15.20 Matriz de proyección ortogonal

La proyección ortogonal de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre W es un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$, por tanto tiene una matriz asociada Pr tal que

$$Pr\vec{v} = \hat{\vec{v}} \qquad\qquad Pr \text{ es cuadrada de orden } n$$

Veremos a continuación como obtener dicha matriz, partiendo del siguiente dato: $B = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_d\}$ es base de W.

Definiendo la matriz $P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_d\ ]$ tenemos:

$P_B\vec{c} = \hat{\vec{v}}$, siendo $\vec{c}$ las coordenadas respecto de la base B del vector proyectado.

$\hat{\vec{v}}$, o la descomposición ortogonal, se define por la siguiente ecuación: $\hat{\vec{v}} \cdot (\vec{v} - \hat{\vec{v}}) = 0$, que expresa que el primer sumando, en W, y el segundo, en $W^\perp$, son ortogonales entre sí .

La reescribimos en función de P_B, $\vec{v}$ y $\vec{c}$ en la forma siguiente:

$$P_B\vec{c} \cdot (\vec{v} - P_B\vec{c}) = 0$$

Desarrollando el producto escalar:

$$(P_B\vec{c})^t(\vec{v} - P_B\vec{c}) = 0 \qquad \vec{c}^{\,t}P_B^t(\vec{v} - P_B\vec{c}) = 0 \qquad \vec{c}^{\,t}(P_B^t\vec{v} - P_B^tP_B\vec{c}) = 0$$

La última ecuación se verifica para todo vector $\vec{v}$ y por tanto para todos los valores posibles de las coordenadas de su proyección, que forman el vector $\vec{c}$, por tanto ha de anularse el factor (vector) de la derecha. Expresado de otra manera, el único vector que es ortogonal a todos los vectores $\vec{c} \in \mathbb{R}^d$ es el vector $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^d$.

$$P_B^t\vec{v} - P_B^tP_B\vec{c} = \vec{0} \ \text{ y por tanto } \ P_B^t\vec{v} = P_B^tP_B\vec{c}$$

Por otra parte, la matriz $P_B^tP_B$ [2] es invertible, por tanto podemos premultiplicar los dos miembros por $(P_B^tP_B)^{-1}$, obteniendo:

$$(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t\vec{v} = \vec{c}$$

Premultiplicando ahora por P_B para que a la derecha nos quede el vector proyectado, tenemos:

$$P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t\vec{v} = P_B\vec{c} = \hat{\vec{v}}$$

Por tanto la matriz de la proyección ortogonal es $\boxed{Pr = P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t}$, pues $Pr\vec{v} = \hat{\vec{v}}$.

Es obvio que la matriz $P_B^tP_B$ es simétrica[3]

Desarrollamos seguidamente el producto $P_B^tP_B$:

$$P_B^tP_B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_d \\ \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_d \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vec{b}_d \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_m \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_d \cdot \vec{b}_d \end{bmatrix}$$

(también podríamos deducir de aquí que como el producto escalar es simétrico, la matriz $P_B^tP_B$ es simétrica.)

En el desarrollo de $P_B^tP_B$ vemos de forma inmediata que si la base B es ortogonal $P_B^tP_B$ es una matriz diagonal, y que si la base es ortonormal $P_B^tP_B = I$. En este último caso la matriz de proyección queda: $Pr = P_BP_B^t$.

[2] M^tM es invertible si y solo si las columnas de M son linealmente independientes

[3] $(M^tM)^t = M^t(M^t)^t = M^tM$

<u>Propiedades de la matriz de proyección ortogonal</u>

1. Pr es simétrica

   Demostración:

   $Pr^t = (P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t)^t = P_B[(P_B^tP_B)^{-1}]^tP_B^t = P_B[(P_B^tP_B)^t]^{-1}P_B^t = P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t = Pr$

   En el Capítulo 1 vimos que dada P invertible $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$.

2. Pr es idempotente, es decir $Pr^2 = Pr$

   Demostración:

   $Pr^2 = P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^tP_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t = P_B(P_B^tP_B)^{-1}P_B^t = Pr$

15.21 Obtención de la matriz de proyección a partir de su semejante diagonal

Este procedimiento lo hemos utilizado en capítulos anteriores al estudiar la proyección ortogonal sobre una recta en $\mathbb{R}^2$ y sobre un plano en $\mathbb{R}^3$. Aquí lo extendemos para $\mathbb{R}^n$ y subespacios de $\mathbb{R}^n$ de cualquier dimensión.

