Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1 Definiciones

Definición 2.1. *Una ecuación lineal en las variables x_1, x_2, ..., x_n es una ecuación que se puede escribir de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

siendo b y los coeficientes a_i elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ (cuerpo $\mathbb{R}$ o cuerpo $\mathbb{C}$), cuyos valores se suelen conocer de antemano.

Definición 2.2. *Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, tiene la forma:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad [1]$$

Los elementos a_{ij}, denominados coeficientes, y los elementos b_i, denominados términos independientes, pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$.

Se llama **solución** *del sistema de ecuaciones lineales (o sistema lineal, abreviado como SL) en $\mathbb{K}$ a todo conjunto de valores de las variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ pertenecientes a $\mathbb{K}$, que satisfaga simultáneamente las m ecuaciones dadas. Si el SL tiene solución se denomina* **compatible***; en caso contrario* **incompatible***. Un SL compatible puede tener una solución, en cuyo caso se denomina* **compatible determinado** *o infinitas soluciones, denominándose entonces* **compatible indeterminado***. Cuando el SL es compatible indeterminado se denomina* **solución general** *a la expresión de la solución que incluye las infinitas soluciones posibles.*

Podemos expresar la solución del sistema como un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, llamado **vector solución**. El número de entradas del vector solución es igual al número de variables del sistema. En Álgebra un vector corresponde a una matriz columna, es decir, $\vec{x} \in M_{n\times 1}$, por tanto:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

De forma general se expresará $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ si consideramos la solución en el conjunto de los números reales.

En todo el capítulo consideraremos coeficientes, términos independientes y solución, en el conjunto de los números reales

• Decimos que un SL es **homogéneo** si $b_i = 0 \ \ \forall i = 1, ..., n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo siempre tiene al menos la solución $\vec{x} = \vec{0}$, que se conoce como solución nula o **solución trivial**, por tanto siempre es compatible. Los casos que se dan respecto de la solución son “compatible determinado” y “compatible indeterminado”.

• Si existe algún $b_i \neq 0$, entonces el SL se dice que es **no homogéneo** o **completo**.

RESUMEN

$$\begin{cases} Incompatible \\ Compatible \begin{cases} Determinado \\ Indeterminado \end{cases} \end{cases}$$

Expresión de la solución:

S. C. Determinado: $\vec{x} = \vec{p}$

S. C. Indeterminado: $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\alpha_i \in \mathbb{R}$ los denominados **parámetros libres**, porque cada α_i puede tomar todos los valores posibles de $\mathbb{R}$. k es el mínimo número de parámetros necesario para contener todas las soluciones.

En ambos casos $\vec{p} = \vec{0}$ si y sólo si el sistema es homogéneo.

La expresión $\alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k$ define lo que se conoce como variedad lineal.

La expresión $\vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k$ define lo que se conoce como variedad afín.

En un sistema <u>compatible indeterminado</u> con k parámetros libres existen k <u>soluciones independientes</u>, es decir, existe un conjunto de k vectores solución que son linealmente independientes entre sí . Un ejemplo sencillo de elección de estas soluciones independientes se obtiene dando el valor 1 a uno de los parámetros y el valor 0 al resto, repitiendo el proceso para los k parámetros. Obtendríamos entonces las siguientes k soluciones independientes:

$\vec{v}_1 \ , \ \ \vec{v}_2 \ , \ \ \ldots \ \ \vec{v}_k$ si el sistema es homogéneo.

$\vec{p} + \vec{v}_1 \ , \ \ \vec{p} + \vec{v}_2 \ , \ \ \ldots \ \ \vec{p} + \vec{v}_k$ si el sistema es no homogéneo.

Ejemplo 2.1. $\begin{cases} 2x_1 \ + \ x_2 \ + x_3 = \ 6 \\ -x_1 \ + \ x_2 \qquad = \ 4 \end{cases}$

Es un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, x_1, x_2 y x_3.

Ejemplo 2.2. $\begin{cases} 2x_1 \ + e^{x_2} = \ 3 \\ 2x_1 \ - \ 2x_2 \quad = \ 2 \end{cases}$

No es un sistema de ecuaciones lineales, porque la primera ecuación no es lineal.

Ejemplo 2.3. $\begin{cases} 2x_1 \ + 3(x_2)^2 = \ 2 \\ x_1 \ - \ x_2 \quad = \ 1 \end{cases}$

No es un sistema de ecuaciones lineales, porque la primera ecuación no es lineal.

