Capítulo 17

Diagonalización ortogonal de matrices simétricas

17.1 Caracterización de las matrices ortogonales

En el Capítulo 1 se presentó la definición de matriz ortogonal Q, como aquella que verifica $Q^tQ = QQ^t = I$, es decir, tal que $Q^{-1} = Q^t$.

Por ser Q una matriz invertible, sus columnas $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ forman una base de $\mathbb{R}^n$, y podemos escribir Q cómo: $Q = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\ ]$ quedando por tanto $Q^t = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^t \\ \vec{b}_2^t \\ \vdots \\ \vec{b}_n^t \end{bmatrix}$

Desarrollando Q^tQ obtenemos:

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^t \\ \vec{b}_2^t \\ \vdots \\ \vec{b}_n^t \end{bmatrix} [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\ ] = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^t\vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_1^t\vec{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{b}_n^t\vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_n^t\vec{b}_n \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \vec{b}_i^t\vec{b}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$\vec{b}_i^t\ \vec{b}_j$ es la expresión del <u>producto escalar canónico</u> en $\mathbb{R}^n$ definido por:

$$\vec{b}_i^t\vec{b}_j = \left[b_i^1\ b_i^2\ \ldots\ b_i^n\right] \begin{bmatrix} b_j^1 \\ b_j^2 \\ \vdots \\ b_j^n \end{bmatrix} = b_i^1\ b_j^1\ +\ b_i^2\ b_j^2\ +\ \ldots\ +\ b_i^n\ b_j^n = \sum_{k=1}^{n} b_i^k\ b_j^k$$

(Los superíndices indican las componentes del vector $\vec{b}_i$).

Por tanto Q ortogonal $\Leftrightarrow\ \vec{b}_i^t\vec{b}_j = \delta ij\ \Leftrightarrow\ B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ es <u>base ortonormal respecto al producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$</u>.

La ortonormalidad significa que los vectores son ortogonales entre sí (el producto escalar de dos vectores distintos es nulo) y que cada uno de ellos es unitario, es decir, de norma 1, $\sqrt{\vec{b}_i^t\ \vec{b}_i} = 1\quad \forall i = 1, \ldots, n$ ($\vec{b}_i^t\ \vec{b}_i = 1$).

Concluimos que una matriz real invertible Q **es ortogonal si y sólo si sus columnas son base ortonormal respecto del producto escalar canónico en** $\mathbb{R}^n$.

Por la propiedad de que si Q es ortogonal, Q^t también lo es, tenemos que también se cumple que Q **es ortogonal si y sólo si sus filas son base ortonormal respecto del producto escalar canónico en** $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 17.1. *Demuestra que la matriz* $P = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$ *es ortogonal.*

Solución con dos métodos:

- *Efectuando* P^tP *obtenemos la matriz* I.
- *Denotanto* $\vec{b}_1 = (4/5, -3/5)$ *y* $\vec{b}_2 = (3/5, 4/5)$ *se obtiene:*

$$\vec{b}_1^t\ \vec{b}_2 = 0 \quad y \quad \vec{b}_1^t\ \vec{b}_1 = \vec{b}_2^t\ \vec{b}_2 = 1$$

17.2 Diagonalización ortogonal de matrices simétricas

- Se cumple el siguiente resultado para una matriz cuadrada real A: Si A es simétrica, entonces existen Q ortogonal y D diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. Recordamos que por ser Q invertible esta es también la factorización entre matrices A y D semejantes, y que por tanto D es la matriz de autovalores, y las columnas de Q forman la base de los correspondientes autovectores. Además, por ser Q ortogonal dicha base es base ortonormal respecto del producto escalar habitual.

  Teniendo en cuenta que $Q^{-1} = Q^t$, podemos expresar la factorización anterior en la forma $A = QDQ^t$.

  Por existir la matriz ortogonal Q tal que $A = QDQ^{-1}$ se dice de A que es 'ortogonalmente diagonalizable'.

  El resultado arriba indicado <u>para toda matriz A real y simétrica de orden n</u>, lo podemos desglosar en las siguientes propiedades:

  1. A tiene n raíces reales contando multiplicidades, por tanto n autovalores reales contando multiplicidades.
  2. La dimensión de los subespacios propios es igual a la multiplicidad algebraica de los correspondientes autovalores. Como consecuencia de este y el anterior resultado se tiene que A es diagonalizable.

     (Estos dos resultados los habíamos enunciado ya en el Capítulo 14.)

  3. Los subespacios propios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí respecto del producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$.

     Veamos la demostración de esta propiedad:

     Consideremos el producto $\vec{x}^t A\vec{y}$ siendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ autovectores de A correspondientes a los autovalores distintos λ y μ respectivamente.
     $\vec{x}^t A\vec{y} = \vec{x}^t \mu\vec{y} = \mu\ \vec{x}^t\ \vec{y} \qquad [1]$
     Por otra parte, por ser A simétrica ($A = A^t$) podemos escribir la primera igualdad cómo:
     $\vec{x}^t A\vec{y} = \vec{x}^t A^t\vec{y} = (A\vec{x})^t\vec{y} = (\lambda\vec{x})^t\vec{y} = \lambda\ \vec{x}^t\ \vec{y} \qquad [2]$

     Igualando los dos últimos términos de [1] y [2] obtenemos:
     $\mu\ \vec{x}^t\ \vec{y} = \lambda\ \vec{x}^t\ \vec{y} \Rightarrow (\lambda - \mu)\ \vec{x}^t\ \vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{x}^t\ \vec{y} = 0$ (pues $\lambda - \mu \neq 0$ por hipótesis).

