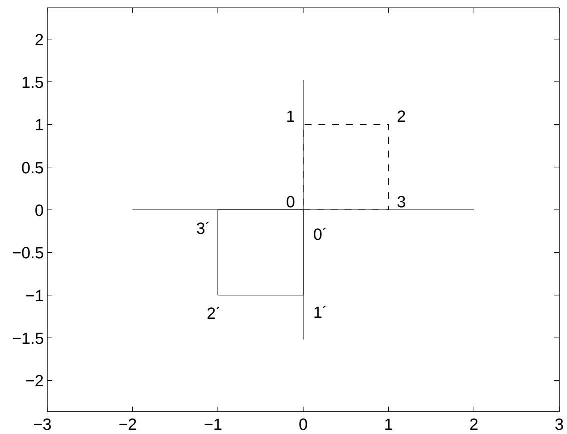


Ejemplo 4.2. *El giro en el plano de* $\alpha = 180$ *grados corresponde a la simetría respecto del origen en el plano.*

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

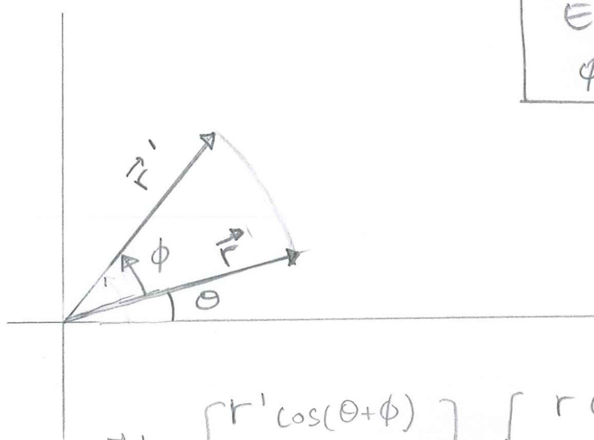
$R = -I$ *en cualquier base*



Ejemplo 4.3. *El giro en el plano de* $\alpha = 0$ *grados es la matriz identidad.*

Otra deducción de la matriz de rotación o de giro:

En $\mathbb{R}^2$, giro de ángulo ϕ respecto del origen



$$\vec{r}\,' = \begin{bmatrix} r' \cos(\theta+\phi) \\ r' \operatorname{sen}(\theta+\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\operatorname{sen}(\theta+\phi) \end{bmatrix} =$$

$$r' = r$$

$$\begin{bmatrix} r(\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) \\ r(\cos\phi\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi \\ y\cos\phi + x\operatorname{sen}\phi \end{bmatrix}$$

sustituyendo $r\cos\theta = x$, $r\operatorname{sen}\theta = y$

$$\vec{r}\,' = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi \\ x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{R_\phi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

R_ϕ Matriz de giro de ángulo ϕ en sentido antihorario.

4.6 Proyección ortogonal y simetría ortogonal sobre/respecto a hiperplano en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$. Los hiperplanos vienen dados por una única ecuación implícita.

- En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

Nótense las siguientes propiedades de las matrices Pr y S:

$PrPr = Pr$, es decir, Pr es idempotente.

$SS = I$, es decir, S es involutiva.