2.2 Matrices correspondientes a los elementos de un SL

Matriz de coeficientes: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Otra notación: $A = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ ...\ \vec{a}_n\ ]$

Los vectores $\vec{a}_i$ son las columnas de la matriz A: $\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$

Vector de términos independientes: $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Vector de variables, vector solución o vector de incógnitas: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Matriz ampliada del SL: $A^* = [\ A \mid \vec{b}\ ] = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ ...\ \vec{a}_n \mid \vec{b}\ ]$

2.3 Representación del SL mediante la ec. matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

Consideremos el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots x_n$, de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

x_i, a_{ij} y b_i son elementos del cuerpo $\mathbb{R}$.

$\vec{x}_{n\times 1}$ es solución del sistema lineal $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_{n\times 1}$ es solución de la ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$, siendo $A_{m\times n}$ la matriz de coeficientes y $\vec{b}_{m\times 1}$ el vector de términos independientes.

Demostración:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$\square$

2.4 Representación del SL mediante una ec. vectorial

Consideremos la igualdad de la sección anterior:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

descomponiendo el vector de la izquierda en n sumandos, y sacando factor común las x_1 y $x_2 \ldots x_n$, obtenemos:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

, que es la ecuación vectorial correspondiente, y que podemos expresar, de forma más sencilla como:

$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$, siendo $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ las columnas de A.

$\vec{x}$ es solución del SL $\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ es solución de la ecuación vectorial $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$.

Expresado de otra forma, la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si $\vec{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A. En este caso cada conjunto de coeficientes de la combinación lineal es una solución posible del SL.

Ejemplo 2.4. *El sistema* $\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 + 2x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -5x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ *se puede expresar de la forma:*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{(ec. vectorial o comb. lineal)}$$

$\vec{b}$ *aparece expresado como combinación lineal de las columnas de* A *con coeficientes* x_1, x_2, x_3.

o como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{(ec. matricial o prod. matriz-vector)}$$

2.5 Repaso del producto matriz-vector

Sea A una matriz $m \times n$, con columnas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, y sea $\vec{x}$ un vector de n entradas, $\vec{x}_{n\times 1} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces el producto $A\vec{x}$, es la suma de las columnas de A, pesando cada una de ellas con las entradas de $\vec{x}$.

$$A\vec{x} = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots \vec{a}_n\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

Expresado de otra forma, el producto $A\vec{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes o pesos las entradas de $\vec{x}$.

Ejemplo 2.5. *Calcula el siguiente producto matriz-vector:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando las reglas del producto de matrices lo habríamos calculado así :

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 3 - 1\cdot 7 \\ 0\cdot 4 - 5\cdot 3 + 3\cdot 7 \end{bmatrix} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

<u>Propiedades del producto matriz-vector</u>

1) $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$

2) $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$

El producto matriz-vector es un caso particular de producto de matrices. En el Capítulo 1 habíamos enunciado que para toda terna de matrices A, B, C y para todo escalar α del cuerpo $\mathbb{K}$, se cumplían las propiedades:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$
$$A\cdot(\alpha B) = \alpha(A\cdot B)$$

Demostraremos las propiedades 1 y 2 arriba mencionadas para el caso particular de una matriz A de tres columnas: $A = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ ]$

Para multiplicar A por $\vec{u}$ el número de entradas de $\vec{u}$ debe ser igual al número de columnas de A, y por tanto 3.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{bmatrix}$$

1. $A(\vec{u}+\vec{v}) = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ ] \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = (u_1+v_1)\vec{a}_1 + (u_2+v_2)\vec{a}_2 + (u_3+v_3)\vec{a}_3 =$

   $(u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3) + (v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3) = A\vec{u} + A\vec{v}$

2. $A(\alpha\vec{u}) = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ ] \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{bmatrix} = (\alpha u_1)\vec{a}_1 + (\alpha u_2)\vec{a}_2 + (\alpha u_3)\vec{a}_3 =$

   $\alpha(u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3) = \alpha(A\vec{u})$

Ejemplo 2.6. *Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ escribe el vector $3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3$ como producto de una matriz por un vector.*

$$3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3 = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ ] \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = A\vec{x} \quad ; \quad A = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ ], \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2.6 Sistemas lineales equivalentes

Definición 2.3. *Dos sistemas de ecuaciones lineales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{R}$*, de igual número de variables, se dice que son* **sistemas equivalentes** *cuando tienen la misma solución.*

Se puede demostrar de forma sencilla que efectuando transformaciones del sistema [1] de los tipos siguientes, se obtiene un sistema equivalente al primero.

