15.17 Descomposición ortogonal y proyección ortogonal

El resultado $W \bigoplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$, significa que cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de forma única como suma de un vector $\hat{\vec{y}} \in W$ y un vector $\vec{z} \in W^{\perp}$

$$\vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z} \qquad \text{con } \hat{\vec{y}} \in W \text{ y } \vec{z} \in W^{\perp}$$

$\hat{\vec{y}}$ es la **proyección ortogonal de** $\vec{y}$ **sobre** W, que denotamos también como proy $_W$ $\vec{y}$

También se puede dar esta definición equivalente: La proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre W es el vector $\hat{\vec{y}} \in W$ tal que $\vec{y} - \hat{\vec{y}} \in W^{\perp}$

¿ Cómo obtener $\text{proy}_W \vec{y}$?

Ya que $W \bigoplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$ podemos obtener una base de $\mathbb{R}^n$ $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_d, \vec{b}_{d+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$, con $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_d\}$ base de W y $\{\vec{b}_{d+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$ base de $W^{\perp}$.

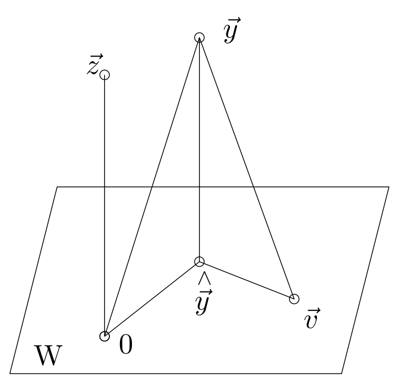
Entonces $\vec{y} = \underbrace{c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_d\vec{b}_d}_{\text{proy}_W \vec{y} \in W} + \underbrace{c_{d+1}\vec{b}_{d+1} + \ldots + c_n\vec{b}_n}_{\vec{z} \in W^{\perp}}$

con $\text{proy}_W \vec{y} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_d\vec{b}_d \in W$ y

$\vec{z} = c_{d+1}\vec{b}_{d+1} + \ldots + c_n\vec{b}_n \in W^{\perp}$

Una vez obtenidas las coordenadas c_1, c_2, ... c_n, que son únicas (las coordenadas respecto de una base dada son únicas), podremos determinar el vector único $\text{proy}_W \vec{y} \in W$ y el vector único $\vec{z} \in W^{\perp}$ tales que $\vec{y} = \text{proy}_W \vec{y} + \vec{z}$.

Esquema en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$:



Por otra parte, $\hat{\vec{y}}$ tiene la propiedad de ser el vector de W más cercano a $\vec{y}$

$$\| \vec{y} - \text{proy}_W \vec{y} \| \; < \; \| \vec{y} - \vec{v} \| \quad \forall \vec{v} \in W \quad \text{con } \vec{v} \neq \hat{\vec{y}}$$

Decimos entonces que dado $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, la **mejor aproximación** de $\vec{y}$ que puedo obtener mediante un vector de W, subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, es $\text{proy}_W \vec{y}$

¿ En qué sentido es mejor aproximación?. En el sentido de menor distancia.

La **distancia** de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ **al subespacio** W se define como la distancia desde $\vec{y}$ al punto más cercano de W. Dicho de otra forma, la distancia de $\vec{y}$ a W es igual a $\| \vec{y} - \text{proy}_W \vec{y} \| = \| \vec{z} \|$

OBSERVACIONES

- $\vec{z} = \text{proy}_{W^\perp}\vec{y}$, es decir, $\vec{z}$ es la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $W^\perp$.
- $\|\ \text{proy}_W\vec{y}\ \|$ es la distancia de $\vec{y}$ a $W^\perp$.

En capítulos anteriores hemos estudiado proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, determinando a partir de las características de la transformación cuál era la matriz asociada referida a la "base natural" de la transformación, o base de autovectores de la transformación, y cual era la matriz estándar asociada, obtenida mediante los cambios de base. Con procedimientos similares pudimos obtener la matriz asociada a la simetría ortogonal. A partir de las matrices resultaba sencillo obtener la proyección ortogonal o el simétrico de cualquier vector.

En este capítulo estudiamos la proyección ortogonal a partir de la descomposición ortogonal. Y se extiende el concepto de proyección ortogonal al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ de cualquier dimensión n.

