

Lección 2

Composición de aplicaciones lineales y aplicaciones invertibles

2.1 Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales

$$g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

$$f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$$

$$g(\vec{x}) = B_{p \times n} \vec{x}$$

$$f(\vec{y}) = A_{m \times p} \vec{y}$$

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

$$f(g(\vec{x})) = A_{m \times p} B_{p \times n} \vec{x}$$

la matriz asociada a $f \circ g$ es $(A.B)_{m \times n}$

Nótese como las matrices se escriben en el mismo orden que las funciones.

$$h = f \circ g \quad h(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$$

Ejemplo 2.1. Considerados los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$f(x, y, z) = (-z, x - y + z, x), \quad g(x, y, z) = (0, x + y + z, 0),$$

obté la matriz asociada a la aplicación compuesta $g \circ f$.

Sol.

Denotando las matrices asociadas a f y g como F y G , respectivamente, tenemos:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{La matriz buscada es: } G \circ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta forma, $(G \circ F)(\vec{x}) = G \circ F \vec{x}$

Nótese como la última que actúa es la que se encuentra más a la izquierda.

2.2 Aplicaciones lineales invertibles

Definición 2.1. Un endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ se dice que es invertible si existe un endomorfismo s en $\mathbb{R}^n$ tal que:

$s(f(\vec{x})) = f(s(\vec{x})) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, y en tal caso se dice del endomorfismo s que es el inverso de f , y se le denota como f^{-1} .

Teorema 2.1. Si existe endomorfismo inverso de f , éste es único.

Teorema 2.2. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ y sea A la matriz estándar asociada a f . Entonces f es invertible $\Leftrightarrow A$ es invertible. En este caso la matriz asociada a f^{-1} es A^{-1} , es decir, $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$.

Teorema 2.3. El endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ es invertible $\Leftrightarrow$ es biyectivo.