Lección 1

Definición y ejemplos. Matriz estándar asociada. Núcleo e imagen

1.1 Definición de aplicación entre espacios vectoriales

Definición 1.1. *Una* **aplicación** f *del espacio vectorial* V *sobre* $\mathbb{K}$ *en el espacio vectorial* W *sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ *es una ley que asigna a cada elemento* $v \in V$ *un elemento* $w = f(v)$ *de* W*.*

Todos los elementos de V tienen una imagen y sólo una.

A $f(v)$ se le denomina **imagen** de v.

v es el **antecedente** de $f(v)$.

Al espacio vectorial V se le designa como espacio vectorial inicial y a W como espacio vectorial final.

Se utiliza la notación
$$\begin{aligned} f : V &\longmapsto W \\ v &\longmapsto w = f(v) \end{aligned}$$

Definición 1.2. *Se denomina* **imagen de f***:* $V \longmapsto W$*, y se denota* $\mathrm{Im}f$*, al conjunto*
$\mathrm{Im}f = \{f(v) \ / \ v \in V\}$.

$\mathrm{Im}f$ *es el conjunto formado por todos los vectores del espacio final que tienen antecedente.*

1.2 Definición de aplicación lineal

Definición 1.3. *Una* **aplicación** $f : V \longmapsto W$ *se dice* **lineal** *si cumple los siguientes axiomas.*

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$$
$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

<u>Propiedades</u>

1) $f(0_V) = 0_W$

Dem. $\quad f(0_V) = f(0\ v) = 0\ f(v) = 0_W$

2) $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

Dem. $\quad f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

Nota: La propiedad 2) y la definición de aplicación lineal son equivalentes. Dicho de otra forma, la propiedad 2) se podría haber adoptado como definición de Aplicación Lineal. En este caso los axiomas de la Definición 3 serían propiedades derivadas.

3) **Principio de superposición**, sin más que aplicar 2) repetidas veces:

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + \ldots + c_p f(v_p)$$

Esta propiedad pone de manifiesto que para conocer la imagen de un vector de V basta con conocer las imágenes de los vectores de una base de V, y las coordenadas del vector respecto de dicha base.

La imagen de un vector resulta ser la combinación lineal de las imágenes de los vectores base, tomando como coeficientes de la combinación lineal las coordenadas del vector respecto de la base.

Para las aplicaciones lineales se utilizan al menos otros dos nombres: **transformaciones lineales** y homomorfismos. $f(v)$ también puede designarse como "transformado" de v.

Cuando el espacio inicial y el espacio final coinciden las aplicaciones lineales también se designan como **endomorfismos**.

Definición 1.4. *El endomorfismo f de V en V tal que $f(v) = v \quad \forall v \in V$ se denomina* **endomorfismo identidad**.

En los libros de texto este endomorfismo aparece denotado con frecuencia como $id(u)$, o $id(\vec{x})$ si se trabaja sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

EN LO QUE SIGUE TRATAREMOS APLICACIONES LINEALES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$, AMBOS ESPACIOS VECTORIALES SOBRE EL CUERPO $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{y} = f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. *Determina si la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$ es o no aplicación lineal.*

Sol:

Demostraremos que f cumple la propiedad 2).

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(x'_1, x'_2, x'_3)) = \\
&f(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_2 + \mu x'_2, \lambda x_3 + \mu x'_3) = \\
&(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_3 + \mu x'_3) = \\
&(\lambda x_1, \lambda x_3) + (\mu x'_1, \mu x'_3) = \\
&\lambda(x_1, x_3) + \mu(x'_1, x'_3) = \lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu f(x'_1, x'_2, x'_3)
\end{aligned}$$

queda demostrado que f cumple la propiedad 2) y que es por tanto aplicación lineal.

Ejemplo 1.2. *Determina si la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3 + 1)$ es o no aplicación lineal.*

Sol:

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(x'_1, x'_2, x'_3)) = \\
&f(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_2 + \mu x'_2, \lambda x_3 + \mu x'_3) = \\
&\boxed{(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_3 + \mu x'_3 + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu f(x'_1, x'_2, x'_3) = \\
&\lambda(x_1, x_3 + 1) + \mu(x'_1, x'_3 + 1) = \\
&\boxed{(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_3 + \mu x'_3 + \lambda + \mu)}
\end{aligned}$$

Las expresiones encuadradas no son iguales para todo λ y para todo μ (solo si $\lambda + \mu = 1$), por tanto f no es aplicación lineal.

