

Equivalencia de matrices

Ruth Carballo Fidalgo
Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria
carballor@unican.es

18 de febrero 2019

Contenidos

5	Equivalencia de matrices	1
5.1	Operaciones elementales	1
5.2	Operaciones elementales inversas	3
5.3	Matrices elementales	3
5.4	Inversa de una matriz elemental	4
5.5	Operación elemental sobre A como producto de A por matriz elemental	5
5.6	Definición de matrices equivalentes	7
5.7	La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia	8
5.8	Factorizaciones asociadas a equivalencia de matrices	9
5.9	Equivalencia $A \sim I$ y relación con el carácter invertible de A	10
6	Forma escalonada por filas de una matriz	11
6.1	Definición de forma escalonada por filas y de forma escalonada reducida por filas . .	11
6.2	Obtención de la forma escalonada por filas mediante Eliminación Gaussiana Simple .	13
6.3	Propiedad fundamental de las formas escalonadas por filas	14
6.4	Rango de una matriz	15
6.5	Obtención de la forma escalonada reducida a partir de una forma escalonada	18
6.6	Equivalencia por filas a la identidad: aplicación para obtener la inversa	19
6.7	Ejercicios	21
7	Forma canónica equivalente	24

Lección 5

Equivalencia de matrices

5.1 Operaciones elementales

Efectuamos una **operación elemental** sobre una línea (fila o columna) de la matriz $A_{m \times n}$, cuando realizamos una de estas tres operaciones:

- a) Multiplicar la línea i (fila o columna) por un escalar $\alpha \neq 0$. También se denomina escalamiento, o **línea-homotecia**.
- b) Sumar a la línea i la j (paralela a ella) multiplicada por un escalar cualquiera. También se denomina reemplazamiento o **manipulación**. La línea i es la “transformada” y la línea j la “auxiliar”.
- c) Intercambiar entre sí las líneas i y j (intercambiar dos filas entre sí o dos columnas entre sí). También se denomina trasposición o permutación.

Cuando se realiza una operación elemental sobre una fila también puede decirse que se realiza una operación elemental “por filas”, y análogamente para las columnas.

Con frecuencia abreviaremos “operación elemental” como o.e.

A lo largo del curso se utilizarán las operaciones elementales por filas fundamentalmente para resolver sistemas de ecuaciones, para calcular rangos, y para simplificar la obtención de determinantes. Para esta última tarea se podrá recurrir además a las operaciones elementales por columnas.

Notación de las o.e.: (ilustrada con ejemplos)

$F_{13(-4)}$	a la fila 1 se le suma la 3 multiplicada por -4
F_{13}	se intercambian las filas 1 y 3
$F_{1(7)}$	la fila 1 se multiplica por 7

$C_{13(-4)}$	a la columna 1 se le suma la 3 multiplicada por -4
C_{13}	se intercambian las columnas 1 y 3
$C_{1(7)}$	la columna 1 se multiplica por 7

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido $F_{21(-1)}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido C_{12}

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{21(-2)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B$

Las operaciones elementales realizadas han sido primero C_{12} y seguidamente $F_{21(-2)}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido $F_{21(-a)}$

Ejemplo de operación que no es operación elemental: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & a \\ a & 2a \end{bmatrix} = B$

La operación realizada de multiplicar la primera fila por a no es una operación elemental, porque si $a = 0$ la operación no es válida.

Ejemplo de operación que sí es operación elemental: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada es $F_{21(-a)}$

En las operaciones de reemplazamiento podemos utilizar cualquier escalar a .

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ a & 2a & a+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada es $F_{21(-1)}$.

5.2 Operaciones elementales inversas

Se llama **inversa de una operación elemental** a una operación elemental que cancela el efecto de la primera; es decir, si después de realizar una operación elemental sobre A se efectúa la operación elemental inversa se obtiene de nuevo la matriz original A .

La inversa de una o.e. por filas (columnas) es una o.e. por filas (columnas).

La inversa de $F_{i(\alpha)}$ es $F_{i(1/\alpha)}$

La inversa de $C_{i(\alpha)}$ es $C_{i(1/\alpha)}$

La inversa de $F_{ij(\alpha)}$ es $F_{ij(-\alpha)}$

La inversa de $C_{ij(\alpha)}$ es $C_{ij(-\alpha)}$

La inversa de F_{ij} es F_{ij}

La inversa de C_{ij} es C_{ij}

5.3 Matrices elementales

Se define **matriz elemental** como aquella matriz cuadrada de orden n que se obtiene al efectuar una operación elemental sobre una línea (fila o columna) de la matriz identidad de orden n .

