Lección 5

Matriz de cambio de base, subespacio Col(A) y subespacio Nul(A)

5.1 Matriz de cambio de base/coordenadas

En esta lección veremos como un cambio de base en un subespacio o espacio vectorial se puede escribir como una operación producto matriz-vector, con $P \times vector1 = vector2$, siendo $vector1$ y $vector2$ las coordenadas en la primera y en la segunda base, respectivamente, del vector[1] v y P la matriz de cambio de base. Deduciremos la expresión general para un subespacio H de dimensión d del espacio vectorial V[2] de dimensión n.

Sean $v \in H$ y las bases de H $\quad B = \{b_1, b_2, ..., b_d\}$ y $B' = \{b'_1, b'_2, ..., b'_d\}$

Podemos escribir: $\quad v = c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_db_d \qquad v = c'_1b'_1 + c'_2b'_2 + ... + c'_db'_d$

Igualando las expresiones anteriores:

$$c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_db_d = c'_1b'_1 + c'_2b'_2 + ... + c'_db'_d \qquad \textbf{[1a]}$$

Expresando los elementos de la primera base respecto de la segunda:

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}b'_1 + a_{21}b'_2 + ... + a_{d1}b'_d \\ b_2 = a_{12}b'_1 + a_{22}b'_2 + ... + a_{d2}b'_d \\ ... \\ b_d = a_{1d}b'_1 + a_{2d}b'_2 + ... + a_{dd}b'_d \end{cases} \qquad \textbf{[1b]}$$

Sustituyendo estas expresiones de los b_i en la ecuación **[1a]**, obtenemos:

$$\begin{aligned} & c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_db_d = \\ & c_1a_{11}b'_1 + c_1a_{21}b'_2 + ... + c_1a_{d1}b'_d \quad + \quad c_2a_{12}b'_1 + c_2a_{22}b'_2 + ... + c_2a_{d2}b'_d \quad + \quad ... \quad + \\ & c_da_{1d}b'_1 + c_da_{2d}b'_2 + ... + c_da_{dd}b'_d \quad = \\ & \underbrace{(c_1a_{11} + ... + c_da_{1d})}_{c'_1}\ b'_1 \quad + \quad \underbrace{(c_1a_{21} + ... + c_da_{2d})}_{c'_2}\ b'_2 \quad + \quad ... \quad + \quad \underbrace{(c_1a_{d1} + ... + c_da_{dd})}_{c'_d}\ b'_d = \\ & c'_1 b'_1 + c'_2 b'_2 + ... + c'_d b'_d \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} c'_1 = c_1a_{11} + c_2a_{12} + ... + c_da_{1d} \\ c'_2 = c_1a_{21} + c_2a_{22} + ... + c_da_{2d} \\ ... \\ c'_d = c_1a_{d1} + c_2a_{d2} + ... + c_da_{dd} \end{cases} \quad \textbf{[1c]}, \quad \text{o matricialmente} \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ ... \\ c'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2d} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{d1} & a_{d2} & ... & a_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_d \end{bmatrix}$$

[1]Entiéndase "vector" en el sentido amplio de elemento de un espacio vectorial

[2]H puede ser el propio espacio completo V

El vector de elementos $\vec{c}\,'_i$ son las coordenadas de v relativas a la base B', denotadas $[v]_{B'}$, y el vector de los c_i son las coordenadas de v relativas a la base B, denotadas $[v]_B$, por tanto tenemos:

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2d} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{d1} & a_{d2} & \ldots & a_{dd} \end{bmatrix} [v]_B$$

que podemos escribir como:

$$\boxed{[v]_{B'} = P\ [v]_B} \quad \mathbf{[2]} \quad , \quad \text{con } P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2d} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{d1} & a_{d2} & \ldots & a_{dd} \end{bmatrix}$$

Fijándonos en las ecuaciones **[1b]** vemos que los elementos de la columna j de P son las coordenadas del vector $b_j \in B$ respecto de la base B', por tanto:

$$\boxed{P = [\ [b_1]_{B'}\ [b_2]_{B'}\ \ldots\ [b_d]_{B'}\ ]} \quad \mathbf{[3]}$$

Llamamos a P **matriz de cambio de base o de cambio de coordenadas de la base B a la base B'**. El producto por la izda. por P transforma el vector de coordenadas $[v]_B$ en $[v]_{B'}$.

