15.5 Longitud o norma de un vector

Sea el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Se denomina **norma** o **longitud** de $\vec{v}$ al *escalar no negativo* $\| \vec{v} \|$ definido por:

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^t \ \vec{v}}$$

Nótese que la raíz está definida, ya que $\vec{v} \cdot \vec{v}$ es positivo.

La expresión general de la norma es la siguiente:

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^t \ \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \qquad [\mathbf{3}]$$

Propiedades de la norma:

- $\| c\vec{v} \| = |c| \ \| \vec{v} \|$
- Desigualdad de Schwarz $\quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \ \leq \ \| \vec{u} \| \ \ \| \vec{v} \|$

  La igualdad se cumple cuando alguno de los dos vectores es nulo, o, sin serlo, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$
- Desigualdad de Minkowski o desigualdad triangular $\quad \| \vec{u} + \vec{v} \| \ \leq \ \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$

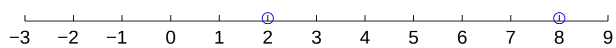
  La igualdad se cumple cuando alguno de ellos es nulo, o, sin serlo, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se dice **vector unitario** si $\| \vec{v} \| = 1$

Multiplicando el vector no nulo $\vec{v}$ por el escalar $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ obtenemos un vector $\vec{v}_\circ = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ que es unitario y del que decimos que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$. El proceso de crear $\vec{v}_\circ$ a partir de $\vec{v}$ se denomina **normalización** de $\vec{v}$.

15.6 Distancia entre dos vectores

A continuación vamos a definir la distancia entre vectores. Recordamos que si a y b son números reales, la distancia en la línea de números entre a y b es el número $|a-b|$. En la figura se da un ejemplo.



$$\begin{array}{ll} |2-8| = |-6| = 6 & |8-2| = |6| = 6 \\ |(-3)-4| = |-7| = 7 & |4-(-3)| = |7| = 7 \end{array}$$

Esta definición de distancia se puede extender a $\mathbb{R}^n$.

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la **distancia entre** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, denotada como $\operatorname{dist}(\vec{u},\vec{v})$, es la norma del vector $\vec{v}-\vec{u}$. Esto es, $\operatorname{dist}(\vec{u},\vec{v}) = \| \vec{v}-\vec{u} \| = \sqrt{(\vec{v}-\vec{u})^t(\vec{v}-\vec{u})}$

Propiedades de la distancia:

- $\operatorname{dist}(\vec{u},\vec{v}) > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{v}$, y $\operatorname{dist}(\vec{u},\vec{u}) = 0$
- $\operatorname{dist}(\vec{u},\vec{v}) = \operatorname{dist}(\vec{v},\vec{u})$
- Desigualdad triangular $\quad \operatorname{dist}(\vec{u},\vec{v}) \leq \operatorname{dist}(\vec{u},\vec{w}) + \operatorname{dist}(\vec{w},\vec{v})$

La expresión general de la distancia entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$ es la siguiente:

$$\operatorname{dist}(\vec{u},\vec{v}) = \sqrt{(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 + \ldots + (v_n-u_n)^2} \qquad [\mathbf{4}]$$

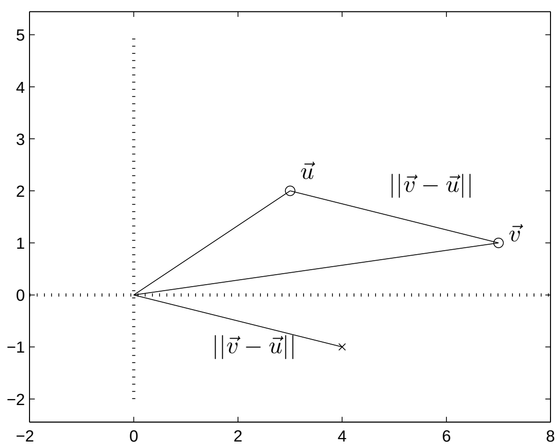
Ejemplo 15.2. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^2$*, calcula la distancia entre los vectores* $\vec{v} = (7,1)$ *y* $\vec{u} = (3,2)$.