1. Multiplicación de una ecuación por un escalar distinto de cero
2. Suma a una ecuación de un múltiplo de otra
3. Intercambio de dos ecuaciones entre sí

Para determinar si un SL tiene solución y obtener ésta, si existe, un procedimiento posible es sustituir inicialmente el SL dado por otro equivalente de resolución más sencilla.

Ejemplo 2.7. *Consideremos el sistema* $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

Son ejemplos de sistemas equivalentes al anterior:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \qquad 2x_2 = 7 \end{cases}$$

Nótese como en el último SL podemos despejar fácilmente x_2 en la segunda ecuación, y a continuación despejar x_1 en la 1^{a} sustituyendo x_2 por el valor calculado.

2.7 Resolución de SL con métodos de eliminación gaussiana

Consideremos el SL con n variables o incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

Hemos visto que el SL que se obtiene a partir de [1] realizando transformaciones como intercambiar el orden de dos ecuaciones, multiplicar una ecuación por un escalar no nulo o sumar a una ecuación un múltiplo de otra, es equivalente al primero, o dicho de otra forma, tiene la misma solución.

Utilizando la notación matricial, estas transformaciones de las ecuaciones se corresponderían con las operaciones elementales por filas (vistas en el Capítulo 1, y que son permutación de filas, multiplicación de una fila por un factor no nulo, y suma a una fila de un múltiplo de otra), realizadas sobre la denominada matriz ampliada del sistema $A^* = [\ A \mid \vec{b}\ ] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$

Cada fila de la matriz ampliada corresponde a una ecuación.

Ejemplo 2.8. *Escribe los sistemas de ecuaciones representados por las matrices ampliadas siguientes:*

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad N^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La respuesta será: $M^* : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ $\qquad N^* : \quad x_1 + 2x_2 = 0$

Una matriz ampliada A^* representa un SL y todas las matrices equivalentes por filas a A^* corresponden a sistemas lineales equivalentes al original.

Los métodos de resolución de sistemas lineales basados en la transformacin de A^* a una forma escalonada por filas se denominan métodos de Eliminación Gaussiana. Los que usan la transformación a la forma escalonada reducida se denominan métodos de Gauss-Jordan.

Veamos un ejemplo sencillo. Resolver el SL: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 3 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

A partir de la nueva matriz ampliada equivalente por filas obtenemos el SL sencillo:

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ \quad\;\; x_2 = -1 \end{cases}$ con el que voy despejando, de la última a la primera, todas las incógnitas.

$x_2 = -1$,
$x_1 = 3 + x_2 = 3 - 1 = 2$

Para resolverlo mediante el método de Gauss-Jordan tendríamos que haber llegado hasta la forma reducida por filas.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 3 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

En este caso hemos llegado a tal grado de simplificación del SL que directamente “leemos” la solución:
$x_1 = 2$,
$x_2 = -1$

En la sección 2.9 estudiaremos ambos métodos (eliminación gaussiana y de Gauss-Jordan), aplicándolos a varios ejemplos que incluyen los tres casos de sistemas incompatible, compatible indeterminado y compatible determinado.

2.8 Caracterización de un SL respecto de su solución

- Sist. incompat. $\Leftrightarrow$ rg$A^* =$ rg$A + 1$

  Ya que la inclusión de la columna $\vec{b}$ añade un pivote, la forma escalonada por filas de la matriz A^* tendrá una fila de la forma

  $[\ 0 \ \ \ldots\ 0 \mid \ \square\ ]$ con $\square \ \neq 0$

  Es decir, una ecuación de la forma

  $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n \neq 0$, que no tendrá solución.

  De forma general se puede decir que un sistema de ecuaciones es compatible si y sólo si al obtener una forma escalonada por filas de A^*, no existe ninguna fila de la forma:

  $[\ 0 \ \ \ldots\ 0 \mid \ \square\ ]$ con $\square \ \neq 0$

  Un SL homogéneo tiene $\vec{b} = \vec{0}$ por tanto siempre es compatible.

- Sist. compat. determinado $\Leftrightarrow$ rg$A^* =$ rg$A = n$ (recordamos que n=número de incógnitas)

  En la forma escalonada por filas tenemos n ecuaciones, cada una con su pivote, que nos permiten despejar las n incógnitas.

