15.19 Resolución de sistemas lineales incompatibles: método de mínimos cuadrados

Partimos de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ con $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_p]$, $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$, rg$A = p < n$ e incompatible. El hecho de que el SL sea incompatible significa que el vector $\vec{b}$ que estamos considerando no es combinación lineal de las columnas de A, es decir,

$\vec{b}$ no pertenece a $<\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_p\ >$, o de otra forma, $\vec{b} \notin \text{Col}A$.

Aunque no podemos resolver el SL $A\vec{x} = \vec{b}$, sí tiene solución el SL $A\vec{x} = \hat{\vec{b}}$, siendo $\hat{\vec{b}}$ la proyección ortogonal de $\vec{b}$ sobre $<\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_p\ >= \text{Col}A$.

Al ser $\hat{\vec{b}}$ la mejor aproximación de $\vec{b}$ para la que existe solución, o dicho de otra forma, el vector más cercano a $\vec{b}$ para el que existe solución, llamamos a la solución del nuevo SL compatible $\boxed{A\ \vec{x} = \hat{\vec{b}}}$ solución o aproximación de mínimos cuadrados del sistema incompatible.
O directamente, solución de mínimos cuadrados del sistema.

La razón de tomar A con todas las columnas linealmente independientes es la de evitar que el sistema $A\vec{x} = \hat{\vec{b}}$ sea indeterminado, en cuyo caso existirían infinitas soluciones de mínimos cuadrados.

Ejemplo 15.28. *a) Demuestra que el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ siguiente no tiene solución. b) Encuentra la solución de mínimos cuadrados.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 9/2 \\ 15/2 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5/2 \\ 1 & 1 & 0 & 9/2 \\ 1 & 1 & 2 & 15/2 \\ 1 & 3 & 3 & -5/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5/2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5/2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5/2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Sistema incompatible. $\vec{b}$ no es combinación lineal de las columnas de A.

La mejor aproximación de $\vec{b}$ se obtendrá como la proyección ortogonal de $\vec{b}$ sobre el subespacio generado por las columnas de A, proy $_{\text{ColA}}$ $\vec{b}$. Vemos a partir de la eliminación gaussiana anterior que dim ColA = rg A = 3.

- *Método 1: Obtenemos $\hat{\vec{b}}$ y seguidamente resolvemos $A\vec{x} = \hat{\vec{b}}$.*
  - *Procedimiento [I] para obtener $\hat{\vec{b}}$:*

    Estamos en $\mathbb{R}^4$ y queremos proyectar ortogonalmente sobre un subespacio de dimensión 3. Será más sencillo proyectar sobre $(ColA)^\perp$, que tiene dimensión 1, y después obtener $\hat{\vec{b}} = \vec{b} - proy_{\,(\text{ColA})^\perp}\ \vec{b}$

Tenemos dos métodos para obtener una base de $(ColA)^{\perp}$.

- $(ColA)^{\perp}$ *es el espacio con vectores* (x,y,z,t) *ortogonales a* $(1,1,1,1)$, $(3,1,1,3)$ *y* $(5,0,2,3)$, *por tanto las variables* x, y, z, t *verifican las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{cases}(1,1,1,1).(x,y,z,t) = x+y+z+t=0\\ (3,1,1,3).(x,y,z,t) = 3x+y+z+3t=0\\ (5,0,2,3).(x,y,z,t) = 5x+2z+3t=0\end{cases}$$

Resolviendo el SL de matriz ampliada $\begin{bmatrix}1&1&1&1&|\,0\\3&1&1&3&|\,0\\5&0&2&3&|\,0\end{bmatrix}$ *mediante eliminación gaussiana se obtiene esta forma escalonada:* $\begin{bmatrix}1&1&1&1&|\,0\\0&1&1&0&|\,0\\0&0&1&-1&|\,0\end{bmatrix}$

Realizamos operaciones elementales por filas para llegar a la forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix}1&1&0&2&|\,0\\0&1&0&1&|\,0\\0&0&1&-1&|\,0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1&|\,0\\0&1&0&1&|\,0\\0&0&1&-1&|\,0\end{bmatrix}$$

Tomando t *como parámetro,* $x=-t$, $y=-t$, $z=t$, *por tanto* $(-t,-t,t,t)$ *es el vector genérico y* $\{(1,1,-1,-1)\}$ *una posible base de* $(ColA)^{\perp}$.

- *El otro método consiste en obtener la forma implícita de ColA, que tendrá una única ecuación (4 variables y dimensión 3), ya que los coeficientes de la ecuación dan una base de (ColA)*$^{\perp}$.

$$\begin{bmatrix}1&3&5&x\\1&1&0&y\\1&1&2&z\\1&3&3&t\end{bmatrix}\sim\ldots\sim\begin{bmatrix}1&3&5&x\\0&-2&-5&y-x\\0&0&2&z-y\\0&0&0&z-y+t-x\end{bmatrix}$$

Ec. implícita de ColA: $x+y-z-t=0 \Rightarrow \vec{v}=(1,1,-1,-1)$ *es base de* $(ColA)^{\perp}$.