15.18 Proyección ortogonal sobre un subespacio del que conocemos una base ortogonal

TEOREMA. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_d\}$ una base ortogonal de W e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$proy_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}\ \vec{b}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2}\ \vec{b}_2 + \ldots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_d}{\vec{b}_d \cdot \vec{b}_d}\ \vec{b}_d \qquad [\mathbf{9a}]$$

Demostración:

$proy_W \vec{y} \in W$, por tanto $proy_W \vec{y} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \ldots + c_d \vec{b}_d$ [**I**]

Multiplicando escalarmente la expresión anterior por el vector $\vec{b}_1$ obtenemos:

$proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_1 = c_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + 0 + \ldots + 0 = c_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 \quad \Rightarrow \quad proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_1 = c_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1$

Despejando c_1: $$c_1 = \frac{proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{b}_2$ obtendríamos c_2 y así sucesivamente hasta obtener c_d.

En definitiva:

$$c_i = \frac{proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$$

Por otra parte, $\forall i = 1 \ \ldots \ d$, $proy_W \vec{y} \cdot \vec{b}_i = (\vec{y} - \vec{z}) \cdot \vec{b}_i = \vec{y} \cdot \vec{b}_i$ ya que $\vec{z} \cdot \vec{b}_i = 0$ por ser $\vec{z}$ la proyección de $\vec{y}$ sobre $W^\perp$ y por tanto ortogonal a todos los $\vec{b}_i$. Podemos entonces escribir los coeficientes c_i cómo:

$$c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$$

Sustituyendo los c_i en la ecuación [**I**] obtenemos la igualdad [**9a**] presentada en el teorema.

$$proy_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}\ \vec{b}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2}\ \vec{b}_2 + \ldots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_p}{\vec{b}_p \cdot \vec{b}_p}\ \vec{b}_p$$

Justificaremos más adelante que la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $< \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_d >$, siendo $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_d\}$ una base ortogonal, es igual a la suma de las d proyecciones ortogonales sobre subespacios de dimensión uno, mutuamente ortogonales, en las direcciones de $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_d$. En efecto, cada sumando corresponde a la proyección ortogonal sobre un subespacio $< \vec{b}_i >$.

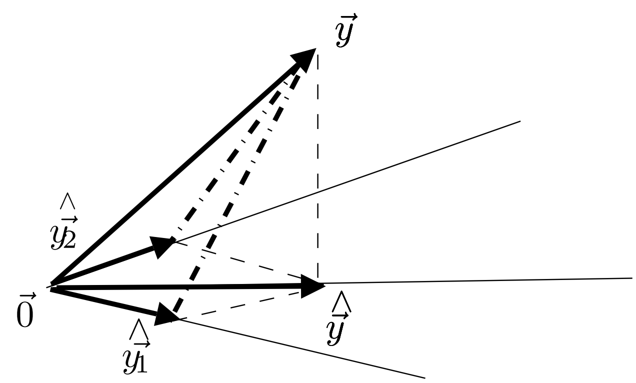
- Si la base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_d\}$ es ortonormal la expresión [**9a**] queda cómo:

$$proy_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{b}_1)\ \vec{b}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{b}_2)\ \vec{b}_2 + \ldots + (\vec{y} \cdot \vec{b}_d)\ \vec{b}_d \qquad [\mathbf{9b}]$$

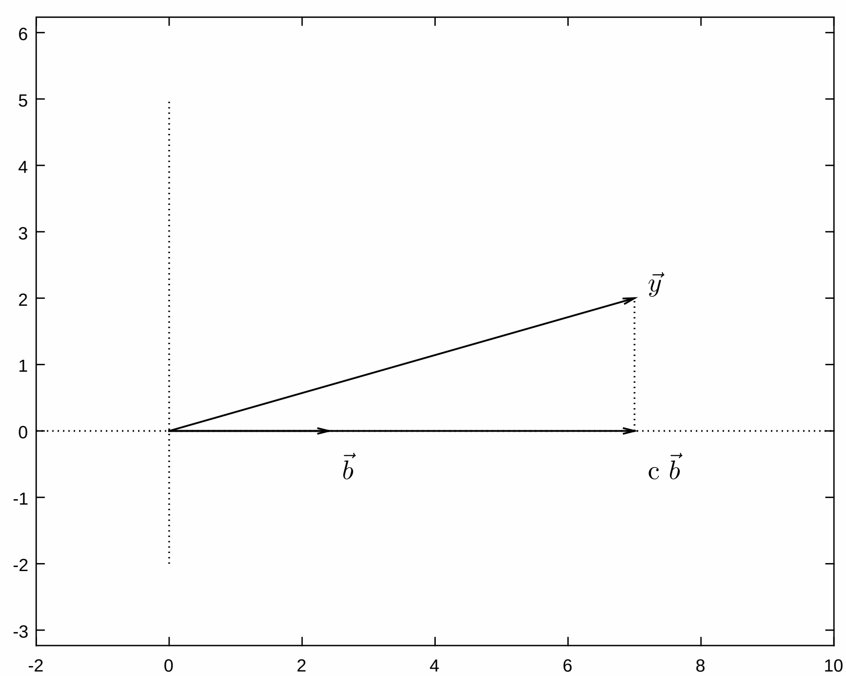
Para cálculos a mano se recomienda utilizar la fórmula [**9a**] ya que en la [**9b**] aparecerán en general raíces cuadradas.