P es invertible (el SL **[1c]** es comp. det. ya que las coorden. relativas a una base son únicas). Multiplicando **[2]** por P^{-1} por la izquierda, obtenemos:

$P^{-1}\ [v]_{B'} = [v]_B$

P^{-1} es la matriz que transforma las coordenadas relativas a la base B' en las coordenadas relativas a la base B. Las columnas de P^{-1} son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

Ejemplo 5.1. *Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$, y en él la base estándar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. Obtén las matrices de cambio de base entre la base B y la estándar.*

$[\vec{x}]_{can} = P[\vec{x}]_B$, *con* $P = [\ [\vec{b}_1]_{can}\ \ [\vec{b}_2]_{can}\ \ [\vec{b}_3]_{can}\ ]$, *de acuerdo con la expresión de P en* **[3]**.

Recordemos que no es necesario hacer referencia a la base canónica y que se entiende $\vec{x} = [\vec{x}]_{can}$, por tanto podemos escribir las expresiones anteriores cómo:

$\vec{x} = P[\vec{x}]_B$, *con* $P = [\ \vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \vec{b}_3\ ]$

Denotando como P_B la matriz que tiene por columnas las coordenadas estándar de los vectores de la base B, es decir $P_B = [\ \vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \vec{b}_3\ ]$, tenemos que $P = P_B$, por tanto:

$P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$.

Considerando la transformación de la base estándar a la base B, la matriz Q de cambio de base es aquella que cumple que $[\vec{x}]_B = Q\vec{x}$.

Obviamente $Q = P_B^{-1}$

Q tiene como columnas las coordenadas de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$ respecto de la base B.

Ejemplo 5.2. *Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, con $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

a) Obtén la matriz de cambio de base P de B a la estándar.

b) Sabiendo que un vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $(7, -6)$ respecto de la base B, obtén sus coordenadas en la base estándar.

c) Encuentra las coordenadas de $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ respecto de la base B.

d) Obtén la matriz de cambio de base Q desde la estándar a B.

a) $P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ ] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base B en coordenadas estándar por tanto es la matriz de cambio de base pedida: $P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$*

En efecto, si (c_1, c_2) son las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base B, entonces:

$$\underbrace{c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_1} + \underbrace{c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}}, \text{ lo que implica } \quad \underset{\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{[\vec{x}]_B}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}, \text{ es decir,}$$

$$P_B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz de cambio de base P tal que $P[\vec{x}]_B = \vec{x}$ es P_B. $\boxed{P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{[\vec{v}]_B}{\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\vec{v} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

c)

$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *son las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^2$ o coordenadas estándar de $\vec{x}$*

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener las coordenadas $[\vec{x}]_B = (c_1, c_2)$ hay que resolver la ecuación:

$$\underbrace{c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_1} + \underbrace{c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} \quad , \quad \underset{\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{[\vec{x}]_B}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}} \quad , \quad P_B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolvamos el sistema mediante eliminación gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | \ 4 \\ 1 & 1 & | \ 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & | \ \ 4 \\ 0 & -3 & | -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & | \ 4 \\ 0 & 1 & | \ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & | \ 6 \\ 0 & 1 & | \ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | \ 3 \\ 0 & 1 & | \ 2 \end{bmatrix}$$

La solución es: $\boxed{[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$

Comprobación $\vec{x} = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$, $3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Nótese que la matriz de coeficientes del sistema es $P_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, que es una matriz invertible, y *que por tanto la solución* $[\vec{x}]_B$ *del sistema de matriz ampliada* $[P_B \mid \vec{x}]$ *también se puede obtener como el producto* $P_B^{-1}\vec{x}$. $\quad [\vec{x}]_B = (\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Este procedimiento enlaza con el siguiente apartado.

d)

$[\vec{x}]_B = P_B^{-1}\vec{x}$ *partiendo de que la matriz de cambio de base en el apartado a) era* P_B.