1.3 Ejemplos de aplicaciones lineales sencillas

Ejemplo 1.3. Contracción

$f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(\vec{x}) = r\vec{x}$ *con* $0 < r < 1$

Ej. $f(\vec{x}) = 0.2\ \vec{x}$. *Asigna a un vector otro de igual dirección y sentido pero de norma menor (en un factor 0.2).*

Ejemplo 1.4. Dilatación

$f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(\vec{x}) = r\vec{x}$ *con* $r > 1$

Ej. $f(\vec{x}) = 30\ \vec{x}$. *Asigna a un vector otro de igual dirección y sentido pero de norma mayor (en un factor 30).*

Se utilizan también los nombres de expansión y compresión. r se denomina razón o factor de dilatación/expansión o de contracción/compresión.

Estos ejemplos se podrían generalizar al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Asimismo, el caso $r = 1$ correspondería al endomorfismo identidad: $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

Es sencillo demostrar gráficamente que estas aplicaciones son aplicaciones lineales, es decir, que $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ para todo $\vec{x}$ y todo $\vec{y}$, y que $f(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ para todo $\vec{x}$ y para todo λ.

1.4 Matriz estándar asociada a una aplicación lineal

Analicemos un ejemplo sencillo como la aplicación lineal dilatación de un factor 3 en $\mathbb{R}^2$, que se escribe como $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$

Expresemos el vector $\vec{x}$ cómo combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = f(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = x_1\ f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2\ f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Las imágenes de los vectores base son $f(1,0)$ y $f(0,1)$, respectivamente $(3,0)$ y $(0,3)$, y también están en coordenadas referidas a la base estándar.

Por tanto $f(\vec{x}) = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, y denotando las coordenadas estándar de $f(\vec{x})$ como (y_1, y_2) la expresión que queda es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{, por tanto,} \quad \underset{\vec{y}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

Vemos como la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ queda definida por la matriz real $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\vec{y} = f(\vec{x})$ pasa a ser $\vec{y} = A\vec{x}$, que también podemos escribir como $f(\vec{x}) = A\vec{x}$

A es la denominada **matriz estándar de la aplicación lineal** f, porque hace corresponder al vector de coordenadas $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^2$, el vector de coordenadas $\vec{y} = f(\vec{x})$ relativas a la base estándar del espacio final $\mathbb{R}^2$.

Nótese que las columnas de A son $f(\vec{e}_1)$ y $f(\vec{e}_2)$.

En este ejemplo $A = 3I$, y efectivamente $f(\vec{x}) = 3\ \vec{x} = 3\ I\ \vec{x}$, por tanto el resultado $A = 3\ I$ se podía conocer desde el inicio del ejemplo. Lo destacable es que, por ser f aplicación lineal, para determinar la matriz A con la que calcular $f(\vec{x})$, cualquiera que sea $\vec{x}$, solo ha hecho falta conocer las imágenes de los vectores base, es decir, $f(1,0)$ y $f(0,1)$.

De forma general, para toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{y} = f(\vec{x})$ ésta se expresará como $\vec{y} = A_{m\times n}\ \vec{x}$. f hace corresponder al vector de $\mathbb{R}^n$ de coordenadas canónicas $\vec{x}$, el vector de $\mathbb{R}^m$ de coordenadas canónicas $\vec{y}$. Las columnas de A son las coordenadas canónicas de las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

A cada aplicación lineal le corresponderá una matriz A única, y recíprocamente a cada matriz $A_{m\times n}$ le corresponderá una aplicación lineal f única de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Se tratará este resultado en el Teorema 1.1.

Es fácil entender que una aplicación de la forma $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ es lineal, ya que por las propiedades de operaciones con matrices hemos visto que:
$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $A(\lambda\vec{u}) = \lambda A\vec{u}$

En el Tema 2 sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales habíamos tratado la ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ para determinar, dados $A_{m\times n}$ e $\vec{y}_{m\times 1}$, la solución $\vec{x}_n$. La ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ también se puede entender desde otro punto de vista, pensando en A como un operador o función que actúa sobre $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, multiplicándose a él por la izquierda, para producir el vector imagen $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. La ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ define por tanto la aplicación lineal que al vector de $\mathbb{R}^n$ de coordenadas estándar $\vec{x}$ le hace corresponder el vector de $\mathbb{R}^m$ de coordenadas estándar $\vec{y}$.