COROLARIO. Si $\vec{y} \in W$, entonces $\text{proy}_W\ \vec{y} = \vec{y}$ y $\vec{z} = \vec{0}$.

Esquema en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$ para la proyección sobre un plano y tomando una base ortogonal en el plano:



Esquema en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^2$ para la proyección ortogonal de un vector sobre una recta.



$\text{proy}_{<\vec{b}>}\vec{y} = c\vec{b}$

$$(\vec{y} - c\vec{b}) \,.\, \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{y}.\vec{b} - c\;\vec{b}.\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}$$

$$\text{proy}_{<\vec{b}>}\vec{y} = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\;\vec{b}$$

Obsérvese que el vector proyección de $\vec{y}$ sobre $<\vec{b}>$ no depende de como esté escalado $\vec{b}$ (con múltiplos de $\vec{b}$ obtendríamos el mismo vector proyección).

Ejemplo 15.20. *Considera en el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^2$ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ *y* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Escribe* $\vec{y}$ *como suma de un vector en el subespacio generado por* $\vec{b}$ *y de un vector ortogonal a* $\vec{b}$.

Sol:

$$proy_{<\vec{b}>}\vec{y} = \frac{(2,6)\cdot(7,1)}{49+1}(7,1) = \frac{14+6}{50}(7,1) = \frac{20}{50}(7,1) = \frac{2}{5}(7,1) = (\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$$

$$\vec{y} = proy_{<\vec{b}>}\ \vec{y} + \vec{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{z} = \vec{y} - proy_{<\vec{b}>}\ \vec{y} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-14/5 \\ 6-2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 28/5 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $\underbrace{\begin{bmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}}_{\in<\vec{b}>} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4/5 \\ 28/5 \end{bmatrix}}_{\in<\vec{z}_1>} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Ejemplo 15.21. *Considera en el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^2$ *los vectores* $\vec{y} = (7,6)$ *y* $\vec{b} = (4,2)$. *Encuentra la proyección ortogonal de* $\vec{y}$ *sobre* $< \vec{b} >$ *y la distancia de* $\vec{y}$ *a la recta* $<\vec{b}>$.

<u>Sol:</u>

Puesto que el subespacio sobre el que se proyecta es de dimensión 1, su base puede considerarse como base ortogonal.

$$\text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = \frac{\vec{y}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\ \vec{b}$$

$$\text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = \frac{(7,6).(4,2)}{(4,2).(4,2)}\ (4,2) = \frac{28+12}{16+4}\ (4,2) = 2(4,2) = (8,4)$$

La distancia de $\vec{y}$ *a* $<\vec{b}>$ *es igual a la norma de* $\vec{z} = \vec{y} - \textit{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = (7,6) - (8,4) = (-1,2)$

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

El vector $\text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y}$ *también se podía haber obtenido mediante el procedimiento visto en la Sección 17.*

Calculamos en primer lugar un vector $\vec{z}_1$ *ortogonal a* $\vec{b} = (4,2)$. *Un ejemplo es* $\vec{z}_1 = (1,-2)$.