Sol.:

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\| \vec{v} - \vec{u} \| = \sqrt{(\vec{v} - \vec{u})^t(\vec{v} - \vec{u})} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{v} - \vec{u}$ *se muestran en la figura. Sumando al vector* $\vec{v} - \vec{u}$ *el vector* $\vec{u}$ *, el resultado es* $\vec{v}$. *Nota como el paralelogramo de la figura muestra que la distancia de* $\vec{u}$ *a* $\vec{v}$ *es la misma que la distancia de 0 a* $\vec{v} - \vec{u}$.



Ejemplo 15.3. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^4$*, calcula la distancia entre los vectores* $\vec{v} = (7,1,1,5)$ *y* $\vec{u} = (3,2,1,3)$.

Sol.:

$\vec{v} - \vec{u} = (4,-1,0,2)$
$dist = \| \vec{v} - \vec{u} \| = \sqrt{16+1+0+4} = \sqrt{21}$

15.7 Ángulo entre dos vectores

En el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$ se define ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ninguno de ellos nulo, como el escalar $\alpha = \text{áng}(\vec{u}, \vec{v})$ siguiente:

$$\alpha \in [0, \pi] \quad \text{tal que} \quad \vec{u}^t\ \vec{v} = \parallel \vec{u} \parallel \ \parallel \vec{v} \parallel \cos\alpha$$

Despejando $\cos\alpha$:
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}^t\ \vec{v}}{\parallel \vec{u} \parallel \ \parallel \vec{v} \parallel} \qquad [\mathbf{5}]$$

- $\vec{u}^t\ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$
- $\vec{u}^t\ \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0, \pi/2)$

  Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{u}^t\ \vec{v} = \vec{u}^t\ \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u}^t\ \vec{u}) > 0$
  $$\cos\alpha = \frac{\lambda \parallel \vec{u} \parallel^2}{\parallel \vec{u} \parallel \ \parallel \lambda\vec{u} \parallel} = \frac{\lambda \parallel \vec{u} \parallel^2}{|\lambda| \parallel \vec{u} \parallel^2} = 1 \qquad \Rightarrow \alpha = 0$$

- $\vec{u}^t\ \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (\pi/2, \pi]$

  Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{u}^t\ \vec{v} = \vec{u}^t\ \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{u}^t\ \vec{u}) < 0$
  $$\cos\alpha = \frac{\lambda \parallel \vec{u} \parallel^2}{\parallel \vec{u} \parallel \ \parallel \lambda\vec{u} \parallel} = \frac{\lambda \parallel \vec{u} \parallel^2}{|\lambda| \parallel \vec{u} \parallel^2} = -1 \qquad \Rightarrow \alpha = \pi$$

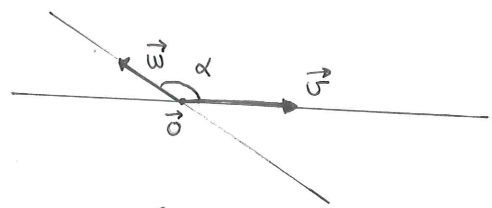
Nótese que $\vec{u}^t\ \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ en el espacio euclídeo canónico.

OBSERVACIÓN: Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos del espacio euclídeo son linealmente dependientes si y sólo si el ángulo que forman es 0 o π.

Esquema del ángulo formado por dos vectores:

$\boxed{\text{ESPACIO EUCLÍDEO}}$

ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES



$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$1 \geq \cos\alpha \geq -1$$

$\alpha = 0$	$\vec{v}\cdot\vec{w} > 0$	$\cos\alpha = 1$	paralelos e igual sentido
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\vec{v}\cdot\vec{w} > 0$	$1 > \cos\alpha > 0$	Ángulo agudo
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$	$\cos\alpha = 0$	Ángulo recto
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\vec{v}\cdot\vec{w} < 0$	$-1 < \cos\alpha < 0$	Ángulo obtuso
$\alpha = \pi$	$\vec{v}\cdot\vec{w} < 0$	$\cos\alpha = -1$	paralelos y sentido opuesto.