Ejemplos de matrices elementales de orden 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{1(3)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{F_{1(3)}} \quad \text{Se multiplica la 1ª fila por 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{F_{31(-2)}} \quad \text{Se suma a la 3ª fila la 1ª por } -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{F_{23}} \quad \text{Se intercambia fila 2ª con fila 3ª}$$

Con frecuencia para simplificar la notación se designan las matrices elementales como las operaciones elementales asociadas. Para los ejemplos anteriores la notación simplificada de las matrices elementales sería: F_{23} , $F_{1(3)}$ y $F_{31(-2)}$

Para las mismas o. e., pero por columnas, las correspondientes matrices elementales serían: C_{23} , $C_{1(3)}$ y $C_{13(-2)}$

Fijándonos en los ejemplos anteriores observamos la siguiente **relación entre matrices elementales por filas y por columnas:**

$F_{1(3)} = C_{1(3)}$ son iguales

$F_{31(-2)} = C_{13(-2)}$ las líneas transformada y auxiliar aparecen intercambiadas.

$F_{23} = C_{23}$ son iguales

Este patrón es válido para cualquier orden n , para cualquier par de índices i, j y para cualquier escalar α (no nulo en el caso del escalamiento).

$$F_{i(\alpha)} = C_{i(\alpha)} \quad F_{ij(\alpha)} = C_{ji(\alpha)} \quad F_{ij} = C_{ij}$$

5.4 Inversa de una matriz elemental

- Toda matriz elemental tiene inversa, y la inversa de una matriz elemental es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental inversa.

La inversa de $F_{i(\alpha)}$ es $F_{i(1/\alpha)}$

La inversa de $F_{ij(\alpha)}$ es $F_{ij(-\alpha)}$

La inversa de F_{ij} es F_{ij}

$F_{i(\alpha)} F_{i(1/\alpha)} = I$
$F_{i(1/\alpha)} F_{i(\alpha)} = I$
$F_{ij(\alpha)} F_{ij(-\alpha)} = I$
$F_{ij(-\alpha)} F_{ij(\alpha)} = I$
$F_{ij} F_{ij} = I$

Ejemplos:

$$E_{F_{1(1/3)}} E_{F_{1(3)}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{31(2)}} E_{F_{31(-2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{23}} E_{F_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- El mismo desarrollo se aplicaría a las operaciones elementales por columnas.

5.5 Operación elemental sobre A como producto de A por matriz elemental

- Sean una matriz $A_{m \times n}$ y la matriz elemental F_m correspondiente a determinada o. e. por filas; entonces la matriz $B_{m \times n}$ que resulta de efectuar dicha o. e. sobre $A_{m \times n}$ es igual al producto $F_m A_{m \times n}$.
- Sean una matriz $A_{m \times n}$ y la matriz elemental C_n correspondiente a determinada o. e. por columnas; entonces la matriz $B_{m \times n}$ que resulta de efectuar dicha o. e. sobre $A_{m \times n}$ es igual al producto $A_{m \times n} C_n$.

Resumimos así el resultado anterior:

$$\begin{array}{c} A \longrightarrow B \Rightarrow B = F A \\ \text{o.e.f } F \end{array} \quad F \text{ multiplica por la izda (pre-multiplica)}$$

$$\begin{array}{c} A \longrightarrow B \Rightarrow B = A C \\ \text{o.e.c. } C \end{array} \quad C \text{ multiplica por la dcha (post-multiplica)}$$

Ejemplo 1: A partir de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ queremos obtener la matriz B que tiene intercambiadas las filas 2 y 4. Determina la matriz elemental F tal que $F.A = B$

$$F \text{ es } 4 \times 4, \text{ pues } A \text{ tiene 4 filas. } F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, sumar a la 2ª fila la 1ª multiplicada por (-2) utilizando el producto por una matriz elemental.

F es 3×3 , pues A tiene 3 filas.

$$F_{21(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es la matriz elemental que resulta de sumarle a la fila 2ª de } I_3, \text{ la 1ª multiplicada por } (-2).$$

$$F_{21(-2)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coincide con el resultado obtenido al sumar a la 2ª fila de A la 1ª multiplicada por (-2) , es decir, al efectuar $F_{21(-2)}$ sobre A .

Ejemplo 3: Dada $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, intercambiar las columnas 1 y 3 utilizando el producto por una matriz elemental.

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.6 Definición de matrices equivalentes

Se dice que $A_{m \times n}$ es **equivalente** a $B_{m \times n}$, $A \sim B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales.

Se dice que $A_{m \times n}$ es **equivalente por filas** a $B_{m \times n}$, $A \sim_f B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales por filas.

Se dice que $A_{m \times n}$ es **equivalente por columnas** a $B_{m \times n}$, $A \sim_c B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales por columnas.

Observaciones:

- $A \sim_f B \Rightarrow A \sim B$ pero no al revés
- $A \sim_c B \Rightarrow A \sim B$ pero no al revés

La condición de equivalencia por filas y la condición de equivalencia por columnas son “más fuertes” (más restrictivas) que la condición de equivalencia.