Considerada la base $B = \{\vec{b}, \vec{z}_1\}$, *con un vector en la dirección de* $\vec{b}$ *y otro en la dirección ortogonal* $\vec{z}_1$, *se calculan las coordenadas de* $(7,6)$ *respecto a esta base, resultando ser* $(2,-1)$, *es decir:*

$$(7,6) = 2(4,2) + -1(1,-2) = \underbrace{(8,4)}_{\in<\vec{b}>} + \underbrace{(-1,2)}_{\in<\vec{z}_1>}$$

Por tanto la proyección de $(7,6)$ *sobre* $(4,2)$ *es el vector* $\text{proy}_{<\vec{b}>}\ \vec{y} = (8,4)$

Ejemplo 15.22. *Considera en el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$ *el plano* W *que pasa por el origen y por los puntos (0,10,2) y (4,10,2). Calcula la proyección ortogonal del vector* $\vec{v} = (2, 4, 12)$ *sobre* W. *Determina la distancia del punto (2,4,12) al plano* W *y a la recta* $W^{\perp}$.

<u>*Sol.:*</u>

Veamos la resolución del ejercicio siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 17:

Para resolver el problema buscaremos la expresión de $\vec{v}$ *en una base* B *que contenga los dos vectores generadores de* W, *que son* $\vec{a} = (0, 10, 2)$ *y* $\vec{b} = (4, 10, 2)$, *y un vector* $\vec{z}_1 \in W^{\perp}$. *Los tres vectores forman una base de* $\mathbb{R}^3$, $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{z}_1\}$, *con* $\vec{a} \in W$, $\vec{b} \in W$ *y* $\vec{z}_1 \in W^{\perp}$.

Obtenemos $W^{\perp} =< (0, -1, 5) >$ *mediante los métodos anteriormente descritos (es decir, buscando vector* (x, y, z) *ortogonal a la vez a* $(0, 10, 2)$ *y a* $(4, 10, 2)$, *y que por tanto cumpla las ecuaciones* $10y + 2z = 0$ *y* $4x + 10y + 2z = 0$, *o mediante el producto vectorial). Tomamos* $\vec{z}_1 = (0, -1, 5)$.

Se obtiene seguidamente que las coordenadas de $\vec{v} = (2, 4, 12)$ *en la base* $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{z}_1\}$ *son* $\begin{bmatrix} 3/26 \\ 1/2 \\ 28/13 \end{bmatrix}$,

por tanto,

$$\vec{v} = \frac{3}{26}\ \vec{a} + \frac{1}{2}\ \vec{b} + \frac{28}{13}\ \vec{z}_1$$

Nos fijamos ahora en que $3/26\ \vec{a} + 1/2\ \vec{b} \in W$ *y* $28/13\ \vec{z}_1 \in W^{\perp}$. *Por tanto ya tenemos el vector* $\vec{v}$ *expresado como suma de un vector de* W *y otro de* $W^{\perp}$,

$\vec{v} = proy_W \vec{y} + \vec{z}$

- $proy_W \vec{y} = \dfrac{3}{26}\ \vec{a} + \dfrac{1}{2}\ \vec{b} = ... = (2, \dfrac{80}{13}, \dfrac{16}{13}) = \dfrac{2}{13}(13, 40, 8) = (2, 6.15385, 1.23077)$

$$\vec{z} = \frac{28}{13}\ \vec{z}_1 = \frac{28}{13}(0, -1, 5) = (0, \frac{-28}{13}, \frac{140}{13}) = (0, -2.15385, 10.7692)$$

- *La distancia de* $\vec{v}$ *al plano es la norma de* $\vec{z}$,

  $d = \sqrt{0^2 + (-2.15385)^2 + 10.7692^2} = 10.9825$ *si usamos el formato decimal.*

  $d = 28/13\sqrt{0 + 1^2 + 5^2} = 28/13\sqrt{26} = 28/13\sqrt{2 \times 13} = 28\sqrt{2/13}$ *presentando la solución exacta simplificada.*

- *La distancia de* $\vec{v}$ *a la recta* $W^{\perp}$ *es la norma de* $proy_W \vec{v}$, *es decir:*

  $d' = \sqrt{2^2 + (6.15385)^2 + 1.23077^2} = 6.5867$ *si usamos formato decimal.*

  $d' = 2/13\sqrt{13^2 + 40^2 + 8^2} = 2/13\sqrt{1833}$ *presentando la solución exacta simplificada.*

En este ejercicio también podríamos haber tomado $\vec{a}_1 = (0, 5, 1)$ *y* $\vec{b}_1 = (2, 5, 1)$ *como base de* W, *para simplificar los cálculos. En este caso encontraríamos:*

$\vec{v} = 3/13\ \vec{a}_1 +\ \vec{b}_1 + 28/13\ \vec{z}_1$. *Sustituyendo los vectores base obtendríamos obviamente los mismos vectores* $proy_W \vec{y}$ *y* $\vec{z}$.

