Capítulo 3

Espacios vectoriales

3.1 Definición de espacio vectorial

Definición 3.1. *Un conjunto no vacío de elementos, V, en el que están definidas las operaciones de suma (op. interna) y producto por escalares de un cuerpo $\mathbb{K}$ (op. externa), cumpliendo las diez condiciones o axiomas siguientes, es un* **espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$**.

Para la suma:

1) Operación cerrada: $\forall\ u, v \in V,\ u + v \in V$

2) Asociativa: $\forall\ u, v, w \in V,\ u + (v + w) = u + (v + w)$

3) Existencia de elemento neutro: $\exists\ 0 \in V\ /\ u + 0 = 0 + u = u \quad \forall\ u \in V$

4) Conmutativa: $\forall\ u, v \in V,\ u + v = v + u$

5) Existencia de elemento opuesto:

$$\forall u \in V \qquad \exists\ -u\ /\ u + (-u) = (-u) + u = 0$$

Para el producto por escalares del cuerpo $\mathbb{K}$

6) Cerrada: $\forall u \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u \in V$

7) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha v + \alpha v \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

8) Distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

9) Pseudoasociativa respecto del producto por escalares:

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

10) $1u = u$

1 es el elemento neutro del producto en el cuerpo $\mathbb{K}$ o elemento unidad del cuerpo. También se denota como 1_K

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

a) $\forall u \in V \quad 0\ u = 0_V$

$0 =$ elemento neutro de la suma de escalares $=$ elemento nulo de $\mathbb{K}$
$0_V =$ elemento neutro de la suma de elementos de $V =$ elemento nulo de V

b) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha\ \ 0_V = 0_V$

c) $\alpha u = 0_V \quad \Rightarrow \alpha = 0 \ \ o \ \ u = 0_V$

d) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in V$

$(-\alpha)\ \ u = -\ \ (\alpha u) = \alpha(-u)$

La combinación de las operaciones de producto por un escalar y suma es la operación conocida como combinación lineal. La combinación lineal de los elementos u y v de V con escalares α y β del cuerpo $\mathbb{K}$ es $\alpha\ u + \beta\ v$, que obviamente pertenece a V, por ser cerradas las dos operaciones.

3.2 Ejemplos

3.2.1 Matrices y vectores

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por las matrices reales $m \times n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. La operación interna es la suma de matrices, y la operación externa es el producto de una matriz por un real. El conjunto y las operaciones fueron definidas en el Capítulo 1, donde también anticipamos la estructura de espacio vectorial para las matrices reales de orden $m \times n$ con estas operaciones.

Por ejemplo $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Ilustramos 3 de las propiedades (suma cerrada, elemento neutro de la suma y producto por escalar cerrado).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ con } a_{ij},\, b_{ij} \in \mathbb{R},\ \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ es el elemento neutro de la suma en } M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$$

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}$ no es espacio vectorial

En efecto, el producto de una matriz real por un escalar complejo con la parte imaginaria no nula, no da como resultado una matriz real, por tanto ese producto no sería cerrado.

$M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por las matrices complejas de orden $m \times n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

$M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por las matrices complejas de orden $m \times n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

En el Cap. 1 ya se trató el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, introduciendo la notación $M_{n\times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Por ser $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ para todo m y n, también lo es en particular para las matrices columna o vectores. Es decir, $\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se expresa: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\mathbb{R})$ espacio vectorial. La primera operación es la suma de elementos de $\mathbb{R}^n$ y la segunda el producto de un elemento de $\mathbb{R}^n$ por un elemento de $\mathbb{R}$.

Recordemos que los elementos de $\mathbb{R}^n$ o vectores se expresan: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan primera, segunda, ..., enésima **componente** de $\vec{x}$.

Se admite la notación $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

$M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$
El vector nulo es ahora $(0+0i, \ldots, 0+0i)$ (con n componentes)
El elemento unidad es $1 \in \mathbb{R}$ (recordemos que el producto por escalar es op. externa)

$\mathbb{C}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

El vector nulo es $(0+0i, \ldots, 0+0i)$ (con n componentes)
El elemento unidad es $(1+0i) \in \mathbb{C}$

3.2.2 Polinomios

El conjunto de todos los polinomios en la variable λ con coeficientes reales de grado menor o igual que n con las operaciones de suma y producto por escalar del cuerpo $\mathbb{R}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y lo denotamos como $P_n(\mathbb{R})$

Los elementos de este conjunto tienen la expresión general:
$p(\lambda) = a_o + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$

La suma se define así:

Sean $p_1(\lambda) = a_o + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$ y $p_2(\lambda) = b_o + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_n\lambda^n$, entonces
$p(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda) = (a_o + b_0) + (a_1 + b_1)\lambda + (a_2 + b_2)\lambda^2 + \cdots + (a_n + b_n)\lambda^n$

Y el producto por un escalar así:

Sean $p(\lambda) = a_o + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
$\alpha p(\lambda) = \alpha a_o + \alpha a_1\lambda + \alpha a_2\lambda^2 + \cdots + \alpha a_n\lambda^n$

3.3 Relación biyectiva entre V y $\mathbb{R}^n$

Se puede establecer una relación biunívoca o uno a uno entre los elementos $v \in V$ y los elementos $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$, sin más que asignar ordenadamente los n escalares que definen v, o componentes de v, como componentes del vector $\vec{v}$.