- Sist. compat. indeterminado $\Leftrightarrow$ rg$A^* =$ rg$A < n$

  El número de ecuaciones en la forma escalonada por filas, es decir número de ecuaciones con pivote, es insuficiente para despejar las n incógnitas, por lo que existen parámetros libres.

  rg$A =$ número de incógnitas principales

  n - rg$A =$ número de parámetros libres

<u>Algunas propiedades para un SL con matriz de coeficientes $A_{m\times n}$</u>

1) rg$A = m \Rightarrow$ El SL es compatible. En efecto, en este caso rg$A^* =$ rg$A = m$.

2) rg$A = n \Rightarrow$ El SL no puede ser indeterminado, y será por tanto compatible determinado o incompatible, dependiendo del valor de $\vec{b}$. Por ejemplo si $m = 4$ y $n = 2$ el SL es compatible si rg$A^* = 2$ ($\vec{b}$ no aumenta el rango) e incompatible si rg$A^* = 3$ ($\vec{b}$ aumenta el rango).

y la conclusión de las dos anteriores:

3) rg$A = m = n$ (matriz cuadrada de rango completo) $\Rightarrow$ El SL es compatible determinado.

Los sistemas <u>homogéneos</u> son siempre compatibles, porque al ser $\vec{b} = \vec{0}$ la última columna no aumenta el rango. Son determinados (siendo la solución la trivial) si y solo si rg$A$=n.

2.9 Ejemplos de resolución de sistemas lineales

Ejemplo 2.9. *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 \; - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 \; - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 5 & -8 & 7 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar los ceros de la primera columna tenemos que hacer primero una permutación. Hacemos por ejemplo la permutación de la fila 1 con la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 5 & -8 & 7 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{31(-5/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & | & -19 \end{bmatrix} \underset{F_{32(1/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & | & -15 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa el sistema $\begin{cases} 2x_1 \; - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ \quad\quad x_2 - 4x_3 = 8 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = -15 \end{cases}$

La última ecuación expresa $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -15$. *Esta ecuación nunca será cierta. No hay valores de* x_1, x_2, x_3 *que satisfagan la ecuación. Por tanto el sistema es incompatible.*

O visto de otra forma, el sistema es incompatible porque rg $A^* = rgA + 1$ *(rg*$A^* = 3$ *y rgA=2).*

Ejemplo 2.10. *Resolver los sistemas siguientes* [1]*:*

$$I: \begin{cases} \quad\quad 3x_2 \; - \; 6x_3 \; + \; 6x_4 \; + \; 4x_5 \; = \; -5 \\ 3x_1 \; - 7x_2 \; + \; 8x_3 \; - \; 5x_4 \; + \; 8x_5 \; = \; 9 \\ 3x_1 \; - 9x_2 \; + 12x_3 \; - \; 9x_4 \; + \; 6x_5 \; = \; 15 \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} \quad\quad 3x_2 \; - \; 6x_3 \; + \; 6x_4 \; + \; 4x_5 \; = \; 0 \\ 3x_1 \; - 7x_2 \; + \; 8x_3 \; - \; 5x_4 \; + \; 8x_5 \; = \; 0 \\ 3x_1 \; - 9x_2 \; + 12x_3 \; - \; 9x_4 \; + \; 6x_5 \; = \; 0 \end{cases}$$

Comenzamos con el sistema lineal I:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & | & 4/3 \end{bmatrix}$$

El nuevo sistema es: $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ \quad\quad 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1/3 \; x_5 = 4/3 \end{cases}$

Las incógnitas x_1, x_2 *y* x_5, *que corresponden a columnas pivotales, las consideraremos como* *<u>incógnitas principales</u>*. *Las otras dos incógnitas,* x_3 *y* x_4, *las consideraremos como* *<u>parámetros libres</u>*.

Se da la solución expresando las incógnitas principales como función de los parámetros libres. Decir que x_3 *y* x_4 *son parámetros libres significa que podremos escoger cualquier valor para* x_3 *y cualquier*

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

valor para x_4. Una vez que lo hagamos, quedará fijado el valor de las incógnitas principales.

$\frac{1}{3}x_5 = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{x_5 = 4}$

$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \Rightarrow \underline{x_2} = \frac{-5+6x_3-6x_4-4\cdot 4}{3} = \frac{-5+6x_3-6x_4-16}{3} = \underline{-7+2x_3-2x_4}$

$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \Rightarrow$
$3x_1 = 9 + 7x_2 - 8x_3 + 5x_4 - 8\cdot 4 = 9 + 7(-7+2x_3-2x_4) - 8x_3 + 5x_4 - 32 = -23 - 49 + 14x_3 - 14x_4 - 8x_3 + 5x_4 = -72 + 6x_3 - 9x_4 \Rightarrow$
$\underline{x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4}$

La solución general del sistema, que incluye todas las soluciones es:

$$\begin{cases} x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 4 \end{cases} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ son los parámetros}$$

Las expresiones anteriores constituyen las ecuaciones paramétricas de la solución.