Dada f con matriz asociada A, para calcular la imagen de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ debemos efectuar $A\vec{x}$, es decir, premultiplicar por A.

Para determinar si $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ tiene antecedente o antecedentes respecto de la aplicación lineal f, y en su caso hallarlos, debemos estudiar, y en su caso resolver, el SL de matriz ampliada $[\ A \mid \vec{y}\ ]$.

Volviendo al caso de los endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ y tomando uno cualquiera f, la expresión de la matriz asociada se deduciría simplemente así :

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$

$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2)$.

Entendiendo que $f(\vec{e}_i)$ es el vector imagen expresado en coordenadas canónicas, $f(\vec{x})$ también quedará expresado en coordenadas canónicas, y denotamos esas coordenadas como: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Por tanto la ecuación de la aplicación lineal queda:

$$\underset{\vec{y}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} = \underset{A}{[\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ ]} \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

Las columnas de A son los transformados de la base estándar del espacio inicial, expresados en coordenadas estándar en el espacio final. (En este caso la base estándar es la misma porque el espacio inicial y final es el mismo, $\mathbb{R}^2$, por tanto tienen la misma base canónica).

Obtención de la matriz estándar $A_{m\times n}$ asociada a una aplicación lineal

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Entonces existe una única matriz A tal que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$. En efecto A es la matriz $m \times n$ cuya columna j es el vector $f(\vec{e}_j)$, donde $\vec{e}_j$ es la columna j de la matriz identidad de orden n.*

$A = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ]$

Demostración: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \quad$ **[1]** $\qquad \vec{y} = y_1\vec{e'}_1 + y_2\vec{e'}_2 + \ldots + y_m\vec{e'}_m \quad$ **[2]**
Hemos utilizado la notación con 'prima' para la base canónica de $\mathbb{R}^m$ para distinguirla de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, ya que el número de componentes de los vectores $\vec{e}_j$ de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{e'}_j$ de $\mathbb{R}^m$ es diferente.

Expresando $\vec{x}$ respecto de la base canónica, y utilizando el hecho de que la aplicación es lineal, se tiene:

$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$

Seguidamente, expresando los vectores $f(\vec{e_i})$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^m$, tenemos:

$\vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) = x_1(a_{11}\vec{e'}_1 + a_{21}\vec{e'}_2 + \ldots + a_{m1}\vec{e'}_m) + x_2(a_{12}\vec{e'}_1 + a_{22}\vec{e'}_2 + \ldots + a_{m2}\vec{e'}_m) + \ldots + x_n(a_{1n}\vec{e'}_1 + a_{2n}\vec{e'}_2 + \ldots + a_{mn}\vec{e'}_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\vec{e'}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\vec{e'}_2 + \ldots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)\vec{e'}_m$

Por tanto hemos llegado a la expresión de $\vec{y} = f(\vec{x})$ como combinación lineal de los vectores de la base $\{\vec{e'_1}, \ldots, \vec{e'_m}\}$. Igualando esa expresión a **[2]** se obtienen las siguientes m ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 \ + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right. \quad [3] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$[\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$A\ \vec{x} = \vec{y}$$

$\square$

$A_{m\times n}$ se denomina matriz estándar de la aplicación lineal f, porque hace corresponder a las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^n$ las coordenadas de $f(\vec{x}) = \vec{y}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^m$.

$A = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ]$ pone de manifiesto cómo, en una aplicación lineal, conocida la imagen de una base se podrá determinar la imagen de cualquier vector.

Recordemos que $f(\vec{e_i})$ son las coordenadas de ese vector imagen respecto de la base estándar de $\mathbb{R}^m$.

Ecuaciones estándar de la aplicación lineal.

Las ecuaciones **[3]** se denominan **Ecuaciones estándar de la Aplicación Lineal**. No son más que el conjunto de las m ecuaciones "escalares" correspondientes a la ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{y}$.