Ejemplos:

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ no son equivalentes por filas, no son equivalentes por columnas, y sí son equivalentes.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son equivalentes por filas (y por tanto equivalentes), pero no son equivalentes por columnas.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ son equivalentes por columnas (y por tanto equivalentes), pero no son equivalentes por filas.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ no son ninguna de ellas equivalente a la otra.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son equivalentes, y además son tanto equivalentes por filas como equivalentes por columnas.

5.7 La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia

Desde el punto de vista de las relaciones entre los elementos de un conjunto, en este caso el conjunto de matrices $M_{m \times n}$, las relaciones de equivalencia que acabamos de definir, basándonos en las operaciones elementales, pertenecen a la clase de relaciones denominadas “**relaciones de equivalencia**”, puesto que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Lo justificamos a continuación para la equivalencia general.

Reflexiva: Podemos justificar que A es equivalente a A tomando por ejemplo la o.e. de multiplicar una fila por el escalar 1.

Simétrica: Si A es equivalente a B , B es equivalente a A . Se justifica realizando en el paso de B a A las o.e. inversas a las realizadas en el paso de A a B (en el orden inverso, pues primero se debe deshacer la última o.e., luego la penúltima y así sucesivamente).

A o.e. $1 \rightarrow \dots \rightarrow$ o.e. $l \rightarrow B$, corresponde a que se cumpla la expresión siguiente:

$$F_a \dots F_2 F_1 \mathbf{A} C_1 C_2 \dots C_b = \mathbf{B}$$

Al ser las matrices elementales invertibles, su producto es invertible, por tanto:

$$(F_a \dots F_2 F_1)^{-1} (F_a \dots F_2 F_1) \mathbf{A} C_1 C_2 \dots C_b = (F_a \dots F_2 F_1)^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} C_1 C_2 \dots C_b = (F_a \dots F_2 F_1)^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} (C_1 C_2 \dots C_b) (C_1 C_2 \dots C_b)^{-1} = (F_a \dots F_2 F_1)^{-1} \mathbf{B} (C_1 C_2 \dots C_b)^{-1}$$

$$\mathbf{A} = (F_a \dots F_2 F_1)^{-1} \mathbf{B} (C_1 C_2 \dots C_b)^{-1}$$

Vemos que de B se llega a A mediante operaciones elementales, concretamente estas:

$$\mathbf{A} = (F_1)^{-1} (F_2)^{-1} \dots (F_a)^{-1} \mathbf{B} (C_b)^{-1} \dots (C_2)^{-1} (C_1)^{-1}$$

Transitiva: Si A es equivalente a B , y B es equivalente a C , entonces A es equivalente a C .

$$A \text{ o.e. } 1 \rightarrow \dots \rightarrow \text{o.e. } l \rightarrow B \quad \text{y} \quad B \text{ o.e. } l+1 \rightarrow \dots \rightarrow \text{o.e. } k \rightarrow C \Rightarrow$$

$$A \text{ o.e. } 1 \rightarrow \dots \rightarrow \text{o.e. } l \rightarrow \text{o.e. } l+1 \rightarrow \dots \rightarrow \text{o.e. } k \rightarrow C$$

Las expresiones anteriores indican que si la secuencia de o.e. de 1 a l nos lleva de A a B , y la secuencia de $l+1$ a k de B a C , entonces la secuencia completa de 1 a l y de $l+1$ a k transforma A en C .

Para la equivalencia por filas las demostraciones de las propiedades reflexiva y transitiva son sencillas, con razonamientos similares a los anteriores. La demostración de que la relación es simétrica se obtiene igual que como se ha expuesto para la equivalencia general, pero sin tomar las matrices C_i . Análogamente para equivalencia por columnas, sin tomar las operaciones F_i .

5.8 Factorizaciones asociadas a equivalencia de matrices

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} F_a \dots F_2 F_1 A C_1 C_2 \dots C_b = B \Leftrightarrow (F_1)^{-1} (F_2)^{-1} \dots (F_a)^{-1} B (C_b)^{-1} \dots (C_2)^{-1} (C_1)^{-1} = A$$

Denotando $F = F_a \dots F_2 F_1$, y $C = C_1 C_2 \dots C_b$, tenemos las factorizaciones de los tres tipos de equivalencia.