Es la misma que la obtenida mediante el procedimiento anterior.

Una vez obtenida la base de (ColA)$^{\perp}$ *aplicamos la fórmula:*

$$proy_{\ (\mathrm{ColA})^{\perp}} = \frac{(5/2,9/2,15/2,-5/2).(1,1,-1,-1)}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{5/2+9/2-15/2+5/2}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

Y restamos esa proyección del vector $\vec{b}$

$$\hat{\vec{b}} = \begin{bmatrix}5/2\\9/2\\15/2\\-5/2\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \boxed{\textit{(2,4,8,-2)}}$$

– *Procedimiento [II] para obtener* $\hat{\vec{b}}$.
a) Obtenemos una base ortogonal de ColA
b) Utilizamos la fórmula para calcular $\hat{\vec{b}}$

$$\hat{\vec{b}} = proy_{\text{ColA}}\ \vec{b} = \frac{\vec{b}.\vec{v_1}}{\vec{v_1}.\vec{v_1}}\ \vec{v_1} + \frac{\vec{b}.\vec{v_2}}{\vec{v_2}.\vec{v_2}}\ \vec{v_2} + \frac{\vec{b}.\vec{v_3}}{\vec{v_3}.\vec{v_3}}\ \vec{v_3},$$

a) Para obtener la base ortogonal de ColA partimos de la forma implícita, que se calcula como se presentó en el Método 1.
Ec. implícita de ColA: $x + y - z - t = 0$

De esa ec. implícita se obtiene la forma paramétrica: $(-y + z + t, y, z, t)$
$\vec{v_1} = (1, 0, 0, 1)$

$\vec{v_2}$ *debe cumplir* $x = -y + z + t$ *y además ser ortogonal al anterior, por tanto*
$(1, 0, 0, 1).(-y + z + t, y, z, t) = -y + z + 2t = 0 \qquad \Rightarrow\ y = z + 2t.$
$\vec{v_2}$ *tiene la forma* $(-t, z + 2t, z, t)$ *tomando* $z = 1,\ t = 0$ $\qquad \vec{v_2} = (0, 1, 1, 0)$

$\vec{v_3}$ *debe tener la forma paramétrica anterior por pertenecer al subespacio y ser ortogonal a* $\vec{v_1}$*. Como además debe ser ortogonal a* $\vec{v_2} = (0, 1, 1, 0)$ *deberá cumplir*
$(0, 1, 1, 0).(-t, z + 2t, z, t) = 2z + 2t = 0$ *por tanto* $z = -t$.
De esta ecuación y las anteriores obtenemos para $\vec{v_3}$ *la forma paramétrica* $(-t, t, -t, t)$*, y tomamos* $\vec{v_3} = (1, -1, 1, -1)$.

$B\ =\ \{\ \vec{v}_1\ ,\ \vec{v}_2\ ,\ \vec{v}_3\ \}$ *es base ortogonal de ColA.*

$$\hat{\vec{b}} = \frac{(5/2, 9/2, 15/2, -5/2)\cdot(1, 0, 0, 1)}{2}\ \vec{v}_1 + \frac{(5/2, 9/2, 15/2, -5/2)\cdot(0, 1, 1, 0)}{2}\ \vec{v}_2 +$$

$$\frac{(5/2, 9/2, 15/2, -5/2)\cdot(1, -1, 1, -1)}{4}\ \vec{v}_3 =$$

$$\frac{0}{2}\ \vec{v}_1 + \frac{12}{2}\ \vec{v}_2 + \frac{8}{4}\ \vec{v}_3 = 6\ \vec{v}_2 + 2\ \vec{v}_3 = 6(0, 1, 1, 0) + 2(1, -1, 1, -1) = \boxed{\textit{(2,4,8,-2)}}$$

Obviamente obtenemos el mismo vector que con el procedimiento [I].

Ahora hay que resolver el sistema compatible de matriz ampliada:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es compatible y la <u>solución de mínimos cuadrados</u> es $\boxed{(10, -6, 2)}$

- *Método 2: Solución con el procedimiento de la sección 17.*

  a) Obtenemos una base (ColA)$^\perp$

  Dicha base es $(1,1,-1,-1)$. *Su obtención (de dos formas distintas) se presentó más arriba.*

  b) Resolvemos el SL de matriz ampliada: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 5/2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 9/2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 15/2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & -5/2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 5/2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 9/2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 15/2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & -5/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 5/2 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 5/2 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 5/2 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La solución es $(10,-6,2,1/2)$, *que debemos interpretar así :*

- $(10,-6,2)$ *es la solución de mínimos cuadrados buscada.*
- $\hat{\vec{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\vec{b} - \hat{\vec{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} 1/2$

La norma del último vector es la diferencia o "error" de la aproximación.