ESPACIOS VECTORIALES 2018-19

EJERCICIO 1.6

Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^5$, siendo $\vec{v}_1 = (5, -9, 6, 4, 1)$, $\vec{v}_2 = (-3, 4, -2, -1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, -7, 8, 7, 3)$, $\vec{v}_4 = (-7, 7, -2, 0, 1)$ y $\vec{v}_5 = (2, 0, 4, 1, 1)$.

a) Obtén las relaciones de dependencia lineal del conjunto (tantas como vectores linealmente dependientes existan.

b) Extrae un subconjunto de S con el máximo número posible de vectores linealmente independientes.

c) Expresa los vectores eliminados como c.l. de los vectores del subconjunto l.i. del apartado anterior.

```
>> v1=[5  -9  6  4  1]'; v2=[-3  4  -2  -1  0]'; v3=[0  -7  8  7  3]';
>> v4=[-7  7  -2  0  1]'; v5=[2  0  4  1  1]'; S=[v1  v2  v3  v4  v5];     % Apartado a)
>> % MÉTODO 1: Mediante la reducida por filas
RF=rref(S)
RF =
    1    0    3    1    0
    0    1    5    4    0
    0    0    0    0    1
    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
>> % De las columnas no pivotales deducimos  v3=3*v1+5*v2  y  v4=v1+4*v2

>> % MÉTODO 2: Mediante la orden null
>> crd=null(S, 'r')   % En columnas los coefic. de las relaciones de dependencia
crd =
   -3   -1
   -5   -4
    1    0
    0    1
    0    0
>> % Resultan las relaciones  -3*v1-5*v2+v3=0  y  -v1-4*v2+v4=0,  equivalentes a las otras

>> % Apartado b): El subconjunto S' con los vectores l.i, de S está formado por los vectores
>> % correspondientes a las columnas pivotales de RF, es decir, S'={v1, v2, v5}

>> % Apartado c): Ya se dedujo de RF que  v3=3*v1+5*v2  y  v4=v1+4*v2
```

EJERCICIO 3.7

Obtén la expresión paramétrica de F subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ sabiendo que su forma implícita es $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right.$.

```
>> F=[1  1  1; 1  -1  1];   % Matriz de coeficientes de las ecuac. implícitas de F
>> % Al estar definido F por r=2 ecuac. implícitas será dim(F)=dim(R3)-r=3-2=1, luego
>> % las coordenadas de los vectores de F dependerán de un único parámetro
>> % Resolvemos el sist. Homogéneo dado bien con la reducida por filas o bien con null
>> rref ( [F   zeros(2,1)] )
ans =
     1     0     1     0
     0     1     0     0
>> % Deducimos {x+z=0, y=0} y de ella la forma paramétrica (x, y, z) = (-z, 0, z)
>> RF=null(F,'r'); syms a; a*RF   % en columnas, forma paramétrica de los vectores de F
ans =
 -a
  0
  a
>> % Para obtener una base de  F  bastaría hacer  z=1  o bien  a=1
```

EJERCICIO 3.9

Considera $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra una base de $\langle S \rangle$

b) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores de S. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