1

15.8 Vectores ortogonales

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$ son ortogonales entre sí si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \ \vec{v} = 0$

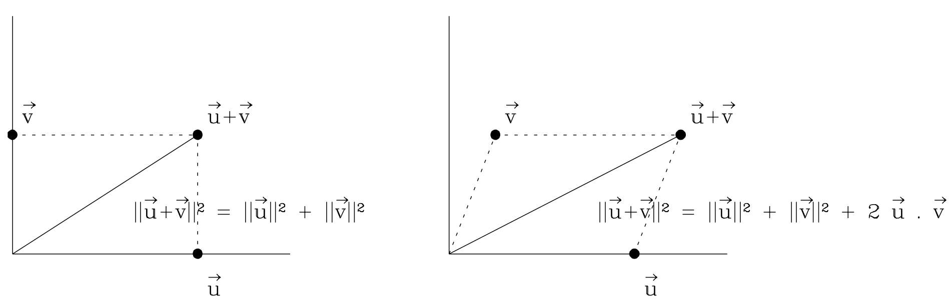
El vector cero es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{R}^n$, pues $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0 \ \ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema de Pitágoras

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\quad \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 \qquad$ [**6a**]

$$\begin{aligned} &\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 + 2 \ \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad [\mathbf{6b}] \end{aligned}$$

Esquema para el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^2$:



$\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales $\qquad$ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no ortogonales

(Recuérdese como la suma de dos vectores coincide con la diagonal del paralelogramo que definen).

Observación: En la figura de la derecha se tiene que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es mayor que cero por lo que la norma al cuadrado de la suma es mayor que la suma de los cuadrados de las normas. Si el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ fuera obtuso, y por tanto el producto escalar negativo, entonces el cuadrado de la norma de la suma sería menor que la suma de los cuadrados de las normas.

Ejemplo 15.4. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^2$ *considera los vectores* $\vec{u} = (7, 1)$, $\vec{v} = (-3, 3)$, $\vec{w} = (3, -3)$ *y* $\vec{z} = (4, -3)$. *Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, $\vec{u}$ *y* $\vec{w}$, *y* $\vec{u}$ *y* $\vec{z}$.

$(7, 1)\ (-3, 3) = \sqrt{50}\ \ \sqrt{18}\ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{-21+3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{25 \times 4 \times 9}} = \frac{-18}{5 \times 2 \times 3} = -\frac{3}{5}$$

El ángulo es $\alpha = 2.2143$ *radianes = 126.8699 grados*

$(7, 1)\ (3, -3) = \sqrt{50}\ \ \sqrt{18}\ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{21-3}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \times \sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$

El ángulo es $\alpha = 0.9273$ *radianes = 53.1301 grados*

Nótese que $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *son vectores opuestos, por tanto la suma del ángulo de* $\vec{u}$ *con* $\vec{v}$ *más el ángulo de* $\vec{u}$ *con* $\vec{w}$ *es igual a 180 grados.*

$(7, 1)\ (4, -3) = \sqrt{50}\ \ 5\ \ \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{28-3}{5\sqrt{50}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$$

El ángulo es $\alpha = 45$ *grados*

15.9 Ángulo formado por dos rectas o dos subespacios de dimensión 1

Dados dos subespacios unidimensionales de $\mathbb{R}^n$, $V_1 =< \vec{v}_1 >$ y $V_2 =< \vec{v}_2 >$ se obtiene el ángulo formado por ellos tomando un vector base de cada uno, con producto escalar mayor o igual a cero, y determinando el ángulo para ese par de vectores.

Obviamente el ángulo entre dos rectas o dos subespacios de dimensión 1 solo puede tomar valores entre 0 y $\pi/2$ radianes.

Ejemplo 15.5. *Obtén el ángulo formado por las siguientes rectas de* $\mathbb{R}^3$*:* $r_1 =< (1, 2, 3) >$ *y* $r_2 =< (3, 5, -7) >$.