Considerado P_n, al polinomio $p(s) = a_\circ + a_1 s + \ldots + a_n s^n$ le podemos asociar unívocamente el vector $\vec{p} = \begin{bmatrix} a_\circ \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, o utilizando la notación habitual de los vectores, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ siendo x_i el coeficiente correspondiente a la potencia $i-1$. Recíprocamente, dado un vector de $\mathbb{R}^{n+1}$ le corresponde, con el criterio adoptado, un único polinomio de P_n. Se puede establecer por tanto una relación biyectiva entre el espacio vectorial formado por los polinomios reales de grado menor o igual que n sobre $\mathbb{R}$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo:

$$p(s) = 2 - 2s^3 + s^4 \quad \in P_4 \qquad\qquad \vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^5,$$

La suma de polinomios se asocia con la suma de los correspondientes vectores y y el producto de un escalar por un polinomio con el producto del escalar por el correspondiente vector. Análogamente se pueden obtener las combinaciones lineales de polinomios utilizando sus vectores correspondientes. En la práctica se utiliza esta relación biyectiva para simplificar las operaciones entre polinomios, reduciéndolas a operaciones entre vectores.

En el caso de la relación biyectiva entre el conjunto de las matrices reales $m \times n$ y $\mathbb{R}^{m+n}$, la ordenación de elementos la vamos a considerar de arriba a abajo y de izquierda a derecha, es decir, tomando las sucesivas columnas. De esta manera, a la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ le corresponde $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Igual que en el caso de los polinomios, esta correspondencia permite simplificar las operaciones con matrices.

Ejemplo 3.1. *Dados los polinomios* $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ *y* $q(x) = 7 + 2x - 4x^3$ *obtén la combinación lineal de* $p(x)$ *y* $q(x)$ *con coeficientes* 2 *y* -2.

Ejemplo 3.2. *Dadas las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, *obtén la combinación lineal de* A *y* B *con coeficientes* 2 *y* -2.

3.4 Subespacios vectoriales: defininición y caracterización

Definición 3.2. *$H \subseteq V$ es subespacio vectorial de V si H, con las mismas operaciones que V y sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, es espacio vectorial.*

Caracterización de subespacios

- $H \subseteq V$ es subespacio vectorial de V si y sólo si:

  1) $0_V \in H$

  2) $\forall\, u, v \in H$, $u + v \in H$

  3) $\forall\, u \in H$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in H$

- $H \subseteq V$ es subespacio vectorial de V si y sólo si:

  1) $0_V \in H$

  2) $\forall\, u, v \in H$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \alpha u + \beta v \in H$

Las dos caracterizaciones son equivalentes. Éstas garantizan que el subespacio contiene el elemento neutro de la suma (axioma 3), y que tanto la suma como el producto por un escalar son cerradas (axiomas 1 y 6). Los elementos de H cumplen los axiomas 2,4,7,8,9 y 10 porque los cumplen todos los elementos de V. También está garantizado que H contiene los opuestos de sus elementos (axioma 5): en efecto si $u \in H$, $-1u \in H$, ya que el producto por escalar es cerrado, y $-1u = -u$

$H = \{0_V\}$ es un subespacio, y se le denomina **subespacio cero**.

El espacio completo V puede considerarse subespacio de sí mismo.

3.5 Ejemplos de subespacios vectoriales y de subconjuntos que no son subespacios vectoriales

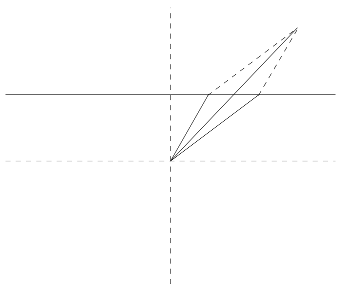
3.5.1 Ejemplos en $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de sí mismo, pues verifica las tres propiedades.
- $H = \{\vec{0}\}$ es el subespacio cero de $\mathbb{R}^n$.
- $U_1 = \{(x, 1) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Nótese que U_1 está aquí expresado cuantificando paramétricamente sus componentes. También se podría expresar paramétricamente así : $U_1 = \{(0, 1) + (1, 0)x \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

  Otra forma de expresar U_1 es la siguiente: $U_1 = \{(x, y) \ / \ y = 1\}$ o $U_1 = \{(x, y) \ / \ y - 1 = 0\}$. No se dan las componentes, sino la ecuación que relaciona las componentes entre sí , que es la llamada forma implícita.

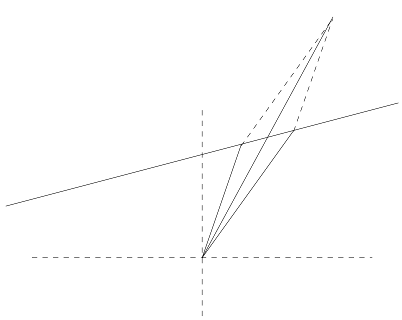
  U_1 está formado por los vectores de $\mathbb{R}^2$ con segunda componente constante e igual a 1. Geométricamente U_1 es la recta de pendiente 0 que pasa por (0,1).

  U_1 no es subespacio pues no contiene el (0,0). Tampoco verifica que la suma y el producto por un real sea cerrada. Contraejemplos: $(1, 1) + (2, 1) = (3, 2) \notin U_1$, $3(1, 1) = (3, 3) \notin U$. El incumplimiento de una de las condiciones es suficiente para afirmar que el conjunto no es subespacio vectorial.