La solución anterior se expresa vectorialmente como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ son los parámetros}$$

Las expresión anterior es la solución en forma vectorial paramétrica. Podríamos haber considerado otras dos incógnitas, por ejemplo x_1 y x_3, como parámetros libres. Lo importante es que cualquier solución general tendrá siempre el mismo número de parámetros libres.

Se trata de un sistema compatible indeterminado ya que tenemos menos columnas pivotales que incógnitas.
3 = rg A^* = rg A < n = 5
número de parámetros libres $n - \mathrm{rg}A = 2$.

Denotando $\vec{p} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \vec{p} + x_3\vec{u} + x_4\vec{v}$

$\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ *son vectores de* $\mathbb{R}^5$ *y* x_3, x_4 *son elementos cualesquiera de* $\mathbb{R}$

La solución $\vec{x}$ es la suma de $\vec{p}$ y cualquier combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Obsérvese como $\vec{p}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes entre sí . Vemos además que $\vec{p}$ es solución del sistema (para el caso $x_3 = x_4 = 0$). $\vec{p}$ es una solución particular del sistema.

Solución = variedad afín en $\mathbb{R}^5$.

Empleando cálculos similares para el sistema lineal II obtenemos:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & \mid 0 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & \mid 0 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & \mid 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & \mid 0 \end{bmatrix}$$

El nuevo sistema es:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0 \\ \qquad 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 1/3x_5 = 0 \end{cases}$$

La solución general del sistema, que incluye todas las soluciones es:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

La solución en forma vectorial paramétrica es la siguiente:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

$\vec{x} = x_3\vec{u} + x_4\vec{v}$

La solución $\vec{x}$ es la combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, siendo estos vectores los mismos que los del SL I.

Solución = variedad lineal en $\mathbb{R}^5$.

Una variedad afín es una variedad lineal trasladada: $\vec{x}_{no\ hom} = \vec{x}_h + \vec{p}$

<u>Dos teoremas sobre la expresión de la solución general de un sistema compatible indeterminado</u>

Teorema 2.1. *En un SL homogéneo e indeterminado, $A_{m\times n}\vec{x} = \vec{0}$, la solución general tiene la forma $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k$, donde los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ son linealmente independientes y $k = n - \mathrm{rg}A$.*

Teorema 2.2. *En un SL no homogéneo, $A_{m\times n}\vec{x} = \vec{b}$ con $\vec{b} \neq 0$, compatible indeterminado, la solución general tiene la forma $\vec{x} = \vec{p} + c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k$, donde los vectores $\vec{p}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ son linealmente independientes, con $k = n - \mathrm{rg}A$. $\vec{p}$ es solución particular del sistema no homogéneo y $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k$ es la solución general del correspondiente homogéneo.*

Ejemplo 2.11. *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right] [1] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right] [2] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ \quad - 3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right] [3] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = \ \ 0 \\ \qquad x_2 - 4x_3 = \ \ 4 \\ \quad - 3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] [4] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 4x_3 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

Ya tenemos la matriz ampliada en una forma escalonada por filas y el sistema de ecuaciones correspondiente. Ahora podremos determinar la solución, yendo de la última ecuación de este sistema, hacia arriba.

De la tercera ecuación: $x_3 = 3$

Sustiyendo x_3 *en la segunda ecuación:* $x_2 = 4 + 4x_3 = 4 + 12 = 16$

Sustiyendo x_3 *y* x_2 *en la primera ecuación:* $x_1 = 0 + 2x_2 - x_3 = 32 - 3 = 29$

Hemos obtenido la solución mediante Eliminación Gaussiana. La solución es $x_1 = 29$, $x_2 = 16$ *y* $x_3 = 3$, *que podemos escribir en la forma* $\vec{x} = (29, 16, 3)$ *o*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 29 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Podríamos también haber continuado obteniendo sistemas equivalentes (matrices equivalentes por filas) hasta llegar a la forma canónica por filas (o reducida por filas). Realicemos este proceso, partiendo de la matriz ampliada [4].