(si P_B *pasa de coord. relativas a base* B *a coord. canónicas,* P_B^{-1} *pasa de coord. canónicas a coord. relativas a la base* B*)*

$$\text{Por tanto } Q = P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad \boxed{Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}}$$

Se puede comprobar el resultado del apartado **e)**: $\underset{Q}{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}} \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}} = \underset{[\vec{x}]_B}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$

La matriz Q *se podría haber obtenido directamente de la definición* **[3]**. *La matriz pasa de base* $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ *a* $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$, *por tanto la primera columna de* Q *son las coordenadas de* $\vec{e}_1$ *respecto de* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ *y la segunda columna las coordenadas de* $\vec{e}_2$ *respecto de* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

Los sistemas lineales a resolver y su solución:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{ sol: } (1/3, -1/3) = \text{col 1 de } Q \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ sol: } (1/3, 2/3) = \text{col 2 de } Q$$

Es inmediato darse cuenta de que estamos resolviendo la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que obviamente la solución Q *es la inversa de la matriz* $P = P_B$ *que está a su izquierda.*

Ejemplo 5.3. *Sean las siguientes bases de* $\mathbb{R}^3$*:* $B = \{(2,0,0),(0,3,0),(0,0,2)\}$ *y* $B' = \{(-1,0,0),(0,4,0),(0,1,2)\}$.

a) Obtén la matriz de paso P *tal que* $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$*, para cualquier* $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) Obtén la matriz de paso Q *tal que* $Q[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$*, para cualquier* $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

c) Sabiendo que un vector $\vec{v}$ *tiene coordenadas* $(1,6,2)$ *respecto a la base* B*, determina sus coordenadas respecto a la base* B'.

Sol.:

a) En este apartado se pide determinar la matriz P *tal que* $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$

Método 1

Recordamos la notación habitual: $P_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$

que nos permite escribir:

$P_B[\vec{x}]_B = \vec{v} \qquad P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = \vec{v}$

e igualar: $P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'}$

Por ser B *y* B' *bases de un espacio completo* P_B *y* $P_{B'}$ *son cuadradas es invertibles.*

Para calcular la matriz P *del enunciado no tenemos más que premultiplicar la expresión anterior por* $P_{B'}^{-1}$.

$P_{B'}^{-1}\ P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}^{-1}\ P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_{B'}$

y por tanto la matriz de cambio de base de B *a* B' *es:* $P = P_{B'}^{-1} P_B$

$$P = P_{B'}^{-1} P_B = (\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método 2

De acuerdo con **[3]** P *de paso de* B *a* B' *es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base* B *expresados en coordenadas relativas a la base* B'*. Para obtener las 3 columnas hay que resolver los 3 sistemas lineales correspondientes, cuyas matrices ampliadas son:*

$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3 \mid \vec{b}_1\ ]$ *para despejar* $[\vec{b}_1]_{B'}$

$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3 \mid \vec{b}_2\ ]$ *para despejar* $[\vec{b}_2]_{B'}$

$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3 \mid \vec{b}_3\ ]$ *para despejar* $[\vec{b}_3]_{B'}$

Agrupamos los tres SLs resolviendo el SL con la matriz ampliada múltiple:

$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3 \mid \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ ]$ **[4]**

Mediante eliminación gaussiana se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | \, 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | \, 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | \, 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & | \, 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | \, 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | \, 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & | \, 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

En la submatriz a la derecha tenemos las soluciones: la primera columna es $[\vec{b}_1]_{B'}$*, la segunda* $[\vec{b}_2]_{B'}$ *y la tercera* $[\vec{b}_3]_{B'}$*, por tanto:*

$$P = [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ [\vec{b}_3]_{B'}\ ] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente se obtiene la misma matriz P que con el método 1.

Nótese que el SL con la matriz ampliada múltiple **[4]** *es la ecuación matricial $P_{B'}P = P_B$, por lo que obviamente en este ejemplo, con $P_{B'}$ cuadrada y por tanto invertible, la solución es $P = P_{B'}^{-1}P_B$, que es la expresión que habíamos obtenido también con el Método 1.*

Vemos en más detalle la ecuación $P_{B'}P = P_B$:

$$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3\ ]\ [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ [\vec{b}_3]_{B'}\ ] = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ ]$$

---

b) <u>Método 1</u>. La matriz que se pide es $Q = P^{-1}$. Por tanto no hay más que calcular la inversa de la matriz P obtenida en el apartado anterior.

La inversa se obtiene fácilmente por el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Método 2</u>. Por construcción Q se obtendría así: $\quad Q = [\ [\vec{b'}_1]_B\ [\vec{b'}_2]_B\ [\vec{b'}_3]_B\ ]$

---

c) En este apartado tenemos como dato $[\vec{v}]_B = (1, 6, 2)$ y se pide calcular $[\vec{v}]_{B'}$.

<u>Método 1.</u> El resultado se obtiene sin más que premultiplicar las coordenadas en B por la matriz P obtenida en el apartado a).