- $U_2 = \{(x, x + 3) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. U_2 se expresa en forma implícita así : $U_2 = \{(x, y) \ / \ y = x + 3\}$ o $U_2 = \{(x, y) \ / \ x - y + 3 = 0\}$.

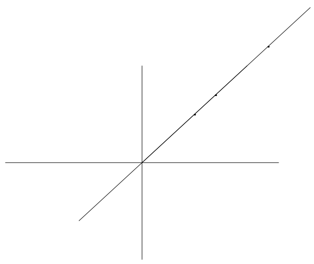
  U_2 no es subespacio porque no contiene el (0,0).



- $U_3 = \{(x, 2x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. U_3 se expresa en forma implícita así : $U_3 = \{(x, y) \ / \ y = 2x\}$ o $U_3 = \{(x, y) \ / \ 2x - y = 0\}$.

  U_3 es efectivamente subespacio vectorial puesto que $(0, 0) \in U_3$, la suma es cerrada $(x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2x + 2y)) = (x + y, 2(x + y)) \in U_3$ y el producto por escalar es cerrada $\lambda(x, 2x) = (\lambda x, \lambda 2x) = (\lambda x, 2\lambda x) \in U_3$.

Geométricamente U_3 es la recta en el plano XY que pasa por (0,0) y tiene pendiente 2. Gráficamente es obvio que la suma y el producto por esscalar son cerrados, pues la suma de dos vectores de la recta da como resultado un vector de la recta, y el producto de un vector de la recta por un escalar da un vector en la misma recta.



Ejemplo 3.3. *Determina si* $U = \{(x, y, 0) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

<u>*Sol.:*</u>

U está formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ *en el plano XY (con la componente* $z = 0$*).*

$$(0, 0, 0) \in U$$
$$(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0) \in U$$
$$\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0) \in U$$

U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ *ya que contiene el elemento neutro y la suma y el producto por escalar son cerrados.*

La forma implícita de U es $z = 0$.

La forma paramétrica de U es: $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$ *con* $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.4. *En* $\mathbb{R}^n$ *razona cuales de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.*

$$A = \{ \ (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) \ / \ x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$
$$B = \{ \ (x_1, x_2) \ / \ x_1 \cdot x_2 = 0 \ y \ x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

<u>*Conjunto A*</u> *(Vectores de* $\mathbb{R}^4$ *en los que la* 3^a *componente es suma de la* 2^a *y* 4^a*)*

$(0, 0, 0, 0) \in A$*. Se demuestra sin más que tomar* $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

$\vec{x} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) \in A$ *con tal de que* $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$
$\vec{y} = (3y_1, y_2, y_2 + y_4, y_4) \in A$ *con tal de que* $y_1, y_2, y_4 \in \mathbb{R}$
$\vec{x} + \vec{y} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) + (3y_1, y_2, y_2 + y_4, y_4) = (3x_1 + 3y_1, x_2 + y_2, x_2 + x_4 + y_2 + y_4, x_4 + y_4) = (3(x_1 + y_1), x_2 + y_2, (x_2 + y_2) + (x_4 + y_4), x_4 + y_4) \in A$ *pues* $x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_4 + y_4 \in \mathbb{R}$ *y la* 3^a *componente es suma de la* 2^a *y* 4^a

$\vec{x} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) \in A$ *con tal de que* $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$
$\alpha\vec{x} = \alpha(3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) = (\alpha 3x_1, \alpha x_2, \alpha(x_2 + x_4), \alpha x_4) = (3(\alpha x_1), \alpha x_2, \alpha x_2 + \alpha x_4, \alpha x_4) \in A$ *pues* $\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_4 \in \mathbb{R}$ *y la* 3^a *componente es suma de la* 2^a *y* 4^a

A es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ *ya que contiene el elemento neutro y es cerrada la suma y el producto por escalar.*

<u>*Conjunto B*</u> *(Vectores de* $\mathbb{R}^2$ *en los que el producto de la* 1^a *y* 2^a *componente es nulo. Es la unión del eje X y del eje Y).*

$(0,0) \in B$. *En efecto tomar* $x_1 = x_2 = 0$, *y por tanto .* $x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 0 = 0$

$\vec{x} = (x_1, x_2) \in B$ *con tal de que* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *y* $x_1 \cdot x_2 = 0$
$\vec{y} = (y_1, y_2) \in B$ *con tal de que* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *y* $y_1 \cdot y_2 = 0$

Consideremos la suma $\vec{x} + \vec{y}$
$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in \mathbb{R}$. *Veremos si se cumple además* $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = 0$
$(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + 0 = x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2$
Esta suma no tiene por que ser igual a 0. Lo vemos en el siguiente contraejemplo:
$(1,0) + (0,1) = (1,1)$
$(1,0) \in B, \quad (0,1) \in B$ *pero* $(1,1) \notin B$

Al haber encontrado dos vectores de B *cuya suma no pertenece a* B *queda demostrado que* B *no es subespacio.*

Geométricamente vemos que los elementos del conjunto B *son los situados en el eje* X *y en el eje* Y *de* $\mathbb{R}^2$, *y que tomando un vector no nulo de cada eje, su suma siempre va a estar fuera de esos ejes.*

3.5.2 Ejemplos en el espacio vectorial de los polinomios reales

En los dos ejemplos siguientes se puede comprobar fácilmente que el polinomio nulo está contenido en el subconjunto, que la suma en él es cerrada y que el producto por un real también es cerrado, aunque las justificaciones no están presentadas. Sí se presenta la obtención de las formas paramétricas e implícitas de ambos subespacios.