Sol.:
El producto escalar de los dos vectores base dados en el enunciado es $1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times (-7) = 3 + 10 - 21 = -8$. *Tomamos entonces como base de* V_2 *el vector opuesto,* $(-3, -5, 7)$ *y calculamos el ángulo con este vector.*

$(1, 2, 3) \cdot (-3, -5, 7) = -3 - 10 + 21 = 8$

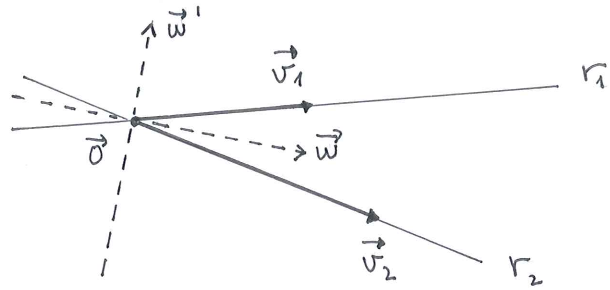
$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{(1+4+9}\sqrt{9+25+49}} = 0.2347$$

$\alpha = 76.4269$ *grados*

15.10 Bisectriz de dos rectas o dos subespacios de dimensión uno

Espacio Euclídeo

Ecuación paramétrica de las bisectrices de dos rectas o subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dimensión 1.

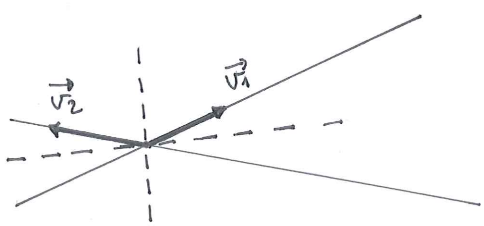


Los vectores directores de las rectas bisectrices son

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

$$\vec{w}' = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} - \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

Para la figura dada $\vec{w}$ es el vector director de la bisectriz interior y $\vec{w}'$ el vector director de la bisectriz exterior, ya que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ fueron escogidos con ángulo $\alpha \leq \pi/2$



$\dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} + \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$ es el vector director de la bisectriz exterior

$\dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} - \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$ es el vector director de la bisectriz interior

15.11 Conjuntos ortogonales y ortonormales

Consideremos el espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$.

Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ del espacio euclídeo se dice que es un **conjunto ortogonal** si cada par de vectores distintos del conjunto es ortogonal, es decir, si $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \ \forall\ i \neq j$.

Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ del espacio euclídeo es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \ \ \forall\ i \neq j \qquad\qquad \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1 \ \ \forall\ i = 1, \ldots, n$

TEOREMA. Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, entonces S es un conjunto linealmente independiente y por tanto es una base del subespacio generado por S.

Demostración: Supongamos que $\exists\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ , c_p\ /\quad \vec{0} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p \qquad [\mathbf{I}]$

$$0 = \vec{0} \cdot \vec{v}_1 = (c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p) \cdot \vec{v}_1$$
$$0 = (c_1\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 + (c_2\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 + \ldots + (c_p\vec{v}_p) \cdot \vec{v}_1$$
$$0 = c_1(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) + c_2(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1) + \ldots + c_p(\vec{v}_p \cdot \vec{v}_1)$$
$$0 = c_1(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) \quad \text{ya que } \vec{v}_1 \text{ es ortogonal a } \vec{v}_2,\ \ldots\ , \vec{v}_p.$$

Como $\vec{v}_1$ es no nulo, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$ no es nulo y por tanto $c_1 = 0$. Similarmente se puede demostrar que $c_2, \ldots c_p$ tienen que ser cero, multiplicando [**I**] por $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_p$ respectivamente. Por tanto el conjunto S es linealmente independiente. □

15.12 Base ortogonal y base ortonormal

Una **base ortogonal** de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, espacio euclídeo, es una base de W que es además un conjunto ortogonal.

Una **base ortonormal** de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, espacio euclídeo, es una base de W que es además un conjunto ortonormal.

TEOREMA. De cualquier subespacio W del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ se puede obtener una base ortogonal, y mediante normalización de ésta, una base ortonormal.

TEOREMA. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es base ortonormal del espacio euclídeo canónico.

En efecto, al ser $G = I$, los vectores de la base canónica son unitarios y ortogonales dos a dos.