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Método 2.</u> Este apartado se puede resolver en dos pasos sencillos sin necesidad de usar la matriz de cambio de base de B a B', transformando primero de B a base estándar y después de base estándar a base B'.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{P_B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}_{[\vec{v}]_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

Calculamos ahora las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B' resolviendo el siguiente SL:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad , \quad \text{obteniendo } [\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\qquad P_{B'} \qquad\qquad \vec{v}$$

Teniendo en cuenta que $P_{B'}$ es invertible, en el segundo paso se puede optar por resolver, como hemos hecho, o por premultiplicar por $P_{B'}^{-1}$: $\quad [\vec{v}]_{B'} = P_{B'}^{-1}\vec{v}$

Ejemplo 5.4. *Considera las bases* $B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \right\}$ *y* $B' = \left\{ \begin{bmatrix}-7\\-3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\\10\end{bmatrix} \right\}$ *de un subespacio vectorial* H *de* $\mathbb{R}^3$.

a) Determina la matriz de cambio de base P *tal que* $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$.

b) Calcula las coordenadas del vector $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ *respecto de la base* B'.

Sol.

a) *Nos piden determinar la matriz de transformación* $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$ *para cualquier vector* $\vec{x}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

$P = [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ ]$

P tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto a la base B′. Para obtener cada columna hay que resolver el correspondiente sistema lineal.

$$\left.\begin{array}{l} [\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2 \mid \vec{b}_1\ ] \text{ para despejar } [\vec{b}_1]_{B'} \\ [\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2 \mid \vec{b}_2\ ] \text{ para despejar } [\vec{b}_2]_{B'} \end{array}\right\}$$

Nótese que para simplificar operaciones ambos sistemas se pueden resolver conjuntamente tal como se presenta a continuación, ya que la eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan en la matriz de coeficientes es la misma.

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 & \mid 1 & \mid 0 \\ -3 & 8 & \mid 1 & \mid 1 \\ 8 & 10 & \mid 0 & \mid 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/7 & \mid -1/7 & \mid 0 \\ -3 & 8 & \mid 1 & \mid 1 \\ 8 & 10 & \mid 0 & \mid 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/7 & \mid -1/7 & \mid 0 \\ 0 & 47/7 & \mid 4/7 & \mid 1 \\ 0 & 94/7 & \mid 8/7 & \mid 2 \end{bmatrix} \sim$$

$\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/7 & \mid -1/7 & \mid 0 \\ 0 & 47/7 & \mid 4/7 & \mid 1 \\ 0 & 0 & \mid 0 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/7 & \mid -1/7 & \mid 0 \\ 0 & 1 & \mid 4/47 & \mid 7/47 \\ 0 & 0 & \mid 0 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid 4/47 * 3/7 - 1/7 & \mid 7/47 * 3/7 + 0 \\ 0 & 1 & \mid 4/47 & \mid 7/47 \\ 0 & 0 & \mid 0 & \mid 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid (4/47 * 3 - 1) * 1/7 & \mid 3/47 \\ 0 & 1 & \mid 4/47 & \mid 7/47 \\ 0 & 0 & \mid 0 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid -35/47 * 1/7 & \mid 3/47 \\ 0 & 1 & \mid 4/47 & \mid 7/47 \\ 0 & 0 & \mid 0 & \mid 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid -5/47 & \mid 3/47 \\ 0 & 1 & \mid 4/47 & \mid 7/47 \\ 0 & 0 & \mid 0 & \mid 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{b}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -5/47 \\ 4/47 \end{bmatrix} \qquad [\vec{b}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 3/47 \\ 7/47 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -5/47 & 3/47 \\ 4/47 & 7/47 \end{bmatrix}$$

b) *Método 1.* *Lo resolvemos en primer lugar usando la matriz P obtenida en el apartado a).*

$$\begin{bmatrix} -5/47 & 3/47 \\ 4/47 & 7/47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/47 \\ 36/47 \end{bmatrix} \qquad \text{La solución es: } [\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2/47 \\ 36/47 \end{bmatrix}$$

<u>*Método 2.*</u> *(si no disponemos de la matriz de paso, podemos usar este procedimiento).*

A partir de $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ *obtengamos* $\vec{v}$ *(es importante darse cuenta de que esto no es un cambio de base, porque* $\vec{v}$ *se expresa en coordenadas relativas a la base estándar de* $\mathbb{R}^3$*, y los cambios de base se refieren a bases del mismo subespacio):*

$$\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A continuación obtenemos las coordenadas de $\vec{v}$ *respecto de la base* B'*, resolviendo el sistema siguiente (esto tampoco es un cambio de base):*