- **Equivalencia**

$$A \sim B \Rightarrow \exists F, C \text{ invertibles tales que } \mathbf{FAC} = \mathbf{B}$$

(y en consecuencia $F^{-1}BC^{-1} = A$)

- **Equivalencia por filas**

El caso particular en el que sólo se usen o.e. por filas corresponde a tomar $C = I$.

$$A \sim_f B \Leftrightarrow F_a \dots F_2 F_1 A = B \Leftrightarrow (F_1)^{-1} (F_2)^{-1} \dots (F_a)^{-1} B = A$$

$$A \sim_f B \Rightarrow \exists F \text{ invertible tal que } \mathbf{FA} = \mathbf{B}$$

(y en consecuencia $F^{-1}B = A$)

- **Equivalencia por columnas**

El caso particular en el que sólo se usen o.e. por columnas corresponde a tomar $F = I$.

$$A \sim_c B \Leftrightarrow A C_1 C_2 \dots C_b = B \Leftrightarrow B (C_b)^{-1} \dots (C_2)^{-1} (C_1)^{-1} = A$$

$$A \sim_c B \Rightarrow \exists C \text{ invertible tal que } \mathbf{AC} = \mathbf{B}$$

(y en consecuencia $BC^{-1} = A$)

La factorización $FAC = B$ se expresa con frecuencia utilizando los nombres P y Q para las matrices F y C , es decir $PAQ = B$. La razón es que F y C son matrices invertibles y los nombres P y Q son los que se suelen utilizar en Álgebra para designar matrices invertibles.

TRES CONCLUSIONES IMPORTANTES SOBRE FACTORIZACIÓN:

- $A \sim B$ implica que existen P y Q invertibles tales que $B = PAQ$.
- $A \sim_f B$ implica que existe P invertible tal que $B = PA$.
- $A \sim_c B$ implica que existe Q invertible tal que $B = AQ$.

5.9 Equivalencia $A \sim I$ y relación con el carácter invertible de A

1. Para el caso particular de matrices cuadradas, los resultados $FAC = B$ y $F^{-1}BC^{-1} = A$ (es el mismo resultado o ecuación, pero despejando distinta matriz), indican que si una de ellas, A o B , es invertible también lo será la otra (el producto de matrices invertibles es una matriz invertible). Es decir, $A \sim B \Rightarrow$ ambas son invertibles o no lo es ninguna.

2. Una consecuencia del resultado anterior es que $A \sim I \Rightarrow A$ invertible, ya que la identidad lo es.

3. $A \sim I \Rightarrow A$ equivalente por filas a I y A equivalente por columnas a I .

Demostración: $FAC = I \Leftrightarrow A = F^{-1}IC^{-1} = F^{-1}C^{-1} = F_1 \dots F_k = C_1 \dots C_k = F_1 \dots F_k I = IC_1 \dots C_k$.

k es el número total de operaciones elementales.

En las secciones 5.3 y 5.4 vimos que las inversas de matrices elementales de filas son matrices elementales de filas, que las inversas de las matrices elementales de columnas son matrices elementales de columnas y que toda matriz elemental de filas es igual a una matriz elemental de columnas y al revés, en particular: $F_{ij} = C_{ij}$ $F_{i(\alpha)} = C_{i(\alpha)}$ $F_{ij}(\alpha) = C_{ji}(\alpha)$.

Por eso la expresión $A = F^{-1}C^{-1}$ anterior ha podido escribirse en cualquiera de las dos formas siguientes:

- $A = F^{-1}C^{-1} = F_1 \dots F_k = F_1 \dots F_k I$
- $A = F^{-1}C^{-1} = C_1 \dots C_k = I C_1 \dots C_k$

$A = F_1 \dots F_k I$ expresa que A es equivalente por filas a I , y $A = I C_1 \dots C_k$ que A es equivalente por columnas a I .

4. $A \sim I \Leftrightarrow A$ es producto de matrices elementales.

Demostración: Del resultado anterior se concluye la implicación directa. La implicación inversa se deduce sin más que escribir $A = E_1 \dots E_k = \begin{cases} F_1 \dots F_k I \\ IC_1 \dots C_k \end{cases}$.

5. A producto de elementales $\Rightarrow A$ es invertible (pues el producto de invertibles es invertible).

Esta propiedad también se podría haber deducido combinando los resultados de los apartados 4 y 2.

Resumen de las propiedades de 2 a 5:

$$A \text{ producto de elementales} \quad \Leftrightarrow \quad A \sim I \quad \Leftrightarrow \quad A \sim_f I \quad \Leftrightarrow \quad A \sim_c I$$

$\Downarrow$

A invertible

Queda pendiente la implicación vertical hacia arriba.

Lección 6

Forma escalonada por filas de una matriz

6.1 Definición de forma escalonada por filas y de forma escalonada reducida por filas

Partiendo de cualquier matriz $A_{m \times n}$ se puede llegar mediante un número finito de o.e. por filas a una matriz $U_{m \times n}$ escalonada, y a ésta se le denomina **forma escalonada por filas de A** . Existen infinitas formas escalonadas por filas de una matriz dada A .

$$A \sim_f U_{esc \text{ filas}}$$

El proceso de obtener una forma escalonada por filas de una matriz se denomina “eliminación gaussiana”.

Nótese que por ser U una forma escalonada por filas de A , se tiene: $U = F_a \dots F_2 F_1 A$, siendo F_i la matriz elemental correspondiente a cada o.e. realizada. La expresión de U puede simplificarse como $U = PA$, siendo $P = F_a \dots F_2 F_1$ (P invertible).