Ejemplo 15.6. *Muestra que* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ *es un conjunto ortogonal del espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$*, siendo*

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Consideremos los tres posibles pares de vectores distintos, a saber $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$,$\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ *y* $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3(-1) + 1(2) + 1(1) = 0$
$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 3(-1/2) + 1(-2) + 1(7/2) = 0$
$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1(-1/2) + 2(-2) + 1(7/2) = 0$

Cada par de vectores distintos es ortogonal, por tanto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ *es un conjunto ortogonal.*

Ejemplo 15.7. *Muestra que* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ *es una base ortonormal del espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^3$*, siendo:*

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = \frac{9}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{(9+1+1)}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{(1+4+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_3 = \frac{1}{66} + \frac{16}{66} + \frac{49}{66} = \frac{(1+16+49)}{66} = \frac{66}{6} = 1$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \frac{-3}{\sqrt{11}\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{(-3+2+1)}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \frac{-3}{\sqrt{11}\sqrt{66}} + \frac{-4}{\sqrt{11}\sqrt{66}} + \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = \frac{(-3-4+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{66}} + \frac{-8}{\sqrt{6}\sqrt{66}} + \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{66}} = \frac{(1-8+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

El conjunto $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ *es un conjunto ortonormal, luego es linealmente independiente, y por tanto forma una base de* $\mathbb{R}^3$ *(son 3 vectores). Por ser un conjunto ortonormal es una base ortonormal.*

Cuando los vectores de un conjunto ortogonal se "normalizan" para tener longitud unidad, el nuevo conjunto sigue siendo ortogonal, y por tanto, al tener longitud unidad, forma un conjunto ortonormal.

Estos son de hecho los vectores ortogonales del ejemplo anterior, pero normalizados para hacerlos unitarios.

15.13 Coordenadas relativas a base ortogonal u ortonormal

Las coordenadas de un vector de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ respecto a una base B ortogonal se pueden calcular, aparte de utilizando el método general, aplicando una expresión muy sencilla, que vemos a continuación.

TEOREMA. Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_d\}$ una base ortogonal del subespacio W de $\mathbb{R}^n$, espacio euclídeo. Entonces, las coordenadas de $\vec{y} \in W$ relativas a esa base son los c_i tales que

$$c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \qquad (i = 1, \ldots, d) \qquad [\mathbf{8a}]$$

Demostración: $\vec{y} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_d\vec{b}_d$

Multiplicando escalarmente la expresión anterior por el vector $\vec{b}_1$ obtenemos:

$\vec{y} \cdot \vec{b}_1 = c_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + 0 + \ldots + 0 = c_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{y} \cdot \vec{b}_1 = c_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1$

Despejando c_1:
$$c_1 = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}$$

y lo mismo para el resto de las coordenadas hasta c_d.

El teorema se verifica para todo subespacio de $\mathbb{R}^n$, incluido el propio $\mathbb{R}^n$. Por tanto dada la base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$, las coordenadas de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ relativas a esa base son los c_i tales que

$$c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

COROLARIO. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d\}$ una base ortonormal del subespacio W de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Entonces, las coordenadas de $\vec{y} \in W$ relativas a esa base son los $c_i = \vec{y} \cdot \vec{u}_i \quad (i = 1, \ldots, d)$ [**8b**]

OBSERVACIÓN: La ecuación [8] es una ecuación escalar, pues iguala escalares. Veremos más adelante una ecuación similar a la [8], que es precisamente esa ecuación multplicada por el vector $\vec{b}_i$, que aparece en numerador y denominador.

Veremos que para cada i,

$$c_i \ \vec{b}_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \ \vec{b}_i$$

es la expresión de la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre el subespacio $< \vec{b}_i >$.

Cada coordenada c_i de un vector $\vec{y}$ de W, respecto de una base ortogonal de W, es la coordenada de la proyección de $\vec{y}$ sobre la dirección $< \vec{b}_i >$ respecto de la base $\{\vec{b}_i\}$.

Si la base no es ortogonal las coordenadas de un vector no son iguales a las coordenadas de las proyecciones ortogonales sobre las rectas definidas por esas bases.