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] [5] \qquad \begin{cases} x_1 \ - \ 2x_2 \qquad = -3 \\ \qquad\ x_2 \qquad = 16 \\ \qquad\qquad x_3 \ = \ \ 3 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] [6] \qquad \begin{cases} x_1 = \ 29 \\ x_2 = \ 16 \\ x_3 = \ \ 3 \end{cases}$$

Ya tenemos la matriz ampliada en la forma canónica por filas, y podemos determinar directamente la solución. La solución es $x_1 = 29$, $x_2 = 16$ *y* $x_3 = 3$. *Este es el método de Gauss-Jordan.*

Se trata de un sistema compatible determinado.

rg A^* = *rg* $A = n$

Número de incógnitas = Número de columnas pivotales de A

Solución = un vector de $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 2.12. *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ \quad\quad x_2 + \ x_3 &= 4 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 7 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | \ 3 \\ 2 & -2 & 3 & | \ 1 \\ 0 & 1 & 1 & | \ 4 \\ 6 & 4 & 5 & | \ 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 7/5 & | & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 3 \\ \quad -5x_2 + 2x_3 = -2 \\ \quad\quad \frac{7}{5}x_3 = \frac{18}{5} \end{cases}$$

$7x_3 = 18, \quad x_3 = \frac{18}{7}$

$-5x_2 + 2x_3 = -2, \qquad -5x_2 = -2 - 2 \cdot \frac{18}{7} = \frac{-14-36}{7} = \frac{-50}{7}, \quad x_2 = \frac{-50}{-35} = \frac{10}{7}$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \quad 2x_1 = 3 - 3x_2 - x_3 = 3 - \frac{30}{7} - \frac{18}{7} = \frac{21-30-18}{7} = -\frac{27}{7},$

$x_1 = -\frac{27}{14}$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{27}{14} \\ \\ x_2 = \frac{10}{7} \\ \\ x_3 = \frac{18}{7} \end{cases} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} -27/14 \\ 10/7 \\ 18/7 \end{bmatrix}$$

Es un sistema compatible determinado. $\quad rg\ A = rg\ A^* = n$

Ejemplo 2.13. *Determinar las soluciones generales de los siguientes sistemas:*

$$I: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \qquad II: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4 \end{cases}$$

I:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
rg A = *rg* A^* = *2* < *3* = *número de incógnitas, por tanto* $A\vec{x} = \vec{0}$ *es compatible indeterminado.*
$$\begin{cases} 3x_1 \quad - 4x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos para las incógnitas principales, tomando x_3 *como parámetro libre, y obtenemos:*

$x_1 = 4/3\ x_3$, $x_2 = 0$ *y* x_3 *parámetro libre. En notación vectorial, la solución general de* $A\vec{x} = \vec{0}$ *tiene la forma:*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3\vec{v} \quad \text{con } \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } x_3 \in \mathbb{R}.$$

La solución general $\vec{x} = x_3\vec{v}$ *con* $x_3 \in \mathbb{R}$ *también se puede escribir cómo* $\vec{x} = \alpha\ \vec{v}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Esta expresión de la solución (cualquiera de ellas) es la denominada forma vectorial paramétrica o ecuación vectorial paramétrica.*

Geométricamente el conjunto de soluciones es una recta en $\mathbb{R}^3$ *que pasa por* $\vec{0}$ *y que contiene la dirección* $\vec{v}$. $\vec{v}$ *se dice que es generador de la recta. La solución trivial se obtiene para* $x_3 = 0$

La ecuación $\vec{x} = \alpha\ \vec{v}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es precisamente la ecuación vectorial paramétrica de la recta de* $\mathbb{R}^3$ *con vector generador* $\vec{v}$.

II: *Realizando las mismas operaciones elementales por filas que en el apartado anterior obtenemos:*
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
rg A = *rg* A^* = *2* < *3* = *número de incógnitas, por tanto* $A\vec{x} = \vec{b}$ *es compatible indeterminado.*
$$\begin{cases} 3x_1 \quad - 4x_3 = -3 \\ \quad x_2 \quad = 2 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos para las incógnitas principales, tomando x_3 *como parámetro libre. y obtenemos:*

$x_1 = -1 + 4/3\ x_3$, $x_2 = 2$ *y* x_3 *parámetro libre. En notación vectorial la solución tiene la forma:*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underset{\vec{p}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}},$$ *, siendo los vectores* $\vec{p}$ *y* $\vec{v}$ *linealmente independientes.*

Por tanto la solución general de $A\vec{x} = \vec{b}$ *tiene la forma vectorial paramétrica:*
$\vec{x} = \vec{p} + x_3\vec{v}$ *con* $x_3 \in \mathbb{R}$ *o* $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\ \vec{v}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$.

