15.15 Subespacios vectoriales ortogonales

Consideremos el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$.

Se dice que $\vec{z}$ es **ortogonal a un subespacio** W de $\mathbb{R}^n$ si $\vec{z}$ es ortogonal a todo vector $\vec{w} \in W$.

TEOREMA. $\vec{z}$ es ortogonal al subespacio W de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $\vec{z}$ es ortogonal a una base de W.

Se dice que W y H **subespacios** de $\mathbb{R}^n$ son **ortogonales** entre sí si $\forall \vec{z} \in W$, $\vec{z}$ es ortogonal a H.

TEOREMA. W es ortogonal al subespacio H de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si los vectores de una base de W son ortogonales a los de una base de H.

Ejemplo 15.12. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$*, considera las rectas* $\mathbf{r} =< (1, a, 2) >$ *y* $\mathbf{s} =< (1, -2, 0) >$*. Determina el o los valores de* a *tales que* $\mathbf{r}$ *y* $\mathbf{s}$ *sean subespacios ortogonales.*

Sol:

Las bases de r *y* s *son respectivamente* $\{(1, a, 2)\}$ *y* $\{(1, -2, 0)\}$.

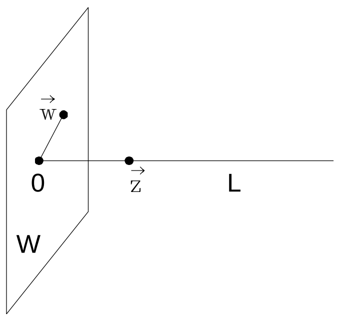
El producto escalar de los dos vectores es $1 - 2a$*, por tanto las rectas son ortogonales si y solo si* $a = 1/2$.

La recta $\mathbf{r}$ *es la siguiente:* $< (1, 1/2, 2) >$.

15.16 Complemento ortogonal de un subespacio

El conjunto de todos los vectores $\vec{z}$ que son ortogonales a W se denomina **complemento ortogonal** de W y se denota como $W^{\perp}$.

Ejemplo 15.13. *Consideremos en el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$ *el subespacio* W *identificado con un plano atravesando el origen y el subespacio* L *identificado con la recta que atraviesa el origen y perpendicular al plano anterior. Se tiene entonces que* $\forall \vec{z} \in L$ *y* $\forall \vec{w} \in W$, $\vec{z} \cdot \vec{w} = 0$. *Ver la figura. En efecto,* L *está formado por* **todos** *los vectores que son ortogonales a los* $\vec{w}$ *de* W *y recíprocamente* W *está formado por* **todos** *los vectores ortogonales a los* $\vec{z}$ *de* L. *Es decir,* $L = W^{\perp}$ *y* $W = L^{\perp}$



Un plano conteniendo al origen, en $\mathbb{R}^3$*, como* W*, es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$ *de dimensión 2. 2 vectores base.*

Tomemos por ejemplo el caso de $W =< (1,0,0),(0,1,0) >$.

Los vectores ortogonales a W *serán los* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *ortogonales a la base de* W*, es decir, tales que:*

$$\begin{cases} (x,y,z)\cdot(1,0,0) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(0,1,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \textit{Por tanto } W^{\perp} =< (0,0,1) >$$

TEOREMA. Se cumplen los siguientes resultados sobre $W^{\perp}$, siendo W un subespacio del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

1. $W^{\perp}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$
3. $W \bigoplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$

OBSERVACIÓN:

Todo subespacio $W \subset \mathbb{R}^n$ (salvo el $\vec{0}$ y el propio $\mathbb{R}^n$) admite infinitos subespacios complementarios, pero solo uno de ellos es complemento ortogonal respecto al producto escalar que se haya adoptado. Por ejemplo, en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^3$, cualquier recta pasando por el origen y no incluida en el plano XY es subespacio complementario del subespacio formado por el plano XY, pero el complemento ortogonal del plano XY es un subespacio único, que es la recta que define el eje Z.

Nótese en el ejemplo anterior que para obtener los vectores ortogonales a (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ hay que resolver la ec. $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$, es decir, la ec. lineal homogénea $ax + by + cz = 0$.

$ax + by + cz = 0$ es la forma implícita de un subespacio bidimensional W de $\mathbb{R}^3$, y expresa que W y $< (a, b, c) >$ son complementos ortogonales. Los vectores (x, y, z) de W y los vectores de $W^\perp =< (a, b, c) >$ son ortogonales entre sí .

De forma más general, para un subespacio W de dimensión d de $\mathbb{R}^n$, su forma implícita $A_{\ n-d\ ,\ n}\ \vec{x} = \vec{0}$ expresa que los $\vec{x} \in W$, que son las soluciones, y por tanto Nul$A$, son ortogonales a las filas de A. La base de W la forman las d soluciones independientes del SLH, o lo que es lo mismo la base de Nul$A$ y las filas de A forman la base de $W^\perp$.