Se denomina **forma escalonada reducida por filas de una matriz A** a la forma escalonada por filas de A que tiene pivotes unidad y ceros encima de los elementos pivote. La forma escalonada reducida por filas de una matriz A dada es única. En general utilizaremos para esta matriz las notaciones $A_{red \text{ filas}}$ o $U_{red \text{ filas}}$.

El proceso de obtener la forma reducida a partir de la forma escalonada se le denomina “eliminación de Gauss-Jordan”.

Ejemplo de formas escalonadas y forma reducida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las dos primeras matrices a la derecha de A son formas escalonadas de A , y la tercera es la forma escalonada reducida de A .

Aplicando las propiedades simétrica y transitiva de la equivalencia por filas deducimos que todas las matrices equivalentes por filas entre sí tienen la misma forma escalonada reducida por filas. Expresamos este resultado como sigue:

$$\left. \begin{array}{l} A \sim_f B \\ A \sim_f U_{red \text{ filas}} \end{array} \right\} \Rightarrow B \sim_f U_{red \text{ filas}}$$

Demostración:

$$A \sim_f B \Rightarrow B \sim_f A;$$

$$\left. \begin{array}{l} B \sim_f A \\ A \sim_f U_{red \text{ filas}} \end{array} \right\} \Rightarrow B \sim_f U_{red \text{ filas}}$$

Nótese que para cualquier matriz C se verifica que:

$$\left. \begin{array}{l} A \sim_f B \\ A \sim_f C \end{array} \right\} \Rightarrow B \sim_f C$$

6.2 Obtención de la forma escalonada por filas mediante Eliminación Gaussiana Simple

Describimos a continuación un algoritmo para obtener a partir de $A_{m \times n}$ una forma escalonada por filas determinada. El método se denomina **Eliminación Gaussiana Simple** y el orden en el que se efectúan las operaciones elementales viene prefijado por un convenio. No se pueden realizar escalamientos. El intercambio de filas sólo se puede realizar para buscar un elemento pivote en la obtención de la forma escalonada, y se ha de realizar con la primera fila siguiente que sí posea pivote.

El algoritmo de **Eliminación Gaussiana Simple** consta de los siguientes pasos:

- 1) Partiendo de la izquierda, buscamos la 1ª columna con un elemento distinto de cero, llamémosla j_1 . Esta columna j_1 es la primera columna pivotal. Si el primer elemento no nulo de j_1 (el de la fila más alta) no está en la 1ª fila se intercambian la primera fila y ésta. Este elemento no nulo, en la posición $(1, j_1)$ es el primer elemento pivote. Mediante operaciones elementales convertimos los elementos de la primera columna pivotal que están debajo del elemento pivote, en ceros. La fila auxiliar utilizada es la 1ª fila. La operación elemental que elimina el elemento b es la de sumar a la fila que contiene el elemento b la fila auxiliar multiplicada por $(-b / \text{primer pivote})$.
- 2) Moviéndonos hacia la derecha, a partir de la 1ª columna pivotal, buscamos la siguiente columna que tenga un elemento no nulo en la 2ª fila o siguientes. Esa columna j_2 será la segunda columna pivotal. Se realizará un intercambio de filas si este primer elemento no nulo no estuviera en la 2ª fila, para colocarlo precisamente en ésta. Este es el segundo elemento pivote. Además de esta operación elemental de intercambio a fin de que el elemento pivote se encuentre en la 2ª fila (posición $(2, j_2)$), se realizarán las operaciones elementales necesarias para que todos los elementos de la columna pivotal, por debajo del pivote, sean ceros, utilizando como fila auxiliar la fila 2ª. Estas operaciones elementales no afectan a los elementos de las columnas situadas a la izquierda de j_2 , ya que los elementos de la fila 2 a la izquierda de j_2 son todos nulos.
- 3) Seguimos moviéndonos hacia la derecha. Sea j_3 la siguiente columna que tiene un elemento no nulo, ahora en la 3ª fila o más abajo. Si es necesario intercambiaremos las filas para que, en la nueva matriz, la columna j_3 tenga en la fila 3 el primer elemento no nulo encontrado (tercer elemento pivote), y a continuación realizaremos las operaciones para transformar a ceros los elementos por debajo de él, utilizando la fila 3 como auxiliar.
- 4) Seguimos repitiendo el proceso hasta conseguir r columnas pivotaes, $j_1, j_2, \dots, j_r$ y solamente ceros en las filas $r + 1, r + 2, \dots, m$.

Al final de estos cuatro pasos habremos conseguido transformar la matriz A en una **forma escalonada por filas** de A .

Dada una matriz, *mediante el método de eliminación gaussiana simple se obtiene una única matriz en la forma escalonada por filas*. Esto es debido a que las operaciones elementales que se realizan y el orden en que se realizan están fijadas por el método.