El vector $\vec{v}$ *es el mismo que encontramos en la resolución del correspondiente SL homogéneo (con la misma* A*). En efecto, por ser* A *la misma matriz, ya sabíamos a priori que la dependencia paramétrica iba a ser igual a la del apartado I.*

Tomando $x_3 = 0$ *(o* $\alpha = 0$*) observamos que* $\vec{p}$ *es una solución particular del SL* $A\vec{x} = \vec{b}$.

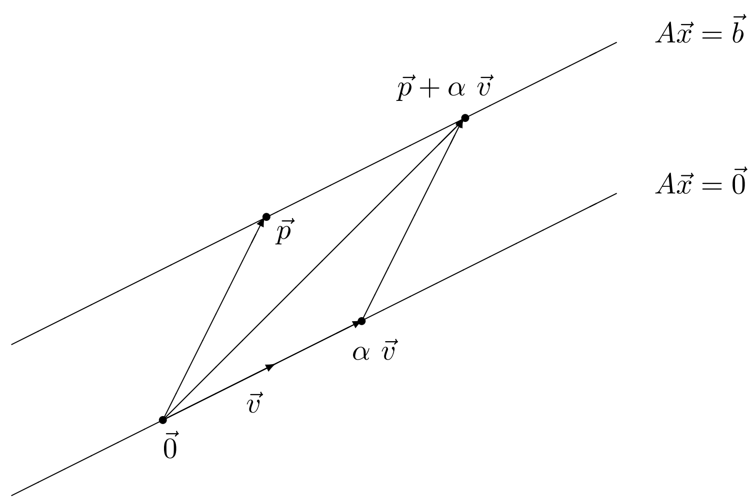
Se puede observar que la solución del sistema no homogéneo es la suma de un vector constante no nulo, $\vec{p}$*, que es una solución particular del SL, y una parte paramétrica expresada por el término* $\alpha\vec{v}$.

Geométricamente el conjunto de soluciones es una recta en $\mathbb{R}^3$ *que pasa por* $\vec{p}$ *y que contiene la dirección* $\vec{v}$*. La nueva recta es paralela (estrictamente, es decir, que no se puede solapar) a la anterior. La nueva recta no puede contener* $\vec{0}$ *ya que* $\vec{0}$ *no puede ser solución:* $A\vec{0} = \vec{0} \neq (7, -1, 4) = \vec{b}$.

La ecuación $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\ \vec{v}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es precisamente la ecuación vectorial paramétrica de la recta de* $\mathbb{R}^3$ *con vector generador* $\vec{v}$ *y trasladada respecto del origen por un vector* $\vec{p}$.

Para cualquier sistema compatible $A\vec{x} = \vec{b}$*, la solución general se puede obtener sin más que sumar a un vector* $\vec{p}$*, solución particular de* $A\vec{x} = \vec{b}$*, la solución general del sistema* $A\vec{x} = \vec{0}$.

En la figura siguiente se describen geométricamente los lugares ocupados por las soluciones de los sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$ *y* $A\vec{x} = \vec{0}$*. No hay ninguna solución común a ambos. La solución de* $A\vec{x} = \vec{b}$ *es igual a la recta solución de* $A\vec{x} = \vec{0}$*, trasladada por el vector* $\vec{p}$*, siendo* $\vec{p}$ *cualquier solución particular de* $A\vec{x} = \vec{b}$.



Nótese en la última forma escalonada del SL [I] y en la última forma escalonada del SL [II] que la primera recta es la intersección de los planos $3x_1 - 4x_3 = 0$ *y* $x_2 = 0$ *y la segunda recta la intersección de los planos* $3x_1 - 4x_3 = -3$ *y* $x_2 = 2$

Ejemplo 2.14. *Determina y describe geométricamente la solución de los sistemas:*

[I]: $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = a$

[II]: $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

$[I]$ *Es un sistema con una sola ecuación y tres incógnitas. No hace falta utilizar la notación matricial. Tomando* x_1 *como incógnita principal, y* x_2*,* x_3 *como parámetros libres*

$$x_1 = \frac{a + 3x_2 + 2x_3}{10}$$

por tanto, $x_1 = 0.1a + 0.3x_2 + 0.2x_3,$ *y* x_2*,* x_3 *parámetros libres.*

La solución general expresada como vector es:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1a + 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$\underset{\vec{p}}{\begin{bmatrix} 0.1a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_2 \underset{\vec{u}}{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad \textit{(con } x_2 \textit{ y } x_3 \textit{ parámetros libres)}$$

Toda solución del sistema se puede escribir como la suma de $\vec{p} = (0.1a, 0, 0)$ *y una combinación lineal de los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*.* $\vec{p}$*,* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son vectores linealmente independientes. Por ser los dos últimos linealmente independientes el conjunto de soluciones es un plano. El plano sólo contiene el punto* $(0, 0, 0)$ *si* $a = 0$.