- Considerado el espacio vectorial de los polinomios reales de grado $k \leq 5$, P_5, el subconjunto $H \subset P_5$ formado por los polinomios de grado menor o igual que 2 es subespacio vectorial de P_5.

  Vector genérico para un polinomio de P_5: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$, con x_i parámetros libres

  Vector más general de H: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, con x_i parámetros libres

  La última expresión es la forma paramétrica de H, que también podríamos desarrollar así

  $\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, con x_i parámetros libres

  La forma implícita es el siguiente SLH (sistema lineal homogéneo):

  $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$

  La matriz de coeficientes del SL es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Considerado el espacio vectorial de los polinomios reales de grado $k \leq 5$, P_5, el subconjunto $F \subset P_5$ formado por los polinomios con coeficientes iguales es subespacio vectorial de P_5.

  $p(\lambda) = a + a\lambda + a\lambda^2 + \cdots + a\lambda^5 \ / \ a \in \mathbb{R}$

Vector más general de F: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$, con x_1 parámetro libre

La última expresión es la forma paramétrica de H, que también podríamos desarrollar así

$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, con x_1 parámetro libre

La forma implícita es el siguiente SLH (sistema lineal homogéneo):

$x_2 = x_1, x_3 = x_1, x_4 = x_1, x_5 = x_1, x_6 = x_1$

Obviamente la solución del SLH es la expresión paramétrica dada arriba.

La matriz de coeficientes del SL es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

O también podríamos haber tomado: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, correspondiente a ecuaciones en la forma $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$

3.5.3 Ejemplos en el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden n

Considerado el espacio vectorial de las matrices A_n, los siguientes subconjuntos de A_n son subespacios vectoriales de A_n:

El subconjunto D_n formado por las matrices diagonales de orden n.

El subconjunto TS_n formado por las matrices triangulares superiores de orden n.

El subconjunto TI_n formado por las matrices triangulares inferiores de orden n.

El subconjunto S_n formado por las matrices simétricas de orden n.

El subconjunto H_n formado por las matrices antisimétricas de orden n.

Nótese que los subespacios vectoriales pueden tener a su vez subespacios vectoriales. Por ejemplo, las matrices escalares de orden n se pueden considerar subespacio vectorial del espacio vectorial A_n, o subespacio vectorial de D_n.

Otros ejemplos

- $A \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, siendo $A = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \ / \ a, b, c \ \in \mathbb{R} \ \}$, es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

  Otra forma de expresar el conjunto es la siguiente: $A = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \ / \ x_1 + x_4 = 0\}$, que usa la forma implícita.

  Son por ejemplo matrices de este conjunto: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

  Es sencilla la justificación de que el conjunto es subespacio. Utilizamos aquí la segunda condición necesaria y suficiente de la caracterización de subespacios:

  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ \in \ A$ ya que $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ y por tanto $x_1 + x_4 = 0$

  Partimos de las matrices $\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1' & x_3' \\ x_2' & x_4' \end{bmatrix}$ que por pertenecer a A cumplen $x_1 + x_4 = 0$ y $x_1' + x_4' = 0$. Veamos si las combinaciones lineales de ellas también pertenecen a A:

  $$\alpha \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \ + \ \beta \begin{bmatrix} x_1' & x_3' \\ x_2' & x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1' & \alpha x_3 + \beta x_3' \\ \alpha x_2 + \beta x_2' & \alpha x_4 + \beta x_4' \end{bmatrix}$$

  $(\alpha x_1 + \beta x_1') + (\alpha x_4 + \beta x_4') = \alpha(x_1 + x_4) + \beta(x_1' + x_4') = \alpha 0 + \beta 0 = 0$. Por tanto la combinación lineal de elementos de A es cerrada.

- $B \subseteq M_2(\mathbb{R})$, siendo $B = \{\begin{bmatrix} a & a+2 \\ b & c \end{bmatrix} \ / \ a, b, c \ \in \mathbb{R} \ \}$, no es subespacio vectorial de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

  Otra forma de expresar el conjunto es la siguiente: $B = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \ / \ x_3 - x_1 = 2\}$.

  La justificación más sencilla es ver que la matriz nula no pertenece al conjunto, pues $0 - 0 = 0 \neq 2$.

3.6 Combinación lineal

Definición 3.3. *Sea un conjunto finito de elementos* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$*, con* V *espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$*. Se dice que* <u>$v \in V$ *es combinación lineal de los elementos de* S</u> *si* $\exists$ $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{K}$ / $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p$.

A los escalares $c_1, c_2, \ldots c_p$ *se les llama* <u>*pesos o coeficientes de la combinación lineal*</u>*. Los pesos pueden tomar cualquier valor de* $\mathbb{K}$*, incluido el 0*

Con frecuencia abreviaremos la expresión "combinación lineal" como c.l.