Que $W^\perp$ sea el subespacio generado por las filas de A se expresa también así: $W^\perp = \text{Col}(A^t)$.

Se tiene entonces que dada A, los subespacios Nul$A$ y Col(A^t) son complementos ortogonales.

La ecuación $2x + 3y = 0$ de W, subespacio de $\mathbb{R}^2$ tiene la solución $(-3, 2)$.

Por tanto $W =< (-3, 2) >$ y $W^\perp =< (2, 3) >$.

Es importante darse cuenta de que el "vector que aparece" en la ecuación, en este caso $(2, 3)$, es precisamente el ortogonal, y por tanto no perteneciente al subespacio que define la ecuación.

Ejemplo 15.14. *Sea* $\{(3,2,2,4),(1,0,0,2),(1,-1,-1,1)\}$ *un sistema generador de* F*, subespacio vectorial del espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^4$*. Halla una base del complemento ortogonal de* F*.*

Sol:

Los vectores ortogonales a los dados serán los (x,y,z,t) *que cumplan las siguientes ecuaciones:*

$(3,2,2,4)\cdot(x,y,z,t)=0$
$(1,0,0,2)\cdot(x,y,z,t)=0$
$(1,-1,-1,1)\cdot(x,y,z,t)=0$

forma impl. de $F^\perp$*:* $\begin{cases} 3x+2y+2z+4t=0 \\ x+2t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}$

Las 3 ecuaciones anteriores forman un SLH por lo que ya estamos viendo que $F^\perp$ *es un subespacio vectorial. Para obtener la base de* $F^\perp$ *hay que resolver el sistema.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & | \ 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & | \ 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & | \ 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & | \ 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | \ 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | \ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos 3 ecuaciones, rango 3, y 4 incógnitas. Por tanto tenemos $4-3=1$ *parámetro libre. Tomando* z *como parámetro libre deducimos:*

$-4t=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t=0}$
$y+z+t=0 \quad \Rightarrow \quad y+z=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=-z}$
$x=-2t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0}$

El vector solución es de la forma $(x,y,z,t)=(0,-z,z,0) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los tres dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es: $\{(0,-1,1,0)\}$

Nótese que aunque en el enunciado F *viene dado por un sistema generador, ese sistema es base, ya que al resolver las implícitas de* $F^\perp$ *se encontró* $rg3$.

Ejemplo 15.15. *Se considera el espacio vectorial euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$ *y en él los siguientes subespacios vectoriales:* $W_1 =< (1,1,0),(0,3,6) >$, $W_2 =< (1,2,1) >$ *y* $W_3 =< (7,8,5),(6,3,1),(1,3,6) >$. *Halla las bases de los subespacios ortogonales correspondientes* $W_1^\perp$, $W_2^\perp$, $W_3^\perp$.

<u>*Sol:*</u>

a) $W_1^\perp = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /(x,y,z)$ *es ortogonal a (1,1,0) y a (0,3,6)*

$(x,y,z)\cdot(1,1,0) = x+y=0$
$(x,y,z)\cdot(0,3,6) = 3y+6z=0$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \mid 0 \\ 0 & 3 & 6 & \mid 0 \end{bmatrix}$

El sistema se encuentra ya en la forma escalonada. Tomamos z *como parámetro libre.*

$3y+6z=0 \quad \Rightarrow y+2z=0 \quad \Rightarrow y=-2z$
$x+y=0 \quad \Rightarrow x=-y \quad \Rightarrow x=2z$

El vector solución es de la forma $(x,y,z) = (2z,-2z,z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$
El conjunto de vectores ortogonales a los dos dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es $\{(2,-2,1)\}$
$W_1^\perp$ *se expresaría como* $W_1^\perp =< (2,-2,1) >$

NOTA: Se puede obtener $W_1^\perp =< \vec{n} >$ *, siendo* $\vec{n} = (1,1,0)\times(0,3,6)$ *(***producto vectorial***).*

b) $W_2^\perp = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /(x,y,z)$ *es ortogonal a (1,2,1)*

$(x,y,z)\cdot(1,2,1) = x+2y+z=0$

La última ecuación es la ecuación implícita de $W_2^\perp$
Tenemos una sola ecuación y tres incógnitas, por tanto dos parámetros libres. Dejando como parámetros libres y *y* z *tendremos*

$x+2y+z=0 \quad \Rightarrow x=-2y-z \quad y=y, \quad z=z$

El vector solución en forma paramétrica es $(x,y,z) = (-2y-z,y,z) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}$
El conjunto de vectores ortogonales al dado es un subespacio vectorial de dimensión 2. Una posible base es: $\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$.
$W_2^\perp =< (-2,1,0),(-1,0,1) >$

c) $W_3^\perp = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /(x,y,z)$ *es ortogonal a (7,8,5), (6,3,1) y (1,3,6)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & \mid 0 \\ 6 & 3 & 1 & \mid 0 \\ 7 & 8 & 5 & \mid 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 100$$

det$A \neq 0$, *por tanto tenemos un sistema de Cramer, con solución única, y como el sistema es homogéneo, la solución única es la trivial.*

Por tanto $W_3^\perp = \{(0,0,0)\}$.