Las m ecuaciones (una por cada componente del vector imagen $\vec{y}$) permiten obtener las coordenadas estándar del vector imagen, $(y_1, y_2, ..., y_m)$, a partir de las coordenadas estándar del vector origen o antecedente $(x_1, x_2, ..., x_n)$. La expresión de $A\vec{x}$ da lugar, obviamente, a ecuaciones lineales en las variables x_i.

En el ejemplo del endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$,

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Por tanto las ecuaciones son las siguientes: $\begin{cases} y_1 = 3x_1 \\ y_2 = 3x_2 \end{cases}$

Matriz asociada al endomorfismo identidad

La matriz asociada al endomorfismo identidad en $\mathbb{R}^n$ es la matriz identidad I_n ya que $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ $\forall i = 1, ..., n$

1.5 Los subespacios Im f y Ker$f$. Dimensiones

1.5.1 El subespacio Im f

Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$,

$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$

$\Rightarrow \text{Im}f = \{f(\vec{x}) \ / \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} =< f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n) >$

Recordemos que $A = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ]$

Por tanto Imf= Col$A$

- La base de Imf se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{\ f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2), \ldots,\ f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, los vectores correspondientes a las columnas no pivotales de A.
- dim Imf=rg$A$

Imf siempre tiene al menos un elemento, que es el vector $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$, ya que la imagen del vector cero de $\mathbb{R}^n$ es el vector cero de $\mathbb{R}^m$.

1.5.2 Núcleo de una aplicación lineal

Definición 1.5. *Se denomina* **núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$*, y se denota* Ker$f$*, al conjunto* $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \ / \ \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Teniendo en cuenta que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, siendo A la matriz estándar asociada a f, **Ker** f **= Nul** A

1.5.3 Dimensiones de Imf y Ker$f$

Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, con matriz asociada A. Teniendo en cuenta que Imf=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f}$$

$$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

1.6 Aplicación lineal inyectiva y sobreyectiva

- $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ es **inyectiva** si:
  $\forall \vec{x}, \vec{x'} \in \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) = f(\vec{x'}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{x'}$

  Es decir, si cada $\underline{\vec{y} \in \mathrm{Im} f}$ tiene un único antecedente.

  Se puede dar también la siguiente definición equivalente. f es inyectiva si:
  $\forall \vec{x}, \vec{x'} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \neq \vec{x'} \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{x'})$

- $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ es **sobreyectiva** si:
  $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^m\ \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = \vec{y}$. Es decir, si todos los vectores de $\mathbb{R}^m$ tienen antecedente.

  Es decir, f es sobreyectiva si $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^m$.

  f no es sobreyectiva cuando existe algún $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ sin antecedente.

  A una aplicación lineal sobreyectiva también se le puede denominar aplicación lineal sobre, suprayectiva o exhaustiva.

Si la aplicación lineal f es inyectiva y sobreyectiva a la vez se dice que es **biyectiva**. En este caso, todo vector del espacio final tiene un antecedente y sólo uno. Las aplicaciones lineales biyectivas también reciben el nombre de isomorfismos.

<u>Relación del carácter inyectivo y/o sobreyectivo de f con el rango de A y con las dimensiones de núcleo e imagen</u>

Consideremos la aplicación lineal f de ecuación:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{m\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\vec{y}}$$

- f es inyectiva $\Leftrightarrow$ el SL anterior **no** puede ser compatible indeterminado para ningún valor de $\vec{y} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = n \Leftrightarrow \mathrm{Nul}A = \{\vec{0}\}$

- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ el SL anterior **es** compatible para todo $\vec{y} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = m \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ f\ (= \mathrm{Col}A) = \mathbb{R}^m$

Para que f sea inyectiva y sobreyectiva a la vez (biyectiva) el rango tiene que coincidir tanto con el número de filas como con el número de columnas de A, por tanto f ha de ser endomorfismo, con matriz asociada A_n de rango n, o lo que es lo mismo, con matriz asociada A_n invertible.

Si f es endomorfismo con $\mathrm{rg}A < n$ entonces f no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Por tanto los endomorfismos o son biyectivos o no son ni inyectivos ni sobreyectivos.