Presentamos ahora la solución del ejercicio (la parte de calcular la proyección ortogonal) aplicando el procedimiento visto en la Sección 18.

Ya que dimW=2 y dim$W^\perp = 1$*, en la descomposición* $\vec{v} = proy_W\vec{y} + \vec{z}$ *calcularemos primero* $\vec{z}$ *y seguidamente* $proy_W\vec{y} = \vec{v} - \vec{z}$*, ya que en este procedimiento hay que hacer menos cálculos para proyectar sobre un subespacio de dimensión 1 que para proyectar sobre un subespacio de dimensión 2. De entrada ya necesitamos que la base sea ortogonal, en el caso de dimensión mayor que 1.*

Obtenemos en primer lugar una base de $W^\perp$ *(el procedimiento está descrito arriba porque también se necesitó en el método anterior).*

Una vez obtenido $\vec{z_1}$ *se obtiene la proyección de* $\vec{v}$ *sobre la recta* $<\vec{z_1}>= W^\perp$*:*

$$\text{proy}_{W^\perp}\vec{v} = \frac{\vec{v}.\vec{z}_1}{\vec{z}_1.\vec{z}_1}\ \vec{z_1} = \frac{(2,4,12)\cdot(0,-1,5)}{26}\ \vec{z_1} = \frac{28}{13}\ \vec{z_1} = (0,-\frac{28}{13},\frac{140}{13})$$

A continuación:

$$\text{proy}_W\vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{W^\perp}\vec{v} = (2,4,12) - (0,-\frac{28}{13},\frac{140}{13}) = (2,\frac{80}{13},\frac{16}{13}) = (2, 6.15385, 1.23077)$$

Este es el método más simple para los casos en los que en la descomposición $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$ *uno de los dos subespacios tiene dimensión 1.*

Ejemplo 15.23. *Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla siguiente. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.*

	A	*B*
Vitamina C	1	2
Calcio	5	4
Magnesio	3	2

a) Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener un aporte exacto $\vec{v} = (17\ mg\ de\ vitamina\ C, 54\ mg\ de\ calcio, 31\ mg\ de\ magnesio)$

b) Determina el aporte más cercano al aporte exacto que se podría conseguir combinando los dos alimentos.

Sol.:

a) Para determinar si el aporte $(17, 54, 31)$ *se puede obtener combinando* x *unidades de alimento A con aporte* $(1, 5, 3)$ *e* y *unidades de B con aporte* $(2, 4, 2)$ *hay que resolver la siguiente ecuación:*

$$x(1, 5, 3) + y(2, 4, 2) = (17, 54, 31)$$

Por tanto el SL: $\begin{cases} x + 2y = 17 \\ 5x + 4y = 54 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases}$, *con matriz ampliada* $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid 17 \\ 5 & 4 & \mid 54 \\ 3 & 2 & \mid 31 \end{bmatrix}$

$$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid 17 \\ 0 & -6 & \mid -31 \\ 0 & -4 & \mid -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid 17 \\ 0 & -6 & \mid -31 \\ 0 & 1 & \mid 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid 17 \\ 0 & 1 & \mid 5 \\ 0 & -6 & \mid 31 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid 17 \\ 0 & 1 & \mid 5 \\ 0 & 0 & \mid -1 \end{bmatrix}$$

El SL es incompatible pues rgA=2 y rgA**=3*

Esto significa que $\vec{v}$ *no es combinación lineal de* $\vec{a} = (1, 5, 3)$ *y* $\vec{b} = (2, 4, 2)$. *O dicho de otra forma, que* $\vec{v}$ *no pertenece al plano* $< \vec{a}\ ,\ \vec{b} >$.

b) El vector más cercano a $\vec{v} = (17, 54, 31)$ *que se puede obtener combinando los alimentos A y B será la proyección ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre el subespacio generado por* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$. *Por tanto tenemos que obtener:*

$proy_W \vec{v}$*, siendo* $W = < \vec{a}\ ,\ \vec{b} >$

- *Procedimiento según la sección 17:*

  Tomamos $W = < (1, 5, 3), (1, 2, 1) >$, *y nos falta un vector* $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in W^{\perp}$.

  Nótese que hemos tomado el segundo vector base de W *como 1/2 de* $\vec{b}$*, para simplificar cálculos. Llamaremos a este nuevo vector* $\vec{b_1}$.