Utilizando la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que es ortonormal, es obvio que las proyecciones ortogonales del vector (a, b, c) sobre los ejes X, Y, Z son respectivamente $(a, 0, 0) = a\ \vec{e}_1$, $(0, b, 0) = b\ \vec{e}_2$ y $(0, 0, c) = c\ \vec{e}_3$.

15.14 Obtención de bases ortogonales de subespacios

Ejemplo 15.8. *Sea* $B = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$ *base del subespacio* W *del espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^4$*. Calcula la ecuación implícita de* W *y una base ortonormal de* W*.*

Solución:

Obtendremos en primer lugar la ec. implícita de W*.* $(x,y,z,t) \in W$ *si y sólo si* (x,y,z,t) *es combinación lineal de los vectores de la base* B*.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid x \\ 1 & 1 & 0 & \mid y \\ 1 & 1 & 1 & \mid z \\ 1 & 1 & 1 & \mid t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & x \\ 0 & 1 & 0 & \mid & y-x \\ 0 & 0 & 1 & \mid & z-y \\ 0 & 0 & 0 & \mid & t-z \end{bmatrix} \qquad \textit{compatible} \Leftrightarrow t-z=0$$

Por tanto la ecuación implícita de W *es* $z-t=0$

La forma implícita también se podría haber obtenido resolviendo el SLH con matriz de coeficientes P_B^t*, siendo* P_B *la matriz cuyas columnas son los vectores de la base* B*. Obtendríamos la solución* $(0,0,1,-1)$*, y esa solución es fila de la matriz de coeficientes de la forma implícita de* W*, por tanto* $x-t=0$*.*

Seguidamente pasamos a determinar una base ortonormal. En este caso es sencillo, ya que de la expresión general de los vectores de W *como* (x,y,z,z) *la base inmediata que se deduce es directamente ortogonal.*

$$\vec{v}_1 = (1,0,0,0) \quad \vec{v}_2 = (0,1,0,0) \quad \vec{v}_3 = (0,0,1,1)$$

La base ortonormal es: $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)\}$

Ejemplo 15.9. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^4$ *se considera el subespacio* $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$. *Calcula una base ortonormal de* S.

<u>*Solución:*</u>

S tiene 4 variables y una ecuación implícita por tanto dimS=3. De la forma implícita se deduce la forma paramétrica $(z+t, y, z, t)$, *y a partir de esta vemos que la base más sencilla que se obtendría es:*

$B = \{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$

Los vectores primero y segundo o primero y tercero son conjunto ortogonal, pero no los tres. Tomaremos los dos primeros, y para calcular el tercer vector $(x+t, y, z, t)$ *impondremos la ortogonalidad a los dos primeros:*

$$\begin{cases} (z+t, y, z, t).(0,1,0,0) = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \\ (z+t, y, z, t).(1,0,1,0) = 0 & \Rightarrow \quad 2z + t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2z \end{cases}$$

Por tanto $(z+t, y, z, t)$ *pasa a ser* $(-z, 0, z, -2z)$, *y el tercer vector ortogonal más sencillo es:* $(-1, 0, 1, -2)$

Comprobaciones:

$(0, 1, 0, 0).(1, 0, 1, 0) = 0$
$(0, 1, 0, 0).(-1, 0, 1, -2) = 0$
$(1, 0, 1, 0).(-1, 0, 1, -2) = -1 + 1 = 0$

Base ortonormal: $$B = \{(0, 1, 0, 0), \frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1, 0, 1, -2)}{\sqrt{6}}\}$$

<u>*Otro procedimiento*</u> *para calcular el tercer vector consiste en resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones:*

$$\begin{cases} x - z - t = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es la de S *y las otras dos las de las condiciones de ortogonalidad a* $\vec{v}_1$ *y a* $\vec{v}_2$.