1.7 Ejemplos de ejercicios

Ejemplo 1.5. *Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ definida como $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.*
a) Determina $f(1,1,1,1)$, $f(1,4,-1,3)$, $f(0,0,0,0)$ y $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$. b) Justifica si la aplicación es inyectiva o no y si es sobreyectiva o no.

Sol:

a)

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(1,1,1,1) = (5,8) \qquad f(1,4,-1,3) = (0,0) \qquad f(0,0,0,0) = (0,0)$$

Obtengamos ahora la imagen de un vector genérico $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

Denotando $f(\vec{x}) = \vec{y}$, tenemos que las componentes de $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ son:

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ y_2 = 2x_1 + 5x_3 + x_4 \end{cases}$$

b)

Vemos que la aplicación proporciona la misma imagen (0,0) para dos vectores de $\mathbb{R}^4$ distintos, por tanto f no es inyectiva. No obstante analizamos la clasificación de la aplicación de forma sistemática estudiando el SL:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 3 & y_1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & y_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 3 & y_1 \\ 0 & 3/2 & -9/2 & -1/2 & y_2 - y_1/2 \end{array}\right]$$

El SL es compatible (rgA=rgA=2) indeterminado, para todo vector (y_1, y_2). Por ser compatible para todo $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ la aplicación es sobreyectiva (todo vector del espacio final tiene antecedente) y por ser indeterminado es no inyectiva (más de un antecedente).*

Otro razonamiento es el siguiente: Teniendo en cuenta que rgA=2, la aplicación no es inyectiva porque tendría que ser 4, y sí es sobreyectiva porque para serlo el rango tiene que ser 2.

Ejemplo 1.6. *Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (5, -7, 2)$ y $f(\vec{e}_2) = (-5, 8, 0)$. a) Encuentra la matriz A tal que $\vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$ para un vector genérico $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, y las ecuaciones de la aplicación lineal. b) Analiza si f es inyectiva y si es sobreyectiva. Obtén la forma implícita de Imf.*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) = x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 5x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x1 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *(Como era de esperar ya que $A = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \end{bmatrix}$. En efecto, podríamos haber escrito directamente la matriz A a partir de las imágenes de $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$).*

Las ecuaciones de la aplicación lineal son: $\begin{cases} y_1 = 5x_1 - 5x_2 \\ y_2 = -7x_1 + 8x_2 \\ y_3 = 2x_1 \end{cases}$

Nótese que la imagen de $\vec{x}$ también se podría expresar así:

$$f(x_1, x_2) = (5x_1 - 5x_2, -7x_1 + 8x_2, 2x_1)$$

Dado un vector $\vec{x}$ de coordenadas (x_1, x_2), su imagen es la combinación lineal de los vectores $(5, -7, 2)$, $(-5, 8, 0)$ con coeficientes x_1, x_2. Ya que los vectores imagen son las combinaciones lineales de dos vectores linealmente independientes (uno no es múltiplo del otro), los vectores imagen se encontrarán en un plano de $\mathbb{R}^3$, no en todo $\mathbb{R}^3$, por tanto la a.l. **no es sobreyectiva**. *Nótese rgA=2, y debería ser 3 para ser sobreyectiva.*

Ya que rgA es 2 y en las ecuaciones de la a.l. tenemos dos incógnitas, la aplicación **es inyectiva***: cada vector del conjunto imagen tiene un único antecedente.*

Obtención de la ecuación implícita del plano formado por los vectores imagen:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & | & y_1 \\ -7 & 8 & | & y_2 \\ 2 & 0 & | & y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -5 & | & y_1 \\ 0 & 1 & | & 7/5y_1 + y_2 \\ 0 & 2 & | & -2/5y_1 + y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -5 & | & y_1 \\ 0 & 1 & | & 7/5y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & | & -16/5\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

Ecuación implícita $16\ y_1 + 10\ y_2 - 5\ y_3 = 0$

Ejemplo 1.7. *Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 3, -1)$ y $f(\vec{e}_2) = (-3, 5, 7)$.*

a) Encuentra la matriz estándar A asociada a la aplicación lineal y las ecuaciones de la aplicación lineal.
b) Encuentra la imagen de $\vec{u} = (2, -1)$ bajo la aplicación lineal f.
c) Encuentra un $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea $\vec{b} = (3, 2, -5)$.
d) ¿Hay más de un $\vec{x}$ cuya imagen por f sea $\vec{b}$?.
e) Determina si $\vec{c} = (3, 2, 5)$ tiene antecedente.
f) Clasifica la aplicación respecto a inyectividad y sobreyectividad.