Ejemplo: Obtén la forma escalonada por filas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mediante elimi-

nación gaussiana simple.

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_{13}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{41(-1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1-1 & 4-3 & 5-4 & 0-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{42(-1/2)} \quad F_{52(-1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1-1 & -2-3/2 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1-1 & 2-3/2 \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_{43(7/2)} \quad F_{53(-1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{esc \text{ filas}} = A_{EGS} \quad A \sim_f A_{EGS}
 \end{aligned}$$

Se obtienen 3 cols. pivotaes: la 2ª, la 3ª y la 5ª.

Los pivotes son 2, 2 y 1 respectivamente.

6.3 Propiedad fundamental de las formas escalonadas por filas

- Todas las formas escalonadas por filas de una matriz $A_{m \times n}$ tienen el mismo número de filas no nulas.
- Todas las formas escalonadas por filas de una matriz $A_{m \times n}$ tienen las columnas pivotaes en las mismas posiciones, y el número de ellas coincide con el número de filas no nulas.

Dada una matriz $A_{m \times n}$ distinguiremos en ella sus columnas pivotaes y sus columnas no pivotaes. La posición de sus columnas pivotaes se determinará mediante la obtención de cualquier forma escalonada por filas de la matriz.

6.4 Rango de una matriz

Se denomina **rango** de una matriz $A_{m \times n}$ al número de columnas pivotaes que tiene.

Propiedades:

- El rango coincide con el número de filas no nulas de cualquier forma escalonada por filas de la matriz.
- El rango ha de ser menor o igual que m y menor o igual que n .
- Todas las matrices equivalentes por filas entre sí tienen el mismo rango.
Nótese que el recíproco no se cumple. Ver el primer ejemplo de la Sección 5.6
- Un resultado muy importante que no vamos a demostrar es el siguiente: $\text{rg}A = \text{rg}A^t$
- El rango de la matriz I_n es n , pues la matriz ya es escalonada por filas y tiene n filas no nulas (o lo que es lo mismo, n columnas pivotaes).
- Toda matriz equivalente por filas a la identidad tiene rango n .

Ejemplo 6.1. $\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2$, $\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$, $\text{rg} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 3$

Ejercicio 6.1. Determina el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Sol.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-2)}{\sim_f} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(-1/3)}{\sim_f} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg} A = 3$$

Ejercicio 6.2. Determina el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix}$ en función de a .

Sol.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-a)}{\sim_f} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{Si } a \neq 0 \text{ el rango es } 2 \text{ y si } a = 0 \text{ el rango es } 1.$$

Es importante darse cuenta de no cometer el error de efectuar las operaciones: fila primera por $-a$, y fila segunda igual a ella misma más la primera. En efecto no puede hacerse porque la primera operación no es elemental (ver en página 2). Veamos la consecuencia de este error:

Si de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix}$ pasamos a $\begin{bmatrix} -a & -a \\ a & 2a \end{bmatrix}$, con la siguiente operación elemental (sumar a la segunda fila la primera) obtenemos $\begin{bmatrix} -a & -a \\ 0 & a \end{bmatrix}$, que denotamos como B . Interpretando el rango en esta matriz B , que erróneamente tomamos como equivalente por filas a A , se deduciría:

Si $a \neq 0$ el rango es 2, y si $a = 0$ el rango es 0. Nótese que para el caso $a = 0$ el rango obtenido es erróneo.

Ejercicio 6.3. a) Justifica si las siguientes matrices son equivalentes por filas o no y si tienen el mismo rango o no. b) Justifica si son o no equivalentes por columnas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sol.:

Las dos matrices están en forma escalonada y tienen el mismo número de filas no nulas, una, por tanto tienen el mismo rango, y su valor es 1.

Las matrices no son equivalentes por filas, porque ningún conjunto de operaciones elementales por filas permite llegar de una a la otra.

Las matrices son equivalentes por columnas, pues de la primera a la segunda se puede llegar aplicando las dos siguientes o.e. por columnas:

1) $C_{21}(2)$, 2) $C_{31}(2)$.

Ejercicio 6.4. Determina el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ en función de los valores de a .

Sol.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} = B$$

Hemos llegado a una matriz B equivalente por filas a A en la que ya se puede estudiar el rango de forma sencilla.

- Si $a \neq 3$ y $a \neq 1$ el rango es 4 ya que las cuatro columnas son pivotaes. Indicamos los pivotes de las columnas 3 y 4 con el símbolo $\diamond$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \diamond & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \diamond \end{bmatrix}$$

- Si $a = 3$ la tercera fila tiene todos los elementos nulos y la cuarta no, por lo que las intercambiamos, llegando a la siguiente escalonada por filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango es 3 y las columnas pivotaes son la primera, la segunda y la cuarta.

- Si $a = 1$, obtenemos a partir de B la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, que ya está escalonada. El rango es 3 y las columnas pivotaes son la primera, la segunda y la tercera.