Ejemplo 15.10. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^5$ *se considera el subespacio* $S = \{(x, y, z, t, r) \in \mathbb{R}^5 / x - z - t + r = 0\}$*. Calcula una base ortonormal de* S*.*

Solución:

S tiene 5 variables y una ecuación implícita por tanto dimS=4. De la forma implícita se deduce la forma paramétrica $(z + t - r, y, z, t, r)$*, y a partir de ésta vemos que la base más sencilla que se obtendría es:*

$B = \{(0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\}$

Los vectores primero y segundo o primero y tercero son conjunto ortogonal, pero no los cuatro. Tomaremos los dos primeros, y para calcular los otros dos vectores $(z+t-r, y, z, t, r)$ *impondremos la ortogonalidad a los dos primeros:*

$$\begin{cases} (z+t-r, y, z, t, r).(0,1,0,0,0) = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \\ (z+t-r, y, z, t, r).(1,0,1,0,0) = 0 & \Rightarrow \quad z+t-r+z = 0 \Rightarrow 2z+t-r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2z+t \end{cases}$$

Por tanto $(z + t - r, y, z, t, r)$ *pasa a ser* $(z + t - 2z - t, 0, z, t, 2z + t) = (-z, 0, z, t, 2z + t)$*.*

Los vectores l.i. entre sí más sencillos que salen son $(-1, 0, 1, 0, 2)$ *y* $(0, 0, 0, 1, 1)$*. Ambos son ortogonales a* $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$*, pero no son ortogonales entre sí . Por tanto tomamos* $\vec{v}_3 = (0, 0, 0, 1, 1)$*, por ser el más sencillo, y buscamos un vector de la forma* $(-z, 0, z, t, 2z + t)$ *que sea ortogonal a* $\vec{v}_3$*.*

$$\Big\{ (-z, 0, z, t, 2z+t).(0,0,0,1,1) = 0 \;\Rightarrow\; t + 2z + t = 0 \;\Rightarrow\; 2z + 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -z$$

Por tanto la forma paramétrica $(-z, 0, z, t, 2z + t)$ *(familia de ortogonales a* $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$*), pasa a ser* $(-z, 0, z, -z, z)$ *(familia de ortogonales a* $\vec{v}_1$ *,* $\vec{v}_2$ *y* $\vec{v}_3$*), y el vector más sencillo que obtenemos es:* $\vec{v}_4 = (-1, 0, 1, -1, 1)$

Comprobaciones:

$$\begin{array}{ll}
(0,1,0,0,0).(1,0,1,0,0) = 0 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\
(0,1,0,0,0).(0,0,0,1,1) = 0 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \\
(1,0,1,0,0).(0,0,0,1,1) = 0 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \\
(-1,0,1,-1,1).(0,1,0,0,0) = 0 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 \\
(-1,0,1,-1,1).(1,0,1,0,0) = 0 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2 \\
(-1,0,1,-1,1).(0,0,0,1,1) = 0 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_3
\end{array}$$

Base ortonormal: $B = \{(0, 1, 0, 0, 0), \dfrac{(1, 0, 1, 0, 0)}{\sqrt{2}}, \dfrac{(0, 0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}}, \dfrac{(-1, 0, 1, -1, 1)}{2}\}$

Ejemplo 15.11. *En el espacio euclídeo canónico* $\mathbb{R}^4$ *se considera el subespacio* F *de forma implícita:* $\begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ *. Calcula una base ortonormal de* F*.* *2015-2016 Septiembre GIM Sin Matlab*

Solución:

S tiene 4 variables y dos ecuaciones implícitas independientes por tanto dimF=2. De las ecuaciones se deduce la siguiente forma paramétrica: $(2y - t, y, -y, t)$*. La base más sencilla que resulta es* $\{(2, 1, -1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$*, que no es ortogonal.*

Para obtener una base ortogonal tomamos $\vec{v}_1 = (-1, 0, 0, 1)$*, que es el más sencillo de los dos, y resolvemos el sistema de tres ecuaciones siguiente (dos de* F *y la otra es la condición de ortogonalidad a* $\vec{v}_1$*).*

$$\begin{cases} x - 2y \qquad + t = 0 \\ \qquad y + z \qquad = 0 \\ -x \qquad\qquad + t = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x = t$*;* $y = t$*;* $z = -t$*, por tanto el segundo vector es* $\vec{v}_2 = (1, 1, -1, 1)$

Sólo queda normalizar la base: $B = \{\frac{(-1, 0, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1, 1, -1, 1)}{2}\}$