Sol:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Las ecuaciones de la aplicación lineal son: $\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2 \\ y_3 = x_1 + 7x_2 \end{cases}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

Hay que resolver el sistema de matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 3 & 5 & | & 2 \\ -1 & 7 & | & -5 \end{bmatrix}$. *Un sistema equivalente en la forma escalonada es:* $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$. *El SL es compatible determinado, con solución $x_2 = -1/2$ y $x_1 = 3/2$. $\vec{x} = (3/2, -1/2)$*

d) El SL anterior es determinado, por tanto sólo hay un $\vec{x}$ cuya imagen sea $\vec{b}$, que es $\vec{x} = (3/2, -1/2)$.

e) Hay que resolver el sistema de matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 3 & 5 & | & 2 \\ -1 & 7 & | & 5 \end{bmatrix}$. *Un sistema equivalente en forma escalonada es:* $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & -5 \end{bmatrix}$. *El SL es incompatible, por tanto $\vec{c} \notin Imf$*

f) La aplicación lineal no es sobreyectiva, ya que dimf =rgA=2, que es menor que la dimensión del espacio final. Además acabamos de ver como el vector $\vec{c}$ del apartado anterior no tiene antecedente. La aplicación sí es inyectiva porque el rango de A coincide con la dimensión del espacio inicial.

Ejemplo 1.8. *Dada la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 5}.$$

a) ¿ Cual es la imagen del vector $(0,0,0,1,0)$?.

b) Obtén la dimensión del núcleo y una base B del mismo.

c) Obtén la dimensión y una base C de Imf

d) Obtén la forma implícita de Imf

e) Obtén una base C' de Imf, lo más sencilla posible. (Pista: Haz uso de la forma implícita obtenida en el apartado anterior.)

f) Clasifica f respecto de la inyectividad y sobreyectividad

g) Encuentra un antecendente $\vec{v}$ del vector $\vec{w} = (-9,8,19)$, si $\vec{w}$ pertenece a Imf.

<u>Sol:</u>

a) $f(0,0,0,1,0) = (1,3,8)$, sin más que multiplicar la matriz por el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(O 'leyendo' la quinta columna de A, que es la imagen de $\vec{e_4}$).

b) $\mathrm{Ker} f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \;\; / \;\; A\vec{x} = \vec{0}\}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} * & \quad & * & \quad & \quad & \quad \end{array} \end{array}$$

Hemos llegado hasta la forma escalonada reducida, porque simplificará la resolución del sistema.

*Las columnas señaladas con * son columnas pivotales. rgA=2. Deducimos entonces que dim Ker f = 3, pues dim Kerf = 5 - rgA = 5 - 2 = 3*

Para obtener la base del núcleo tenemos que resolver el sistema. Tomaremos las incógnitas correspondientes a las columnas no pivotales como parámetros libres.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 &= x_4 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underset{\vec{u}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_4 \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_5 \underset{\vec{w}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad \mathrm{Ker} f = <\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}>$$

Los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes pues $\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow x_2 = x_4 = x_5 = 0$ (no hay más que fijarse en las componentes 2, 4 y 5), por tanto B=$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de Kerf.

c) Imf $= Col\ A = < \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ ...\ \vec{a}_5\ >$

Para obtener la base de Imf hay que eliminar del conjunto $\{\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_5\ \}$ *los vectores l.d. El subconjunto máximo de vectores l.i. lo podemos obtener tomando las columnas de A* $\vec{a}_1$ *y* $\vec{a}_3$*, pues son columnas pivotales en una forma escalonada por filas de la matriz.*
$\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ *y* $\vec{a}_5$ *son c.l. de* $\vec{a}_1$ *y* $\vec{a}_3$.