  $\begin{matrix} (1, 5, 3).(n_1, n_2, n_3) = 0 \\ (1, 2, 1).(n_1, n_2, n_3) = 0 \end{matrix} \begin{cases} n_1 + 5n_2 + 3n_3 = 0 \\ n_1 + 2n_2 + n_3 = 0 \end{cases} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & \mid 0 \\ 1 & 2 & 1 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & \mid 0 \\ 0 & -3 & -2 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim$

  $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10/3 + 3 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & \mid 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (1/3n_3, -2/3n_3, n_3)$

  $W^{\perp} = < (1/3, -2/3, 1) >$ *o más simple* $W^{\perp} = < (1, -2, 3) >$

Expresando (17,54,31) como combinación lineal de los vectores de la base $B = \{(1,5,3),(1,2,1),(1,-2,3)\}$ *obtenemos:*

$$(17,54,31) = \underbrace{\frac{48}{7}(1,5,3) + 10(1,2,1)}_{proy_W \vec{v}} \; + \; \underbrace{\frac{1}{7}(1,-2,3)}_{proy_{W^\perp} \vec{v}}$$

Sin más que resolver el SL $[\ \vec{a}\ \vec{b_1}\ \vec{n}\ |\ \vec{v}\ ]$*, y tras encontrar que dicha solución es* $(48/7, 10, 1/7)$.

$proy_W \vec{v} = 48/7(1,5,3) + 10(1,2,1) = (118/7, 380/7, 214/7) = (16.8571, 54.2857, 30.5714)$
es el aporte más cercano posible.

Se puede simplificar más como: $proy_W \vec{v} = 2/7(59,190,107)$.

- <u>*Procedimiento según la sección 18:*</u>

  El vector más cercano a $\vec{v} = (17,54,31)$ *que se puede obtener combinando los alimentos A y B será la proyección ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* W*. Obtendremos en primer lugar la proyección ortogonal sobre* $W^\perp$*, por ser más sencillo aplicar la fórmula sobre un subespacio de dimensión 1. Además la base de* W *que conocemos no es ortogonal.*

  En el procedimiento de descomposición ortogonal ya se presentó la obtención de la base de $W^\perp$*,* $\{\vec{n} = (1,-2,3)\}$.

  La proyección de $\vec{v}$ *sobre la recta* $<\vec{n}>= W^\perp$ *es:*

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\vec{v}.\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\ \vec{n} = \frac{(17,54,31)\cdot(1,-2,3)}{14}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} = \frac{(17-108+93)}{14}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

  $\mathrm{proy}_W \vec{v} = \vec{v} - \hat{\vec{v}} = (17,54,31) - \frac{1}{7}(1,-2,3) = (118/7, 380/7, 214/7) = 2/7(59,190,107)$.

Ejemplo 15.24. *En el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^4$ demuestra que no es posible expresar el vector $\vec{v} = (30, 20, 6, -10)$ como combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \{(-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2)\}$. Obtén los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de S que dan el vector más cercano a $\vec{v}$.*

Sol.:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & | & 30 \\ 0 & 1 & | & 20 \\ 0 & -1 & | & 6 \\ 1 & -2 & | & -10 \end{bmatrix}$$

La suma de las ecuaciones 2 y 3 da incompatibilidad.

El vector de $< S >$ más cercano a $\vec{v}$ es la proyección de $\vec{v}$ sobre $< S >$. Presentaremos la obtención de la proyección y de sus coeficientes respecto de la base S, utilizando dos métodos distintos.

Método de descomposición ortogonal de $\vec{v}$ (Sección 17)

Para obtener una base del complemento ortogonal de $< S >=< (-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, 2) >$ tenemos que resolver el SL homogéneo con matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | \, 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & | \, 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | \, 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | \, 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | \, 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | \, 0 \end{bmatrix}$$

La solución general en forma paramétrica es: $(t, z - 2t, z, t)$

Y la base más sencilla de $< S >^{\perp}$ es $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$

Resolviendo el sistema: $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \,| & 30 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \,| & 20 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \,| & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \,| & -10 \end{bmatrix}$*, obtenemos la solución* $(11/2, 17/2, 29/2, 3/2)$.