6.5 Obtención de la forma escalonada reducida a partir de una forma escalonada

La obtención de la escalonada reducida por filas a partir de una forma escalonada se realiza mediante la eliminación denominada de Gauss-Jordan o de reducción, realizando las operaciones elementales por filas necesarias para transformar en “unos” los elementos pivote y en “ceros” los elementos de las columnas pivotaes situados por encima del elemento pivote.

Un procedimiento sistemático posible es el de escalar las filas no nulas, en primer lugar, a fin de que todos los pivotes tomen el valor 1, y seguidamente obtener los “ceros” por encima de los elementos pivote.

Denotando como $j_1, j_2 \dots j_r$ las columnas pivotaes de la matriz escalonada de orden $m \times n$, los pasos serían los siguientes:

- 1) Considerando la última fila no nula, que llamamos fila r , como auxiliar, y con las correspondientes operaciones elementales sobre las filas, consigamos mediante reemplazamientos que la columna j_r tenga ceros en las filas 1, 2, ..., $r - 1$. Ninguna columna a la izquierda de j_r se verá afectada por estas operaciones, ya que los elementos de la fila r a la izquierda de la columna pivotal j_r son todos nulos.
- 2) Continuamos hacia arriba, en la fila $r - 1$, donde a través de operaciones elementales, tomando la fila $r - 1$ como fila auxiliar, haremos cero los elementos de la columna pivotal j_{r-1} en las filas 1, 2, ..., $r - 2$. Continuamos con estas transformaciones para que cada columna pivotal j_i tenga ceros en las $i - 1$ primeras filas, siempre disminuyendo i , hasta $i = 2$.

Con el proceso descrito se obtiene la **forma escalonada reducida por filas**.

Ejemplo: Obtén la forma escalonada reducida de la matriz A del ejemplo de la Sección 6.2 partiendo de la forma escalonada allí obtenida (calculada mediante Eliminación Gaussiana Simple).

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{2(1/2)}]{F_{1(1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{13(-2)}]{F_{23(-3/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{F_{12(-3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{red \text{ filas}} \quad , \quad A \sim_f A_{red \text{ filas}}
 \end{aligned}$$

Las columnas pivotaes son las mismas: la segunda, la tercera y la quinta. Los pivotes ahora son todos 1 y cada columna pivotal tiene ceros por encima de los elementos pivote.

6.6 Equivalencia por filas a la identidad: aplicación para obtener la inversa

Si A_n es equivalente por filas a la identidad A es invertible, y ya que A_n se expresa cómo:

$$F_a \dots F_2 F_1 A = I \quad (6.1)$$

$$\text{despejamos } A^{-1} \text{ cómo: } A^{-1} = F_a \dots F_2 F_1 \quad (6.2)$$

$$\text{La última ecuación es igual a esta otra: } A^{-1} = F_a \dots F_2 F_1 I \quad (6.3)$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.3) ponen de manifiesto el siguiente resultado: efectuando la misma secuencia de operaciones elementales por filas y en el mismo orden que llevan de A a I , la matriz I se transforma en A^{-1} .

El resultado determina un procedimiento para obtener la inversa de una matriz denominado método de Gauss-Jordan. El esquema es el siguiente:

$$\begin{array}{c} [A \mid I] \longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow \longrightarrow [I \mid A^{-1}] \\ \text{operaciones elementales por filas} \end{array}$$

Ejemplo 6.2. Determina la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan, si es que dicha inversa existe.

$$\begin{aligned}
 A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow[F_{31(-2)}]{F_{21(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_{23}} \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{F_{2(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_{32(4)}} \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 & -4 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Observamos que el rango es 3, igual al orden de la matriz A , por tanto A tiene inversa. La submatriz de la izquierda es ya triangular superior, pero falta hacer “1” uno de los pivotes.

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{F_{3(1/8)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[F_{13(-1)}]{F_{23(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1-3/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2-3/2 & 0-1/4 & -1+1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array} \right] \\
 & \text{fila1} = \text{fila1} - 2*\text{fila2} \\
 & \xrightarrow{F_{12(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4-1 & -1/8+1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Resultado: La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$

6.7 Ejercicios

Ejercicio 6.5. *Calcula el rango de las siguientes matrices y las posiciones de sus columnas pivotaes.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 11 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.6. *Obtén la forma escalonada reducida por filas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$*