Tomamos por tanto la base de Imf: $C = \{(-3,1,2),(-1,2,5)\}$ *dim Imf = rgA = 2*

Nótese que cualquier par de vectores l.i. del conjunto forma base.

d) Los vectores de $\mathrm{Im} f$ *son los* $\{\vec{y} \in \mathbb{R}^3\ \ /\ \ A\vec{x} = \vec{y}$ *tiene solución* $\}$*. O lo que es lo mismo, los* (y_1, y_2, y_3) *que son combinación lineal de los vectores de la base de Imf. Por tanto los* (y_1, y_2, y_3) *tales que rango de* $\begin{bmatrix} -3 & -1 & | \; y_1 \\ 1 & 2 & | \; y_2 \\ 2 & 5 & | \; y_3 \end{bmatrix}$ *es 2.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; y_2 \\ -3 & -1 & | \; y_1 \\ 2 & 5 & | \; y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; y_2 \\ 0 & 5 & | \; 3y_2 + y_1 \\ 0 & 1 & | \; y_3 - 2y_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; y_2 \\ 0 & 1 & | \; (3y_2 + y_1)/5 \\ 0 & 1 & | \; y_3 - 2y_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & y_2 \\ 0 & 1 & | & (y_1 + 3y_2)/5 \\ 0 & 0 & | & (-y_1 - 3y_2)/5 - 2y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

$(-y_1 - 3y_2)/5 - 2y_2 + y_3 = (-y_1 - 13y_2 + 5y_3)/5$

La forma implícita de Imf es: $\boxed{-y_1 - 13y_2 + 5y_3 = 0}$.

Para asegurarnos de que la ecuación es correcta conviene hacer la comprobación de que los vectores base $(-1,2,5)$ *y* $(-3,1,2)$ *la cumplen.*

e) Resolviendo la ecuación implícita $\boxed{-y_1 - 13y_2 + 5y_3 = 0}$*, obtendremos una base de Imf.*

Tomando como incógnita principal y_1*, despejamos* $y_1 = -13y_2 + 5y_3$*, y de esta expresión deducimos la solución general:*

$$\begin{bmatrix} -13y_2 + 5y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_2 \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ *Una base sencilla de Imf es* $C' = \{(-13,1,0),(5,0,1)\}$

f) La aplicación no es inyectiva porque el rango de A es inferior a 5, ya que $m = 3$*. La aplicación no es sobreyectiva porque para ello el rango de A tendría que ser 3, y es 2.*

g) $\vec{w} = (-9,8,19)$ *pertenece a Imf si* $[A|\vec{w}]$ *es compatible.*

Planteamos el SL siguiente, tomando en A solo las columnas pivotales (x_2, x_4 *y* x_5 *corresponden a columnas no pivotales y por tanto son parámetros libres que podemos tomar como cero para simplificar operaciones).*

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & -1 & | -9 \\ 1 & 2 & | \; 8 \\ 2 & 5 & | 19 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; 8 \\ -3 & -1 & | -9 \\ 2 & 5 & | 19 \end{bmatrix} \sim ... \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | \; 2 \\ 0 & 1 & | \; 3 \\ 0 & 0 & | \; 0 \end{bmatrix}$$

Comprobamos que $\vec{w}$ *sí pertenece a Imf, ya que el SL es compatible, y además deducimos como posible antecedente* $(2,0,3,0,0)$.

Es obvio que $(-9,8,19)$ *se puede escribir como c.l. de las columnas de A con coeficientes 2 y 3 en las columnas 1 y 3 y coeficientes cero en el resto, y que por tanto* $\vec{v} = (2,0,3,0,0)$ *es un posible original para* $\vec{w} = (-9,8,19)$.

Resolver el SL con la matriz A completa es más engorroso (para cálculos a mano). Se partiría de

$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & |-9 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & |\ 8 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & |19 \end{bmatrix}$ *y por eliminación de Gauss-Jordan se llegaría a la forma escalonada reducida:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & |\ 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & |\ 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\ 0 \end{bmatrix}$$

Se ve que el SL es compatible, y que por tanto el vector dado pertenece al subespacio Imf*. Despejando obtendríamos la solución general, es decir, todos los infinitos antecedentes posibles.*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la solución que obtuvimos directamente, asignando coeficientes cero a las columnas de A linealmente dependientes.

Ejemplo 1.9. *Sea* $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$, *con matriz asociada* $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *a) Determina si* f *es sobreyectiva, b) si* f *es inyectiva, c) una base* B *del subespacio* $\mathrm{Im} f$ *y d) una base* C *de* $\mathrm{Ker} f$.