Los coeficientes buscados son 11/2 y 17/2, ya que

$$11/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 17/2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ *es el vector de $< S >$ más cercano a $\vec{v}$*

Aplicando la fórmula de proyección, cuando se conoce base ortogonal del subespacio (Sección 18)

Los dos vectores de S forman base de $< S >$, pero esa base no es ortogonal. Para obtener una base ortogonal de $< S >$ calculamos en primer lugar la forma implícita de $< S >$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \\ 0 & -1 & | & z \\ 1 & -2 & | & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \\ 0 & -1 & | & z \\ 0 & 2 & | & x+t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \\ 0 & 0 & | & y+z \\ 0 & 0 & | & x-2y+t \end{bmatrix}$$

La forma implícita es: $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \end{cases}$

De las ecuaciones implícicas de W pasamos a la siguiente forma paramétrica, resolviendo el SL:
$(x, y, -y, -x + 2y)$

De ella obtenemos directamente la base $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 2)\}$, que tampoco es base ortogonal.

Tomamos entonces como primer vector de la base ortogonal, $\vec{b}_1 = (1,0,0,-1)$*, por ser el más sencillo.*

El segundo vector base lo obtenemos siguiendo cualquiera de estos procedimientos:

- *Método 1. Tomamos la forma paramétrica general, e imponiendo ortogonalidad al vector* $\vec{b}_1$ *tenemos:* $(x, y, -y, -x+2y)\cdot(1,0,0,-1) = x + x - 2y = 0$*. Por tanto* $x = y$*, y la forma paramétrica reduce un parámetro, quedando:* $(y, y, -y, y)$*. El segundo vector base es pues* $\vec{b}_2 = (1,1,-1,1)$*.*

- *Método 2. Añadimos a la forma implícita de* W *la condición de ortogonalidad a* $(1,0,0,-1)$*, quedándonos entonces el SL siguiente:*

  $$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

  La solución general de este sistema es $(y, y, -y, y)$*, de donde deducimos* $\vec{b}_2 = (1,1,-1,1)$

Ahora ya tenemos una base ortogonal en $< S >$*,* $B = \{(1,0,0,-1),(1,1,-1,1)\}$*, y por tanto podemos aplicar la fórmula de la sección 18.*

$$\hat{\vec{v}} = \frac{(30,20,6,-10)\cdot(1,0,0,-1)}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{(30,20,6,-10)\cdot(1,1,-1,1)}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix} =$$

$$20\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{34}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20+17/2\\17/2\\-17/2\\-20+17/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}57/2\\17/2\\-17/2\\-23/2\end{bmatrix}$$

A continuación obtenemos los coeficientes de la combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$ *de* $< S >$ *que dan el vector más cercano a* $\vec{v}$*. Para ello hay que resolver el siguiente sistema:*

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 4 & 57/2\\0 & 1 & 17/2\\0 & -1 & -17/2\\1 & -2 & -23/2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 4 & 57/2\\0 & 1 & 17/2\\0 & 0 & 0\\0 & 2 & 34/2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 4 & 57/2\\0 & 1 & 17/2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & -11/2\\0 & 1 & 17/2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\begin{cases} c_1 = 11/2 \\ c_2 = 17/2 \end{cases}$$

Ejemplo 15.25. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$ *considera* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Observa que* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *es una base ortogonal de* $W =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$. *a) Escribe* $\vec{y}$ *como suma de un vector de* W *y un vector perpendicular a* W. *b) Obtén el punto de* W *más cercano a* $\vec{y}$ *y la distancia de* $\vec{y}$ *a* W.

a) Por ser $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *una base ortogonal podemos aplicar la siguiente fórmula:*

$$proy_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\ \vec{v}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\ \vec{v}_2 =$$

$$\frac{(2+10-3)}{(4+25+1)}\ \vec{v}_1 + \frac{(-2+2+3)}{(4+1+1)}\ \vec{v}_2 = \frac{9}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = proy_W \vec{y} + \vec{z} \quad con\ \vec{z} \in W^\perp \quad \Rightarrow \quad \vec{z} = \vec{y} - proy_W \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \underset{\in W}{\begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix}} + \underset{\in W^\perp}{\begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix}}$$

b) El punto más cercano es $(-2/5, 2, 1/5)$.

La distancia de $\vec{y}$ *a* W *es la norma de* $\vec{z} = (7/5, 0, 14/5)$:

$$d = 7/5\sqrt{1^2 + 2^2} = 7/5\sqrt{5} = 7/\sqrt{5}$$

También se podía haber resuelto calculando un vector $\vec{n}$ *normal al plano generado por* $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$, *aplicar la fórmula de la proyección sobre la perpendicular al plano para obtener* $\vec{z}$ *y finalmente obtener la proyección sobre el plano como* $\vec{y} - \vec{z}$.