En primer lugar tenemos que obtener, a partir de la base B del subespacio considerado W, una base C de $W^\perp$, resolviendo
el SL $P_B^t\vec{x} = \vec{0}$, o lo que es lo mismo, obteniendo una base de $\text{Nul}(P_B^t)$.

Así tenemos ya los dos subespacios propios ortogonales entre sí :

$\text{Col}(P_B)$ es el subespacio propio de autovalor 1, V_1

$\text{Col}(P_C)$ es el subespacio propio de autovalor 0, V_0

Una vez obtenida esa base creamos la matriz cuadrada $P = [P_B\ P_C] = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_d\ \vec{b}_{d+1}\ \vec{b}_{d+2}\ \dots\ \vec{b}_n\ ]$, en la que las columnas son obviamente la base de $\mathbb{R}^n$ formada por los vectores propios de la proyección.

Pr se obtiene entonces con la factorización $Pr = PDP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$

Ejemplo 15.30. *Obtén en $\mathbb{R}^5$ la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio generado por las columnas de la matriz A.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol. método 1: $Pr = P_B(P_B^t P_B)^{-1} P_B^t$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W = ColA$ tiene dimensión 3. Una posible base de W es la formada por las tres primeras columnas de A.

$$B = \{(1,0,0,0,1), (2,1,0,-1,2), (0,0,1,2,0)\} \qquad P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_B^t P_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tenemos que calcular la inversa de $P_B^t P_B$. Utilizaremos el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2-4/3 & 1+2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & 5/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1+20/3 & -10/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & 5/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 23/6 & -5/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & 5/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$Pr = P_B(P_B^t P_B)^{-1} P_B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times 1/6 \times \begin{bmatrix} 23 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$1/6\times\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&-1&2\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-10&-4&2&3\\0&5&2&-1&0\\0&2&2&2&0\end{bmatrix}=1/6\times\begin{bmatrix}3&0&0&0&3\\0&5&2&-1&0\\0&2&2&2&0\\0&-1&2&5&0\\3&0&0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&0&0&0&1/2\\0&5/6&1/3&-1/6&0\\0&1/3&1/3&1/3&0\\0&-1/6&1/3&5/6&0\\1/2&0&0&0&1/2\end{bmatrix}$$

Sol. método 2: *A partir de su semejante diagonal*

- $V_1 = ColA$ *y la base se determina como en el método 1.*
- *Obtenemos ahora el subespacio ortogonal a* V_1*, que además ha de ser* V_0*.*

Hemos de resolver el SL: $\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\2&1&0&-1&2\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&|0\\2&1&0&-1&2&|0\\0&0&1&2&0&|0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&|0\\0&1&0&-1&0&|0\\0&0&1&2&0&|0\end{bmatrix}$$

Ya tenemos la matriz ampliada en la forma escalonada reducida.

$x_1 = -x_5$ $\quad x_2 = x_4$ $\quad x_3 = -2x_4$

$(-x_5, x_4, -2x_4, x_4, x_5)$

Por tanto una posible base V_0 *es* $B = \{(-1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, -2, 1, 0\}$.

La factorización para obtener Pr *es* $Pr = P * D * P^{-1}$ *con:*

$$P=\begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&-2\\0&-1&2&0&1\\1&2&0&1&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Obtención de P^{-1} *mediante el método de Gauss-Jordan:*

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\,|&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\,|&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-2\,|&0&0&1&0&0\\0&-1&2&0&1\,|&0&0&0&1&0\\1&2&0&1&0\,|&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\,|&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\,|&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-2\,|&0&0&1&0&0\\0&-1&2&0&1\,|&0&0&0&1&0\\0&0&0&2&0\,|&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\,|&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\,|&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-2\,|&0&0&1&0&0\\0&0&2&0&2\,|&0&1&0&1&0\\0&0&0&2&0\,|&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\,|&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\,|&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-2\,|&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&6\,|&0&1&-2&1&0\\0&0&0&2&0\,|&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\,|&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\,|&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-2\,|&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\,|&0&1/6&-1/3&1/6&0\\0&0&0&1&0\,|&-1/2&0&0&0&1/2\end{bmatrix}\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -5/3 & -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 0 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/3 & -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Pr = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -5/3 & -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -5/3 & -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$Pr = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1/3 & 5/6 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$