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 & | \, 2 \\ -3 & 8 & | \, 6 \\ 8 & 10 & | \, 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/7 & | & -2/7 \\ -3 & 8 & | & 6 \\ 8 & 10 & | & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/7 & | & -2/7 \\ 0 & 47/7 & | & 36/7 \\ 0 & 94/7 & | & 72/7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & -3 & | & -2 \\ 0 & 47 & | & 36 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & 36/47 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 0 & | & 3*36/47-2 \\ 0 & 1 & | & 36/47 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & |14/47 \\ 0 & 1 & |36/47 \\ 0 & 0 & | \, 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & |2/47 \\ 0 & 1 & |36/47 \\ 0 & 0 & | \, 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto: $c_1 = 2/47$ *,* $c_2 = 36/47$

Comprobación: $2/47(-7,-3,8) + 36/47(3,8,10) = (2,6,8)$ $\qquad [\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2/47 \\ 36/47 \end{bmatrix}$

Con este procedimiento hemos partido de las coordenadas $[\vec{v}]_B$ *de un vector de* H*, relativas a la base* B *de* H*, y hemos obtenido sus coordenadas* $[\vec{v}]_{B'}$*, relativas a la base* B' *de* H*, lo que sí ha sido un* <u>*cambio de base*</u>*.*

5.2 Ejercicios

Ejercicio 5.1. Manualmente y con MATLAB. *Encuentra el vector $\vec{x}$ correspondiente a las coordenadas dadas y la base dada:*

a) $B = \{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.2. MATLAB. *Encuentra el vector de coordenadas $[\vec{x}]_B$ de $\vec{x}$ respecto a la base dada. Obtén la matriz de paso P_1 de la base canónica a la base B. Obtén la matriz de paso P_2 de la base B a la base canónica.*

a) $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.3. *Sean* $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ *y* $\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, *y las bases* $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ *y* $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$. *a) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de B a C. b) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de C a B. c) Sabiendo que las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $(2, 5)$, obtén sus coordenadas respecto de la base C.*

Ejercicio 5.4.

Considera la matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & -4/3 \\ * & 1 \end{bmatrix}$ *y las bases de* $\mathbb{R}^2$ *siguientes:*

$B1 = \{(1, 2), (0, 1)\}$, $B2 = \{(3, 0), (4, 1)\}$, $B3 = \{(5, 2), (0, 1)\}$.

Señala cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) P *es la matriz de cambio de coordenadas tal que* $P[\vec{x}]_{B1} = [\vec{x}]_{B2}$
b) P *es la matriz de cambio de coordenadas tal que* $P[\vec{x}]_{B3} = [\vec{x}]_{B2}$
c) P *es la matriz de cambio de coordenadas tal que* $P[\vec{x}]_{B3} = [\vec{x}]_{B1}$
d) Las tres afirmaciones anteriores son falsas.

5.3 Subespacio de columnas y subespacio nulo de una matriz A

Definición 5.1. *Se denomina* **subespacio de columnas de una matriz** $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *al subespacio generado por las columnas de A, es decir, al conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A. Se denota como* Col$A$.

$A = [\ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \ldots\ \ \vec{a}_n\ ]$ $\qquad$ $\mathrm{Col}A\ =\ <\vec{a}_1\ ,\ \vec{a}_2\ ,\ \ldots\ ,\ \vec{a}_n>$

Nótese que Col$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$, pues las columnas de A son vectores de m componentes.

Obviamente $\dim(\ \mathrm{Col}\ A\ ) = \mathrm{rg}(A)$

Definición 5.2. *Se denomina* **subespacio nulo de una matriz** $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y lo denotamos* Nul$A$*, al conjunto* $\mathrm{Nul}A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n\ \ /\ A\vec{x} = \vec{0}\}$.

Nul$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$, y obviamente $\dim(\ \mathrm{Nul}\ A\ ) =\ n -\ \mathrm{rg}(A)$.

Se obtiene entonces:

$$\dim(\ \mathrm{Nul}\ A\ ) + \dim(\ \mathrm{Col}A\ ) = n$$

Todo subespacio H de $\mathbb{R}^n$ es el subespacio nulo de una matriz $A_{m\times n}$, siendo A la matriz de coeficientes de la denominada forma implícita de H.