Se obtiene por tanto que para los autovectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$, correspondientes a autovalores distintos, $\vec{x}^t\,\vec{y} = 0$, y que por tanto son ortogonales respecto del producto escalar canónico. Expresado de otra forma, podemos decir que los subespacios propios son mutuamente ortogonales respecto del producto escalar canónico.

4. Obteniendo para cada subespacio propio una base ortogonal[1], y uniendo estas bases, lograremos una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A. Dividiendo cada vector por su norma obtendremos finalmente una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores. La matriz Q de la factorización

   $A = QDQ^{-1} = QDQ^t$ es $Q = [\ \vec{b}_1\ \dots\ \vec{b}_n\ ]$ siendo $\{\ \vec{b}_1\ \dots\ \vec{b}_n\ \}$ la base ortonormal de autovectores.

- Se puede demostrar fácilmente que se cumple el resultado recíproco: A ortogonalmente diagonalizable implica A simétrica. En efecto, considerando $A = QDQ^t$ y tomando traspuestas obtenemos $A^t = (QDQ^t)^t = QDQ^t = A$, por tanto la existencia de diagonalización ortogonal implica que la matriz A ha de ser simétrica.

Conclusión: A es simétrica si y sólo si A es ortogonalmente diagonalizable.

Ejemplo 17.2. *Diagonalizar ortogonalmente la matriz* $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Sol:

Se obtiene a partir de la ecuación característica que los valores propios son $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 3$ *y* $\lambda_3 = 6$. *Por ser los tres valores propios distintos la matriz tiene 3 subespacios propios de dimensión 1:*

Resolviendo los SLs $[\ A - \lambda I \mid \vec{0}\ ]$ *para encontrar los subespacios propios obtenemos:*

$V_8 =< (1, -1, 0) >$ $\qquad V_3 =< (1, 1, 1) >$ $\qquad V_6 =< (1, 1, -2) >$

Se comprueba fácilmente que los tres vectores son ortogonales respecto del producto escalar habitual.

La matriz $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$ *es ortogonal, y por tanto la matriz A se puede factorizar en la forma* $A = PDP^t$, *con* $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

[1] Está demostrado que los vectores de subespacios propios distintos son ortogonales entre sí, pero dentro de un mismo subespacio propio de dimensión mayor o igual que 2 debemos elegir una base ortogonal.

Ejemplo 17.3. *Diagonalizar ortogonalmente la matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$*, cuya ecuación característica es* $0 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$

Sol:

La matriz A es real y simétrica por tanto sabemos que los subespacios propios son mutuamente ortogonales y que existe base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

El enunciado nos da el polinomio característico factorizado, por tanto ya sabemos que los autovalores son: $\boxed{\begin{cases} \lambda = -2 & \text{simple} \\ \lambda = 7 & \text{doble} \end{cases}}$

Debemos obtener en primer lugar una base de V_{-2}, que tendrá un único vector $\vec{v}_1$, y una base ortogonal de V_7, que tendrá dos vectores $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. Para ello hay que resolver los SLs $[\ A+2I \mid \vec{0}\ ]$ y $[\ A-7I \mid \vec{0}\ ]$ respectivamente.

- $V_{-2} = \{(-z, -1/2\ z, z)\ /\ z \in \mathbb{R}\}$, *de donde* $\vec{v}_1 = (2, 1, -2)$

  Normalizando $\vec{v}_1$ obtenemos: $\vec{u}_1 = (2/3, 1/3, -2/3)$

- $V_7 = \{(x, -2x+2z, z)\ /\ y, z \in \mathbb{R}\}$

  De aquí podemos obtener el vector $\vec{v}_2 = (1, -2, 0)$. El vector $(0, 2, 1)$ es un vector de V_7 que forma base con el anterior, sin embargo estos dos vectores no son ortogonales ya que su producto escalar es -4

  Para obtener un vector $\vec{v}_3$ que pertenezca a V_7 y sea ortogonal a $\vec{v}_2$ tenemos que resolver la ecuación:

  $\vec{v}_3\ .\ (1,-2,0) = (x, -2x+2z, z)\ .\ (1,-2,0) = x + 4x - 4z = 5x - 4z = 0 \qquad \Rightarrow\ z = \frac{5}{4}x$

  Sustituyendo $z = \frac{5}{4}x$ *en la expresión de los vectores de V_7 obtenemos:*

  $\vec{v}_3 = (x, -2x + 2\frac{5}{4}x, \frac{5}{4}x) = (x, \frac{1}{2}x, \frac{5}{4}x)$ *con x parámetro*

  Tomando $x = 4 \quad \vec{v}_3 = (4, 2, 5)$.

  Normalizando $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ obtenemos: $\begin{cases} \vec{u}_2 = (\ 1/\sqrt{5}\ ,\ -2/\sqrt{5}\ ,\ 0\ ) \\ \vec{u}_3 = (4/\sqrt{45}\ , 2/\sqrt{45}\ , 5/\sqrt{45}\ ) \end{cases}$

Por ser la matriz A real y simétrica V_7 y V_{-2} son ortogonales, y por tanto $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ además de ser ortogonales entre sí son ortogonales a $\vec{u}_1$.

La matriz $P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{bmatrix}$ *es ortogonal, y se verifica $A = PDP^t$, con*

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$