Ejemplo 15.26. *Considerando el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$*, los vectores* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ *y* $W = < \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$*, obtén* $\text{proy}_W \vec{y}$.

Se puede comprobar que $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$ *son ortogonales, y que por tanto es aplicable la fórmula siguiente:*

$$\text{proy}_W \ \vec{y} = \frac{(\vec{y} \cdot \vec{v}_1)}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \ \vec{v}_1 + \frac{(\vec{y} \cdot \vec{v}_2)}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \ \vec{v}_2 = \frac{(63 + 1 + 24)}{(49 + 1 + 16)} \ \vec{v}_1 + \frac{(9 + 1 - 12)}{(1 + 1 + 4)} \ \vec{v}_2 = \frac{88}{66} \ \vec{v}_1 - \frac{2}{6} \ \vec{v}_2$$

$$= \frac{4}{3} \ \vec{v}_1 - \frac{1}{3} \ \vec{v}_2 = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28/3 + 1/3 \\ 4/3 - 1/3 \\ 16/3 + 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27/3 \\ 3/3 \\ 18/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

En este caso encontramos que $\text{proy}_W \ \vec{y} = \vec{y}$*. Esto es debido a que* $\vec{y} \in W$*, es decir, es combinación lineal de* $\vec{v}_1$ *y de* $\vec{v}_2$*. El punto más cercano de* W *a* $\vec{y}$ *es el propio* $\vec{y}$*.*

Ejemplo 15.27. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^4$ *se considera el subespacio* $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$

a) Calcula una base ortonormal de S.

b) Calcula una base ortonormal de $S^{\perp}$.

c) Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (1, 0, 1, 1)$ *sobre* S.

d) Calcula la distancia de $\vec{v}$ *a* S.

Sol.:

El apartado a) es igual al Ejemplo 9.

$$B = \{(0, 1, 0, 0), \frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1, 0, 1, -2)}{\sqrt{6}}\}$$

b) Base ortonormal de $S^{\perp}$
Un vector genérico de S *cumple:* $x-z-t = 0$, *que puedo expresar como* $(x, y, z, t).(1, 0, -1, -1) = 0$, *por tanto un vector* $(x, y, z, t) \in S$ *es aquel que es ortogonal a* $(1, 0, -1, -1)$.
$\alpha(1, 0, -1, -1)$ *será también ortogonal a* $(x, y, z, t) \in S$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *por tanto:*
$S^{\perp} =< (1, 0, -1, -1) >$

Base ortonormal: $$B = \{\frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}}\}$$

c) $\vec{v} = \mathrm{proy}_S\ \vec{v} + \mathrm{proy}_{S^{\perp}}\ \vec{v}$

Es más fácil calcular la proyección sobre $S^{\perp}$ *que la proyección sobre* S, *puesto que* $S^{\perp}$ *tiene dimensión uno (una recta en* $\mathbb{R}^4$*) mientras que* S *tiene dimensión 3. Por tanto obtendremos en primer lugar* $\mathrm{proy}_{S^{\perp}}\ \vec{v}$ *y a continuación* $\mathrm{proy}_S\ \vec{v} = \vec{v} - \mathrm{proy}_{S^{\perp}}\ \vec{v}$.

La base de $S^{\perp}$ *obtenida en el apartado anterior,* $B = \{\ 1/\sqrt{3}\ (1, 0, -1, -1)\ \}$ *es base ortonormal, lo que simplifica la fórmula de la proyección.*

$\mathrm{proy}_{<\vec{u}>}\ \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}\ \vec{u}$

$$\mathrm{proy}_{S^{\perp}}\ \vec{v} = (1, 0, 1, 1).\frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}}\ \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{1-1-1}{\sqrt{3}}\ \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} = \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3}$$

$$\mathrm{proy}_S\ \vec{v} = \vec{v} - \mathrm{proy}_{S^{\perp}}\ \vec{v} = (1, 0, 1, 1) - \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3} = \frac{(4, 0, 2, 2)}{3}$$

d) La distancia de $\vec{v}$ *a* S *es igual a la norma de* $\mathrm{proy}_{S^{\perp}}\ \vec{v}$

$$d = \|\ \mathrm{proy}_{S^{\perp}}\ \vec{v}\ \| = \|\ \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3}\ \| = \frac{1}{3}\sqrt{1+1+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$