(Nótese el uso de la letra "c" para hacer énfasis en la interpretación de los c_i *como* **c***oeficientes de una combinación lineal).*

Ejemplo 3.5. *Sean* $\vec{a}_1 = (1, -2, -5)$*,* $\vec{a}_2 = (2, 5, 6)$ *y* $\vec{b} = (7, 4, -3) \quad \in \mathbb{R}^3$*. Determina si* $\vec{b}$ *es combinación lineal de* $\vec{a}_1$ *y* $\vec{a}_2$*. En caso afirmativo obtén los coeficientes* x_1*,* x_2 *tales que* $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$*. Realiza lo mismo para* $\vec{c} = (7, 4, -4)$*.*

Comenzamos escribiendo la ec. vect. $\quad x_1 \underset{\vec{a}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}} + x_2 \underset{\vec{a}_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}}$

, que es lo mismo que: $\quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad o \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Por tanto hemos de resolver el SL: $\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 = -3 \end{cases}$

Resolvemos el sistema transformando la matriz ampliada a la forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; 7 \\ -2 & 5 & | \; 4 \\ -5 & 6 & | -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; 7 \\ 0 & 9 & | 18 \\ 0 & 16 & | 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; 7 \\ 0 & 1 & | \; 2 \\ 0 & 0 & | \; 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | \; 3 \\ 0 & 1 & | \; 2 \\ 0 & 0 & | \; 0 \end{bmatrix}$$

El SL es compatible, por tanto $\vec{b}$ *es c.l. del conjunto* $\{\ \vec{a}_1, \vec{a}_2\ \}$*. La solución, y por tanto los coeficientes, son* $x_1 = 3$ *y* $x_2 = 2$*. Es decir,* $3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Recordemos del Cap. 2 que una ec. vect. de la forma: $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_p\vec{v}_p = \vec{b}$ **tiene la misma solución que el SL cuya matriz ampliada es:** $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots \vec{v}_p \mid \vec{b}\ ]$**. Por tanto** $\vec{b}$ **es c.l. de** $\{\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\ , \ldots, \vec{v}_p\ \} \Leftrightarrow [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots \vec{v}_p \mid \vec{b}\ ]$ **es compatible.**

Para $\vec{c}$ *la matriz ampliada y el paso a la reducida son:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; 7 \\ -2 & 5 & | \; 4 \\ -5 & 6 & | -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; 7 \\ 0 & 9 & | 18 \\ 0 & 16 & | 31 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \; 7 \\ 0 & 1 & | \; 2 \\ 0 & 16 & | 31 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | \; 3 \\ 0 & 1 & | \; 2 \\ 0 & 0 & | -1 \end{bmatrix}$$

El SL es incompatible, por tanto $\vec{c}$ *no es c.l. del conjunto* $\{\ \vec{a}_1, \vec{a}_2\ \}$*.*

Ejemplo 3.6. *Dado el subconjunto de matrices cuadradas* 2×2, $S = \{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\}$, *justifica que* $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ *es c.l. de* S *y que* $C = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ *no es c.l. de* S.

Ejemplos similares se podrían plantear en el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que un valor dado.

3.7 Dependencia e independencia lineal. Relación de dependencia lineal

3.7.1 Definiciones

- Un conjunto de elementos $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ es **linealmente dependiente** (también llamado **"ligado"**) si existen unos escalares $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, no todos nulos, tales que

  $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p = 0_V$ **[1]**

  Una ecuación como [**1**], en la que no todos los coeficientes son nulos, se denomina **relación de dependencia lineal**.

- Un conjunto es **linealmente independiente** (también llamado **"libre"**) si y sólo si no es linealmente dependiente.

  Es decir, si $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p = 0_V \;\; \Rightarrow \;\; c_i = 0 \;\; \forall i = 1, ..., p$

Con frecuencia abreviaremos la expresiones "lineal independiente" y "linealmente dependiente" como l.i. y l.d. respectivamente.

3.7.2 Ejemplos:

- El conjunto $\{(1,1),(1,2)\}$ en $\mathbb{R}^2$ es linealmente independiente porque la única solución del sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & | \, 0 \\ 1 & 2 & | \, 0 \end{bmatrix}$ es la solución trivial.

- El conjunto $\{(1,1),(1,2),(3,4)\}$ en $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente porque el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | \, 0 \\ 1 & 2 & 4 & | \, 0 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

- El conjunto $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\}$ es linealmente dependiente, porque la ecuación:

  $c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones. Para la justificación simplificamos los cálculos tratando las matrices como vectores de $\mathbb{R}^4$.

  $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \\ 1 & 2 & 5 & | \, 0 \\ 1 & 2 & 5 & | \, 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{A_1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | \, 0 \\ 1 & 2 & 5 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{A_2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | \, 0 \\ 0 & 1 & 2 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{bmatrix}}$$

  La matriz de coeficientes A_2 nos dice que el rango es 2, por tanto el sistema es indeterminado y el conjunto es l.d.

  Para llegar a la relación de dependencia lineal deberíamos llegar a la forma escalonada reducida.

  $$\underset{A_2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | \, 0 \\ 0 & 1 & 2 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{A_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | \, 0 \\ 0 & 1 & 2 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{bmatrix}}$$

  $c_1 = -c_3$ y $c_2 = -2c_3$,

  Asignando al parámetro el valor 1 tenemos coeficientes $(-1,-2,1)$ y por tanto una relación de dependencia lineal es:

  $$-1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La dependencia lineal de polinomios también se estudiaría a partir de sus vectores asociados.

3.7.3 Dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^n$

Teniendo en cuenta la relación biyectiva entre los espacios V de n variables reales y el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, es interesante analizar en más detalle los conceptos de dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^n$.

Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ podemos decir que el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ es linealmente dependiente (también llamado ligado) si y sólo si la ecuación vectorial $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_p = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

Expresado de otra forma, el conjunto de vectores es ligado si el SL homogéneo (SLH) con matriz ampliada $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots \vec{v}_p \mid \vec{0}\ ]$ es comp. indeterminado $\Leftrightarrow$ rango de la matriz $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p] < p$.

En este caso el número de relaciones de dependencia lineal "independientes entre sí ", o lo que es lo mismo, el número de soluciones del SLH independientes entre sí es igual al grado de indeterminación, es decir al número de parámetros libres.

Al rango anterior se le denomina **rango del conjunto de vectores** $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots, \vec{v}_p\ \}$.

El conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente (también llamado libre) si y sólo si la ecuación vectorial $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_p = \vec{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

Expresado de otra forma, el conjunto de vectores es libre si el SLH con matriz ampliada $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots \vec{v}_p \mid \vec{0}\ ]$ es comp. det. $\Leftrightarrow$ el rango del conjunto de vectores es p.

Obtención de subconjunto l.i. de cardinal máximo, a partir de un conjunto l.d.

Recordamos que cardinal de un conjunto es el número de elementos del conjunto.

Partiendo del conjunto de vectores S, l.d., si de la matriz $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p]$ se eliminaran los vectores correspondientes a las columnas no pivotales, el sistema homogéneo resultante $[\ \vec{v}_i\ \vec{v}_j\ \ldots\ \vec{v}_k \mid \vec{0}\ ]$, siendo obviamente $i, j,\ \ldots, k$ las columnas pivotales, pasaría a ser determinado, y el conjunto $\{\ \vec{v}_i,\ \vec{v}_j,\ \ldots\ \vec{v}_k\ \}$ formaría un subconjunto de S l.i. y con el máximo número de elementos posible.

Vemos por tanto que el máximo número de vectores linealmente independientes dentro del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ es igual al rango de $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p\ ]$.

Como el número de componentes y por tanto el número de filas es n, el rango ha de ser menor o igual que n, por tanto si se tienen más de n vectores el conjunto será l.d.

3.7.4 Propiedades de la dependencia/independencia lineal

Teorema 3.1. *Si un conjunto* $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset V$ *contiene el elemento* 0_V*, entonces el conjunto es linealmente dependiente.*

Demostración: Supongamos que el elemento nulo es v_1, entonces,
$1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_p = 0_V$ y por tanto existe una combinación lineal nula sin que todos los coeficientes sean nulos. □

Teorema 3.2. *Si* $v \neq 0_V$*, entonces* $\{\ v\ \}$ *es un conjunto libre.*

Demostración: $cv = 0_V \Leftrightarrow c = 0$ □

Teorema 3.3. *Si un conjunto* $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ *es ligado, un conjunto que se forme añadiendo elementos a éste será también ligado.*

Demostración: Si con los p elementos se puede obtener c.l. nula, sin que todos los coeficientes sean nulos, con esos p elementos más otro más se sigue pudiendo obtener la c.l. nula. Basta por ejemplo que el coeficiente del último elemento sea el cero. □

Teorema 3.4. *Si un conjunto* $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ *es linealmente independiente, todo subconjunto de éste es también linealmente independiente.*

Demostración: Si con p elementos no se puede obtener c.l. nula con coeficientes no todos nulos, con un elemento menos tampoco se podrá obtener la c.l. nula. □

Teorema 3.5. *Un conjunto formado por dos elementos no nulos es linealmente dependiente si y sólo si uno de ellos es múltiplo del otro.*

Demostración: "$\Rightarrow$" $c_1v_1 + c_2v_2 = 0_V$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Podemos despejar: $v_1 = (c_2/c_1)v_2$ y ya tenemos que un elemento es múltiplo del otro.
"$\Leftarrow$" Si $v_2 = \alpha v_1$ con $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$ (se excluye el cero porque la hipótesis de partida es que ninguno de los dos elementos es nulo), entonces se obtiene $v_2 - \alpha v_1 = O_V$ con $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$ y por tanto el conjunto es l.d. □

Teorema 3.6. *Si un conjunto* $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ *es libre, mientras que el conjunto que se obtiene añadiéndole un elemento* v_{p+1} *es ya ligado, entonces* v_{p+1} *se puede expresar como combinación lineal del resto.*

Demostración: Si una vez añadimos v_{p+1} al resto, podemos obtener la c.l. nula, y sin él no la teníamos, significa que el coeficiente que lo multiplica no es cero. Podemos entonces despejar v_{p+1} en esa expresión, obteniendo que ese elemento es c.l. del resto. □

Ejemplo 3.7. *Determina mediante inspección si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *son linealmente dependientes.*

$$a.\ \begin{bmatrix}1\\7\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix} \quad , \quad b.\ \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\8\end{bmatrix} \quad , \quad c.\ \begin{bmatrix}-2\\4\\6\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-6\\-9\\15\end{bmatrix} \quad , \quad d.\ \begin{bmatrix}1\\7\\6\end{bmatrix}$$

El primer conjunto es l.d. porque tiene más vectores que entradas tienen éstos. El segundo conjunto es l.d. porque contiene el vector nulo. El tercer conjunto es l.i. porque los dos vectores no son uno múltiplo del otro. El último conjunto es l.i. porque está formado por un sólo vector y no es el vector nulo.