c) Hallar unas ecuaciones implícitas de S.

```
>> v1=[1  0  -3  2]'; v2=[0  1  2  -3]'; v3=[-3  -4  1  6]'; v4=[1  -3  -8  7]'; v5=[2  1  -6  9]';
>> S=[v1  v2  v3  v4  v5]; [RF,cp]=rref(S)   % Reducida por filas y columnas pivotales
RF =
     1     0    -3     0     4
     0     1    -4     0    -5
     0     0     0     1    -2
     0     0     0     0     0
```

```
cp =
     1     2     4
>> % Apartado a)
>> % Una base de <S> la formarán los vectores l.i., es decir, los correspondientes a las c. p.
>> BaseS = S(:, cp)   % En columnas, una base de <S>
BaseS =
     1     0     1
     0     1    -3
    -3     2    -8
     2    -3     7

>> % Apartado b): El vector v=(a,4,-5,-10) pertenecerá a <S> si es c.l. de una base de
>> % <S>, es decir, si la matriz M formada por los vectores de BaseS y v tiene rango 3,
>> % lo que obliga a ser nulo cualquier menor de orden 4, es decir, el determinante de M
>> M=[BaseS  v]; solve(det(M))
ans =
5
>> v=subs(v, a, 5); linsolve(BaseS, v)
ans =
  3
 10
  2
>> % Para a=5 sí es v c.l. de los vectores de S, concretamente v=3*v1+10*v2+2*v4

>> % Apartado c): Al ser dim(S)=3 resultará 4-3=1 ec. impl. Puede actuarse por 2 métodos.
>> % MÉTODO 1: Mediante la orden null
>> ceiS = null(BaseS','r');   % Coeficientes de unas ecuac. implícitas de S
>> syms x  y  z  t; ceiS'*[x  y  z  t].'   % Igual a 0 la ecuac. implícita de S es
ans =
t + 10*x - 5*y + 4*z
>> % MÉTODO 2: Mediante el uso de determinantes
>> % Llamando v=[x,y,z,t] a un vector genérico de S, unas ecuaciones implícitas de F
>> % las obtendríamos imponiendo que la matriz M=[BaseS  v] siga teniendo rango 3,
>> % igual a dim(S), lo que conlleva anular los menores de orden 4, es decir, el det(M)
>> syms x y z t; v=[x  y  z  t].'; M=[BaseS  v];
>> det(M)  % Igual a 0 la ecuac. implícita de S es
ans =
t + 10*x - 5*y + 4*z
```

EJERCICIO 3.11

Considera el subespacio F de las matrices $M_{3\times 2}$ siguiente: $F = \langle A, B, C, D \rangle$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Obtén una base de F.

b) Determina una forma implícita de F.

c) Determina si $N = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 11 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ pertenece o no a F.

```
>> % En base a la biyectividad  M3x2 <==> R6  trabajaremos con vectores de R6
>> A=[1  0  0  0  2  -1]'; B=[1  0  0  3  5  -1]'; C=[0  1  0  -1  -1  0]';
>> D=[0  1  0  0  0  0]'; N=[3  -2  0  5  11  -3]'; F=[A  B  C  D];
>> [RF,cp]=rref(F); BaseF=F(:,cp)   % En columnas, coordenadas de una base de F
BaseF =
     1         1         0
     0         0         1
     0         0         0
     0         3        -1
     2         5        -1
    -1        -1         0

>> % Para obtener unas ecuaciones implícitas de F puede actuarse de 2 formas
>> % MÉTODO 1: Mediante la orden null
>> ceiF=null(BaseF','r');   % Coeficientes de unas ecuac. implícitas de F
>> syms x1 x2 x3 x4 x5 x6;
>> ceiF'*[x1  x2  x3  x4  x5  x6].'   % Igualadas a 0 unas ecuac. implícitas de F son
ans =
          x3
 x5 - x4 - 2*x1
       x1 + x6
>> % MÉTODO 2: Mediante el uso de determinantes
>> % Llamando v=[x1,x2,x3,x4,x5,x6] a un vector genérico de F, unas ecuaciones
>> % implícitas de F se obtendrán imponiendo que la matriz M=[BaseF  v] siga
>> % teniendo rango de valor 3=dim(F), lo que conlleva anular los menores de orden 4
>> syms x1 x2 x3 x4 x5 x6; v=[x1 x2 x3 x4 x5 x6].'; M=[BaseF  v]
M =
[ 1,  1,  0, x1]
[ 0,  0,  1, x2]
[ 0,  0,  0, x3]
```

```
[  0,  3, -1, x4]
[  2,  5, -1, x5]
[ -1, -1,  0, x6]
>> % Las filas 1ª, 2ª y 4ª de BaseF son independientes por lo que
>> % bastará anular los menores obtenidos al orlar dichas filas
>> [det(M(1:4,:))  det(M([1 2 4 5],:))   det(M([1 2 4 6],:))]
ans =
[ 3*x3, 6*x1 + 3*x4 - 3*x5, - 3*x1 - 3*x6]
>> % Así, unas ecuac. implícitas de F son  x3=0,  2*x1+x4-x5=0  y  x1+x6=0

>> % La matriz N pertenecerá a F si N se puede expresar como c.l. de las matrices de BaseF,
>> % es decir, si el sistema de matriz de coefic. BaseF y términos independientes N es C.D.
>> linsolve(BaseF,N)
ans =
      2
      1
     -2
>> % Ha resultado ser N=2*A+B-2*C, luego la matriz N sí pertenece a F.
```