Capítulo 15

Espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$

15.1 Definición de forma bilineal

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación
$f : V \times V \longmapsto \mathbb{K}$ se dice que es una **forma bilineal** si $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, verifica:

$$f(v_1 + v_2, v_3) = f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) \qquad f(\alpha v_1, v_2) = \alpha f(v_1, v_2)$$
$$f(v_1, v_2 + v_3) = f(v_1, v_2) + f(v_1, v_3) \qquad f(v_1, \beta v_2) = \beta f(v_1, v_2)$$

Observaciones: El término "bilineal" indica que f es lineal respecto de los dos vectores o elementos de V. El uso del término "forma" en vez de "aplicación" indica que la imagen es un escalar del cuerpo $\mathbb{K}$.

Propiedades:

$$f(0_V, v) = f(u, 0_V) = 0 \quad \forall u, v \in V$$
$$f(-u, v) = f(u, -v) = -f(u, v)$$

Notación: $\boxed{f(u, v) = \rho \in \mathbb{K}}$

- Se dice que la forma bilineal f de $V \times V$ en $\mathbb{K}$ es **simétrica**, si $\forall u, v \in V$ se cumple $f(u, v) = f(v, u)$.
- Se dice que la forma bilineal f de $V \times V$ en $\mathbb{K}$ es **definida positiva**, si $\forall u \in V$ se cumple $f(u, u) \geq 0$, con $f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$.

15.2 Producto escalar

Se denomina **producto escalar** o **producto interno** a toda forma bilineal f de $V \times V$ en $\mathbb{K}$ que sea simétrica y definida positiva.

Notación: El producto escalar se denota con un punto "$\bullet$", es decir, $f(u, v) = u \bullet v$

Consideraremos a partir de ahora únicamente productos escalares en $V = \mathbb{R}^n$, espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

15.3 Matriz asociada a un producto escalar

Expresando los vectores mediante sus coordenadas respecto de la base canónica, el desarrollo del producto escalar f queda de la forma siguiente:

$\vec{x} \bullet \vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) \bullet (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n) =$

$x_1(y_1\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 + y_2\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_n) + x_2(y_1\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_n) + \ldots$
$+x_n(y_1\vec{e}_n \bullet \vec{e}_1 + y_2\vec{e}_n \bullet \vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n \bullet \vec{e}_n) =$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{x}^t\ G\ \vec{y} = \rho \qquad [\mathbf{1}]$$

G es la matriz correspondiente al producto escalar, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$g_{ij} = \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j$
$g_{ij} = g_{ji}$ por ser la forma bilineal simétrica, por tanto la matriz G es simétrica.

A la matriz G se le denomina **métrica** del producto escalar. Al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, una vez se le dota de un producto escalar determinado, es decir, de una métrica determinada, se le denomina espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. La matriz G debe cumplir propiedades adicionales a fin de que la forma bilineal sea definida positiva, por tanto no basta con que G sea simétrica. Una condición necesaria y suficiente para que G simétrica corresponda a un producto escalar es que todos sus valores propios sean positivos estrictamente. La existencia de n valores propios reales (incluyendo multiplicidades) está garantizada para toda matriz simétrica [1].

[1]No demostraremos este resultado

Cambio de base

Suponemos una base B distinta de la canónica, $B = \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n \}$.

Entonces las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base B serán $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ y las coordenadas de $\vec{y}$ relativas a la base B, $[\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$

El producto escalar f quedará desarrollado entonces como:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n \\ \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{b}_n \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_n \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \cdot \vec{b}_n \end{bmatrix}}_{G'} \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = [\vec{x}]_B^t \; G' \; [\vec{y}]_B = \rho$$

El resultado del producto escalar es el mismo escalar ρ.

Sustituyendo $[\vec{x}]_B = P_B^{-1}\vec{x}$ y $[\vec{y}]_B = P_B^{-1}\vec{y}$, con $P_B = [\ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ ... \ \vec{b}_n\ ]$, en la expresión $[\vec{x}]_B^t \; G' \; [\vec{y}]_B$, obtenemos:

$$(P_B^{-1}\vec{x})^t \; G' \; P_B^{-1}\vec{y} = \vec{x}^t (P_B^{-1})^t \; G' \; P_B^{-1}\vec{y} = \vec{x}^t \; G \; \vec{y}$$

Denotando $P = P_B$ para simplificar, tenemos:

$$\boxed{G = (P^{-1})^t \; G' \; P^{-1}}$$

Obviamente, G' cumple también los requisitos de ser simétrica y tener todos los autovalores positivos estrictamente.

Supuesto un producto escalar y dos bases B y B' cualesquiera, la relación entre la matriz G_1 referida a la base B y la matriz G_2 referida a la base B' es la siguiente:

$$\boxed{G_1 = (P^{-1})^t \; G_2 \; P^{-1}}$$

, siendo P la matriz de paso de las coordenadas relativas a la base B' a las coordenadas referidas a la base B. Es decir, $P[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$.

15.4 El espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$

El producto escalar f más sencillo en $\mathbb{R}^n$ es el definido así :

$f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij}$, siendo la función δ_{ij} la que toma valor 1 si $i = j$ y valor 0 si $i \neq j$, y siendo $\{\vec{e}_1, \ \dots, \ \vec{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

La matriz asociada G respecto de la base canónica es por tanto la identidad I_n, con $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Se le denomina "producto escalar canónico", utilizándose también las expresiones "producto escalar usual" o "producto escalar habitual".

La expresión del producto escalar canónico es por tanto:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u}^t \ I \ \ \vec{v} = \vec{u}^t \ \vec{v} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$$

Al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ en el que se considera el producto escalar canónico se le denomina **espacio euclídeo canónico** $\mathbb{R}^n$.

A partir de ahora denotaremos el producto escalar canónico con un símbolo más pequeño, como $\vec{u} \cdot \vec{v}$

La definición $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v}$ cumple en efecto los requisitos de todo producto escalar, es decir, ser una forma bilineal simétrica y definida positiva.

Las tres propiedades son sencillas de demostrar, por lo que la demostración se presenta solo para un apartado.

- Bilinealidad:

  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
  En efecto, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})^t \vec{w} = (\vec{u}^t + \vec{v}^t)\vec{w} = \vec{u}^t \vec{w} + \vec{v}^t \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, con justificación muy similar a la anterior.

  $\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

- Simetría: $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- Definido positivo: $\quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, con $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Ejemplo 15.1. *En* $\mathbb{R}^3$ *y considerando el producto escalar canónico, determina* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *y* $\vec{v} \cdot \vec{u}$, *con* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ *y* $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [2 \ \ -5 \ \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + (-5) \times 2 + (-1) \times (-3) = 6 - 10 + 3 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^t \vec{u} = [3 \ 2 \ \ -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \times 2 + 2 \times (-5) + (-3) \times (-1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

Consideraremos a partir de ahora únicamente el producto escalar habitual o canónico