3.7.5 Caracterización de los conjuntos linealmente dependientes

Teorema 3.7. *Un conjunto* $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset V$ *de dos o más elementos es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los elementos de* S *es una combinación lineal del resto.*

Demostración: "$\Rightarrow$" Si el conjunto es l.d., entonces existe una relación de dependencia lineal. En la relación de dependencia lineal podré despejar al menos un elemento, ya que al menos uno tendrá coeficiente no nulo en la relación de dependencia lineal.
"$\Leftarrow$" Si $v_p = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{p-1}v_{p-1}$, entonces $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{p-1}v_{p-1} - v_p = 0_V$, y ya tenemos una relación de dependencia lineal (el coeficiente de v_p es no nulo), y por tanto el conjunto es ligado. □

El teorema anterior no nos dice que todo elemento de un conjunto linealmente dependiente pueda expresarse como combinación lineal del resto, sino que al menos para uno sí es posible.

Dado que para todo conjunto l.d. se puede obtener una relación de dependencia lineal, de ésta misma relación se puede "despejar" un vector para expresarlo como combinación lineal del resto.

3.7.6 Ejemplos

Ejemplo 3.8. *Comprueba que el conjunto de elementos de* $\mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(2,2,0),(0,0,1)\}$, *es l.d. Identifica un elemento que sea c.l. del resto, y, si existe, uno que no lo sea. Obtén la/las relación/relaciones de dependencia lineal del conjunto.*

Sol.:

S es l.d. puesto que el número de vectores es mayor que el número de componentes. Un ejemplo de relación de dependencia lineal es:

$2(1,0,0) + 2(0,1,0) - 1(2,2,0) + 0(0,0,1) = (0,0,0)$

Los coeficientes de la c.l. son $(2,2,-1,0)$.

$(2,2,0)$ *puede expresarse como combinación lineal del resto:*

$(2,2,0) = 2(1,0,0) + 2(0,1,0)\ \ (\ = 2(1,0,0) + 2(0,1,0) + 0(0,0,1)\ )$

También se podrían expresar $(1,0,0)$ *y* $(0,1,0)$ *como combinación lineal de los otros tres vectores*

$(0,0,1)$ *es el único de los cuatro vectores que no puede expresarse como combinación lineal del resto.*

Formalmente las relaciones de dependencia se obtienen resolviendo el siguiente sistema. Los coeficientes de las c.l. se han denotado como c_1, c_2, c_3 *y* c_4.

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

La matriz ampliada del sistema es: $A^* = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0\end{bmatrix}$

La solución es: $c_1 = -2c_3$, $c_2 = -2c_3$, $c_3 = c_3$, $c_4 = 0$.

Por tanto $\vec{c} = \{(-2,-2,1)\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ *y la relación de dependencia lineal más sencilla posible:*

$-2(1,0,0) - 2(0,1,0) + 1(2,2,0) + 0(0,0,1) = (0,0,0)$

Denotando a los vectores como $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ *y* $\vec{v}_4$, *la relación de dependencia lineal queda:*

$\boxed{-2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4 = \vec{0}}$

Que se podría escribir mejor cómo: $\boxed{-2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3 = \vec{0}}$

Como el sistema indeterminado tiene un grado de indeterminación se obtiene también una relación de dependencia lineal. Otras ecuaciones serían simplemente múltiplos de ésta.

Nótese como la relación de dependencia lineal permite despejar tres de los vectores ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *y* $\vec{v}_3$*) como combinación lineal del resto.*

$$\vec{v}_1 = \frac{-2}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 = -\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$$

$$\vec{v}_2 = \frac{-2}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$$

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

Ejemplo 3.9. *Determinar si los vectores (1,0),(0,1) y (3,1) de* $\mathbb{R}^2$ *forman un conjunto libre o ligado.*

<u>*Sol.:*</u>

Observamos que (3,1) = 3(1,0) + (0,1) por tanto concluimos directamente que el conjunto es ligado.

También podemos ver que existe c.l. nula sin que los coeficientes sean todos nulos, sin más que colocar todos los vectores en el mismo lado de la igualdad, en la expresión anterior:

$3(1,0)+(0,1)-(3,1)=(0,0)$

Los coeficientes son $3, 1, -1$*, por tanto no todos nulos.*

Ejemplo 3.10. *Demostrar que los vectores* $(1,2)$*,* $(3,1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *forman un conjunto libre.*

<u>*Sol.:*</u>

Tenemos que demostrar que la ec. $x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2=\vec{0}$ *tiene sólo solución trivial, es decir el SL es comp. det.*

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & | \ 0 \\ 2 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \qquad |A| \neq 0 \text{ por tanto comp. det.}$$

Una justificación alternativa es que el conjunto no es ligado porque siendo dos vectores, uno no es múltiplo del otro.

Ejemplo 3.11. *Demostrar que los vectores* $(1,2,3)$*,* $(4,5,6)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *forman un conjunto libre.*

<u>*Sol.:*</u>

Tenemos que demostrar que la ec. $x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2=\vec{0}$ *tiene sólo solución trivial, es decir que el SL es comp. det.*

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 4 & | \ 0 \\ 2 & 5 & | \ 0 \\ 3 & 6 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & | \ 0 \\ 0 & -3 & | \ 0 \\ 0 & -6 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & | \ 0 \\ 0 & -3 & | \ 0 \\ 0 & 0 & | \ 0 \end{bmatrix}$$

rgA = 2 = número de incógnitas, por tanto comp. det. Los únicos coeficientes que permiten obtener la c.l. $\vec{0}$ *son* $(0,0)$*.*

Al tratarse de dos vectores podemos usar también la justificación del ejemplo anterior, de que el conjunto no es ligado por no ser un vector múltiplo del otro.