- *a) La aplicación es sobreyectiva si* $\forall\ \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ *el sistema* $A\vec{x} = \vec{b}$ *tiene solución.*

  El sistema es $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

  y la matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 & | \ y_1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & | \ y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & | \ y_3 \end{bmatrix}$

  $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ A^* = 3$, *por tanto el sistema es compatible para cualquier terna* (y_1, y_2, y_3), *por tanto* f *sobreyectiva.*

- *b) La aplicación es inyectiva si cada* $\vec{b} \in Imf$ *es como mucho imagen de un vector de* $\mathbb{R}^4$. *Como el número de columnas pivotales (3) es menor que el número de incógnitas (4), queda un parámetro libre, y por tanto tenemos que el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones, para todos los vectores de* Imf. *Luego* f *no es inyectiva.*

- *Respuestas a a) y a b) teniendo en cuenta el rango de* A.

  La matriz A *del enunciado ya se encuentra en la forma escalonada, por tanto conocemos el valor de su rango sin hacer cálculos, rgA=3.*

  $\mathrm{rg}A$ $(= \dim \mathrm{Im}\ f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ *Sobreyectiva*

  $\mathrm{rg}A = 3 \neq \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ *No inyectiva*

- *c)* $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^3$ *por tanto una base de* Imf *es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

- *d)* $\mathrm{Ker}f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ A\vec{x} = \vec{0}\}$

  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 & | \ 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 & | \ 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim$$
  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix}$$

  $x = -6z$, $y = z/2$, $z = z$, $t = 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Base de* $\mathrm{Ker}f$: $C = \{(-6, 1/2, 1, 0)\}$

  Para asegurarnos de que el vector $(-6, 1/2, 1, 0)$ *pertenece a* $Kerf$, *y de que por tanto no nos hemos equivocado en los cálculos, conviene realizar el producto de* A *por este vector para comprobar que se obtiene* $(0, 0, 0)$:

  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.10. *Sea la aplicación lineal* $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2\ ,\ 5x_1 + 7x_2\ ,\ x_1 + 3x_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}^3$*. Obtén la matriz estándar asociada. Demuestra que* f *es inyectiva. ¿Es* f *sobreyectiva?. Encuentra una base para* Imf*. Obtén las ecuaciones implícitas de* Imf*. Encuentra una base sencilla para* Imf *a partir de sus ecuaciones implícitas.*

- $f(1,0) = (3,5,1),\ f(0,1) = (1,7,3) \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$

  Aquí vemos la comprobación: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$

- *Las columnas de* A *son linealmente independientes por tanto* f *es inyectiva. rgA=2*

- f *es sobreyectiva si* $Imf = \mathrm{Col}A = \mathbb{R}^3$*. dim Im* f *= rg* A *= 2. Por tanto* f *no es sobreyectiva.*

- $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ *con* $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$

  Por tanto $B = \{(3,5,1),(1,7,3)\}$ *es una base de* $\mathrm{Im}\ f$*.*

  (Como las columnas de A *son l.i., forman directamente la base de* Imf*).*

- *Para obtener la forma implícita de* Imf *imponemos que el SL con matriz ampliada* $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \mid y_1 \\ 5 & 7 & \mid y_2 \\ 1 & 3 & \mid y_3 \end{bmatrix}$ *sea compatible.*

  Aplicamos eliminación gaussiana:

  $$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid y_3 \\ 5 & 7 & \mid y_2 \\ 3 & 1 & \mid y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid & y_3 \\ 0 & -8 & \mid & y_2 - 5y_3 \\ 0 & -8 & \mid & -3y_3 + y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid & y_3 \\ 0 & -8 & \mid & y_2 - 5y_3 \\ 0 & 0 & \mid & y_1 - y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

  El sistema es compatible $\Leftrightarrow y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$.

  Por tanto $y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$ *es la ecuación implícita.*

- *A partir de la ecuación implícita obtengamos una base sencilla de* Imf*:*

  $y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 - 2y_3$

  $$Im\ f = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ con } y_2,\ y_3 \in \mathbb{R} \quad = y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } y_2,\ y_3 \in \mathbb{R}$$

  $B' = \{(1,1,0),(-2,0,1)\}$