Ejercicio 6.7. *Calcula, si existen, las inversas de las siguientes matrices, aplicando el método de Gauss-Jordan.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.8. *Determina el rango de las siguientes matrices, en función del parámetro que contienen:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & s \\ 1 & 2 & s \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 1 & 3 & c & 0 & -3 \\ 0 & 1 & c & 2 & c \\ 0 & -1 & -1 & c & c \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Sol.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & s \\ 1 & 2 & s \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & s \\ 1 & 2 & s \\ 1 & s & s \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & s-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$F_{32(1-s)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $s = 2$ el rango es 2 y para $s \neq 2$ el rango es 3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 1 & 3 & c & 0 & -3 \\ 0 & 1 & c & 2 & c \\ 0 & -1 & -1 & c & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & c & -c & -2 \\ 0 & 1 & c & 2 & c \\ 0 & -1 & -1 & c & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & c & -c & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2+c & c+2 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 & c-2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & c & -c & -2 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 & c-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2+c & c+2 \end{bmatrix}$$

- Si $c = -2$ rango 3 porque se anula la cuarta fila, pero no la tercera
 - Si $c \neq -2$ rango 4 La cuarta fila produce pivote en la cuarta columna, y la fila tercera tiene pivote en la tercera columna si $c \neq 1$ y en la quinta si $c = 1$
-

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 0$ o $a = 1$ rango 3

Si $a \neq 1$ y $a \neq 0$ rango 4

$$\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & a-1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)*(3-a) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si $a = 3$ o $a = 1$ rango 3

Si $a \neq 1$ y $a \neq 3$ rango 4

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

$rg(E) = 1$ nunca

$rg(E) = 3$ si y sólo si $k = 0$ o $k = -1$

$rg(E) = 2$ nunca

$rg(E) = 4$ si y sólo si $k \neq 0$ y $k \neq -1$

Lección 7

Forma canónica equivalente

Hemos visto como a partir de una matriz $A_{m \times n}$ podíamos obtener infinitas matrices equivalentes por filas a ella, en la forma escalonada. Una de estas formas escalonadas es la denominada forma escalonada reducida de A , que es única. Todas las formas escalonadas por filas de A tendrán entre una y n columnas pivotaes (la única matriz sin columnas pivotaes es la matriz nula), que **no** serán necesariamente las n primeras. El número de columnas pivotaes, r , es el rango de la matriz A . Vemos en el siguiente ejemplo la obtención de una forma escalonada y de la forma reducida de una matriz sencilla, cuadrada de orden 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{2(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma esc. por filas Forma esc. por filas y reducida

Concluimos (ya al llegar a la primera forma escalonada por filas) que el rango de A es 2, siendo las columnas pivotaes la primera y la tercera.

La matriz a la derecha de todo es la forma escalonada por filas más sencilla posible que podemos obtener.

Mediante o.e. por columnas podemos ahora hacer que las columnas pivotaes sean las dos primeras:

$$\begin{matrix} C_{23} \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y continuando con o.e. por columnas podemos hacer que todos los elementos de las columnas no pivotaes sean nulos:

$$\begin{matrix} C_{31}(-2) \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{can \text{ equ}}$$

A la última matriz la llamamos “forma canónica equivalente” de la matriz A . Es única.

Forma canónica equivalente de la matriz $A_{m \times n}$ es la matriz equivalente de A que tiene la expresión:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & \Omega \\ \hline - & - \\ \Omega & \Omega \end{array} \right], \text{ siendo } r \text{ el rango de } A$$

Para obtener la forma canónica equivalente de una matriz $A_{m \times n}$ será necesario, en general, efectuar tanto operaciones elementales por filas como operaciones elementales por columnas.

Dadas $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ se cumple el siguiente resultado:

$A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ tienen la misma forma canónica equivalente $\Leftrightarrow$ Tienen el mismo rango $\Leftrightarrow$ Son equivalentes

También se puede expresar así:

$$\left. \begin{array}{l} A \sim A_{can \text{ equ}} \\ B \sim B_{can \text{ equ}} \end{array} \right\} \text{ Entonces } A_{can \text{ equ}} = B_{can \text{ equ}} \Leftrightarrow \text{rg}(A_{m \times n}) = \text{rg}(B_{m \times n}) \Leftrightarrow A \sim B \quad (7.1)$$

Obviamente si A_n es equivalente a la identidad, I_n , entonces la forma canónica equivalente de A es la identidad, I_n , ~~y recíprocamente~~. De forma general se cumple $A_n \sim I_n \Leftrightarrow \text{rg}(A_n) = n$

Resumiendo resultados anteriores:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{rg}A = \text{rg}B \quad (7.2)$$

$$A \sim_f B \Rightarrow \text{rg}A = \text{rg}B \quad (7.3)$$

$$A \sim_c B \Rightarrow \text{rg}A = \text{rg}B \quad (7.4)$$

Equivalencia por filas implica equivalencia, y lo mismo sucede con la equivalencia por columnas, y la equivalencia implica a su vez igualdad de rangos.

En los dos ejemplos siguientes vemos como las implicaciones (7.3) y (7.4) no se cumplen en sentido inverso:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ tienen el mismo rango y no son equivalentes por filas.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ tienen el mismo rango y no son equivalentes por columnas.}$$

A , B y C son, todos los pares, equivalentes entre sí.