Ejemplo 3.12. *Comprueba que el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente. Encuentra la/las relaciones de dependencia lineal entre ellos y obtén un subconjunto de S con el máximo número posible de vectores linealmente independientes.*

$$S = \{\ \vec{v}_1\ ,\ \vec{v}_2\ ,\ \vec{v}_3\ \} \qquad \textit{con } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

<u>Sol.:</u>

Tenemos que ver si existe solución no trivial de la ecuación:

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{[2]} \qquad \begin{bmatrix}x_1+4x_2+2x_3\\2x_1+5x_2+x_3\\3x_1+6x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Tomemos la matriz ampliada del sistema y resolvámoslo por eliminación gaussiana:

$$A^* = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&4&2&|&0\\2&5&1&|&0\\3&6&0&|&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\vec{v}_1&\vec{v}_2&\vec{v}_3&&\end{matrix}\end{array} \sim \begin{bmatrix}1&4&2&|&0\\0&-3&-3&|&0\\0&-6&-6&|&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&4&2&|&0\\0&-3&-3&|&0\\0&0&0&|&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&4&2&|&0\\0&1&1&|&0\\0&0&0&|&0\end{bmatrix}$$

El SL es comp. indeterminado. Por tanto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son linealmente dependientes.

Para encontrar una relación de dependencia lineal, resolvemos el sistema, tomando x_1 y x_2 como incógnitas principales y x_3 como parámetro libre, obteniendo:

$$\begin{cases}x_2 = -x_3\\ x_1 = -4x_2 - 2x_3 = 4x_3 - 2x_3 = 2x_3\end{cases} \qquad \textit{Por tanto:} \begin{cases}x_1 = 2x_3\\ x_2 = -x_3\\ x_3 = x_3\end{cases}$$

Una solución no nula posible es $(2, -1, 1)$ y la relación de dependencia lineal correspondiente es (ver **[2]***): $\boxed{2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}}$.*

$$2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ya que el sistema tiene un parámetro libre, existe una única relación de dependencia lineal "independiente". Existen otras infinitas relaciones de dependencia lineal, como por ejemplo: $4\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 = \vec{0}$, pero son proporcionales a la anterior.

De la relación encuadrada deducimos que en este ejemplo cualquier vector puede expresarse como c.l. de los otros dos. La razón es que en la relación de dependencia lineal todos los vectores aparecen multiplicados por números distintos de cero, y por tanto podemos despejar cualquiera de ellos.

Se puede comprobar que eliminando cualquiera de los tres vectores se obtiene un subconjunto l.i..

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$*: Ver las dos columnas pivotales en la eliminación gaussiana realizada. Con dos columnas pivotales y 2 incógnitas el sist. es comp. det.*
- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$*: Si hubiésemos eliminado $\vec{v}_2$, el tercer vector formaría columna pivotal.*
- $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$*: Sabemos que este conjunto es l.i. porque un vector no es múltiplo del otro. Para que $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_2$, $\alpha = 1/2$ para la primera componente y $\alpha = 1/5$ para la segunda, luego no existe α que cumpla la ec. vectorial. Para demostrarlo con el sistema homogéneo:*

$$A^* = \begin{bmatrix}2&4&|&0\\1&5&|&0\\0&6&|&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&|&0\\1&5&|&0\\0&6&|&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&|&0\\0&3&|&0\\0&6&|&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&|&0\\0&3&|&0\\0&0&|&0\end{bmatrix} \textit{ es comp. det.}$$

Ejemplo 3.13. *a) Encuentra la/las relación/relaciones de dependencia lineal del conjunto* $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ *con:* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

b) Obtén un subconjunto de S, al que llamarás S', que sea l.i. y contenga el máximo número posible de vectores de S.

c) Expresa los vectores que no hayas incluido en S' como combinación lineal de los vectores de S'.

<u>Sol.</u>

a) Las relaciones de dependencia lineal son las soluciones no nulas del sistema lineal homogéneo: $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ \vec{v}_4 \mid \vec{0}\ ]$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \mid 0 \\ 1 & 1 & 7 & -1 & \mid 0 \\ 2 & 1 & 11 & -3 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & \mid 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{bmatrix}$$

Con el sistema lineal en la forma escalonada reducida resulta inmediato despejar la solución general:

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4c_3 + 2c_4 \\ -3c_3 - c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad / \ c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado con <u>dos grados de indeterminación</u> (o dos parámetros libres), por tanto obtenemos <u>dos</u> relaciones de dependencia lineal, independientes entre sí . Una corresponde a coeficientes $(-4, -3, 1, 0)$ *y la otra a coeficientes* $(2, -1, 0, 1)$.

$$\begin{cases} -4\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \\ 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_4 = \vec{0} \end{cases}$$

b) Tomamos como subconjunto l.i. el formado por los vectores correspondientes a las columnas pivotales. Por tanto $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

c) De la primera y segunda relación de dependencia lineal deducimos, respectivamente:

$$\begin{cases} \vec{v}_3 = 4\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \\ \vec{v}_4 = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}$$