W_3 *representa todo el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$, *por lo que era de esperar que* $W_3^\perp = \{\vec{0}\}$.
Habíamos visto anteriormente como $\vec{0}$ *es ortogonal a todos los vectores.*

Ejemplo 15.16. *Se considera el espacio vectorial euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$ *y el subespacio vectorial* W *dado por* $2x + y - z = 0$*. Determina* $W^{\perp}$*.*

<u>*Sol:*</u>

Podemos interpretar la ecuación $2x+y-z = 0$ *como la expresión del producto escalar de dos vectores, igualado a cero, siendo los vectores* $(2, 1, -1)$ *y* (x, y, z)*. Los vectores* (x, y, z) *contenidos en el plano que representa el subespacio vectorial* W *de* $\mathbb{R}^3$ *son los vectores ortogonales al vector* $(2, 1, -1)$*, y obviamente a los múltiplos de éste.*
En efecto si $(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \lambda(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0$
Por tanto $W^{\perp} =< (2, 1, -1) >$.

Ejemplo 15.17. *Se considera el espacio vectorial euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$ *y el subespacio vectorial* W *dado por la forma implícita siguiente:* $\begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ *. Determina* $W^{\perp}$*.*

<u>*Sol:*</u>

Las ecuaciones implícitas expresan que los vectores (x, y, z) *de* W *son a la vez ortogonales al vector* $(1, 4, 8)$ *y al vector* $(1, -1, 1)$*, por tanto una base de* $W^{\perp}$ *es* $\{(1, 4, 8), (1, -1, 1)\}$*.*

Ejemplo 15.18. *Obtén una base del complemento ortogonal de*
$W =< (-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2), (3, 1, -1, -1) >$.
15-16 Junio GIM sin Matlab
15-16 Septiembre GIM sin Matlab

Sol.:

Los vectores ortogonales a los dados serán los (x, y, z, t) *que cumplan las siguientes ecuaciones:*

$$(-1, 0, 0, 1) \cdot (x, y, z, t) = 0 \qquad \begin{cases} -x + t = 0 \\ 4x + y - z - 2t = 0 \\ 3x + y - z - t = 0 \end{cases}$$
$$(4, 1, -1, -2) \cdot (x, y, z, t) = 0$$
$$(3, 1, -1, -1) \cdot (x, y, z, t) = 0$$

Las 3 ecuaciones anteriores son las ecuaciones implícitas de $W^\perp$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos en realidad dos ecuaciones, por tanto $dim W^\perp = 4 - 2 = 2$ *(dos parámetros libres).*

La base se obtiene resolviendo el sistema:

$$x = t \qquad y = z - 2t \qquad z \text{ y } t \text{ parámetros libres.}$$

Por tanto la forma paramétrica de los vectores de $W^\perp$ *es* $(t, z - 2t, z, t)$ *y la base más sencilla:* $B = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$

Ejemplo 15.19. *Considerado en* $\mathbb{R}^4$ *el subespacio* W *de ecuaciones implícitas:* $\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$, *una base ortonormal del complemento ortogonal de* W *es:*

15-16 Septiembre GIQ Sin Matlab

Sol.:

Los coeficientes de las ecuaciones de W *son la base de* $W^\perp$, $B = \{ (-1, 0, 0, 1) , (-2, -1, 1, 0) \}$. *La base no es ortonormal. Para calcular la base ortonormal tomamos el primer vector de* B *y determinamos el segundo imponiendo la pertenencia a* $W^\perp$ *y la ortogonalidad al anterior.*

Obtenemos la forma implícita y forma paramétrica de $W^\perp$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -2 & x + t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & y + z \\ 0 & 0 & x - 2y + t \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones impl. de $W^\perp$ *son:* $y + z = 0, x - 2y + t = 0$ *y la forma paramétrica:* $(-2z - t, -z, z, t)$.

La condición de ortogonalidad al primer vector añade: $-x + t = 0$.

Sustituyendo la igualdad anterior en la expresión paramétrica obtenemos $2z + t + t = 0$, *por tanto* $t = -z$. *La expresión paramétrica queda entonces en función de un único parámetro:* $(-z, -z, z, -z)$ *y la base ortonormal será:*

$$B = \{(-1, 0, 0, 1)/\sqrt{2}, (1, 1, -1, 1)/2\}$$