$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} + s\vec{v} \qquad [Ib]$
con $\vec{p} = (0.1a, 0, 0)$*,* $\vec{u} = (0.3, 1, 0)$ *y* $\vec{v} = (0.2, 0, 1)$.

La solución del sistema [II] es: $\vec{x} = t\vec{u} + s\vec{v}$ $[IIb]$*, con los mismos vectores* $\vec{u} = (0.3, 1, 0)$ *y* $\vec{v} = (0.2, 0, 1)$.

Cada una de las ecuaciones [I] y [II] es la ecuación de un plano en forma <u>*implícita*</u>*. Las ecuaciones [Ib] y [IIb] son las ecuaciones de los mismos planos en forma* <u>*vectorial paramétrica*</u>*.*

Enlazando con la terminología utilizada anteriormente, las soluciones de [I] y [II] son respectivamente una variedad afín (para $a \neq 0$*) y una variedad lineal.*

2.10 Resolución de SL con matriz de coeficientes invertible

2.10.1 Utilizando la inversa

Sea el sistema $A_n\vec{x}_{n\times 1} = \vec{b}_{n\times 1}$, con A cuadrada e invertible, entonces

$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, por tanto $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Tenemos una única solución, que vendrá dada por la expresión anterior. Por tanto el SL $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier $\vec{b}$.

Se cumple el siguiente resultado general:

Teorema 2.3. *Sea A_n una matriz cuadrada de orden n y $\vec{b}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$, entonces A tiene inversa $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado.*

Demostración: A_n invertible $\Rightarrow A_n\vec{x} = \vec{b}$ es comp. determ. (visto arriba)
$A_n\vec{x} = \vec{b}$ comp. determ. para cualquier $\vec{b} \Rightarrow$ rg A_n = n (visto en apartado 2.8) $\Leftrightarrow A_n$ tiene inversa (Capítulo 1)
Efectivamente en 2.8 vimos que para ser determinado rg$A$ ha de ser igual al número de columnas, y que para ser compatible para todo $\vec{b}$, ningún vector $\vec{b}$ puede aumentar el rango, lo que sólo se puede garantizar si rg$A$ es igual al número filas. Cualquiera de los dos argumentos nos llevaría por si solo a que rg$A$=n.

$\square$

2.10.2 Método de Cramer

Consideremos el mismo sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con A invertible de orden n, y siendo por tanto el SL compatible determinado.

Dados A y $\vec{b}$ denotamos $A_i = [\ \vec{a}_1 \ \ \ldots \ \ \underset{\text{Col. } i}{\vec{b}} \ \ \ldots \ \ \vec{a}_n\ ]$

A_i es la matriz que tiene en la columna i el vector $\vec{b}$ y las demás columnas como en A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{Col. } i \end{array}$$

La solución única $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ puede obtenerse como: $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

Demostración:

$$A\vec{x} = \vec{b} \ \Rightarrow \ A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \ \Rightarrow \qquad \vec{x} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}\ \vec{b}$$

Desarrollándolo tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1i} & A_{2i} & \ldots & A_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n)$$

$x_i = \frac{1}{|A|} \times$ desarrollo del determinante de A_i por cofactores de la columna i.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Ejemplo 2.15. *Resolver el siguiente sistema por el método de Cramer.*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\;\; 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_{x1}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_{x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_{x3}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_{x1}|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29 \qquad x_2 = \frac{|A_{x2}|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16 \qquad x_3 = \frac{|A_{x3}|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

2.11 Ejercicios

Ejercicio 2.1. *Discutir y resolver si es posible los siguientes sistemas:*

$$a)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -3z & +t & = & 2\\ 2x & -y & -z & -t & = & 1\\ -x & +y & +2z & -t & = & 0\\ 3x & +2y & -4z & -3t & = & 1\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & 2\\ 3x & +2y & -2z & = & 1\\ -x & +3y & -z & = & 2\end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -3z & -16t & = & 4\\ & y & +2z & -3t & = & 6\\ -x & -y & +z & +9t & = & -2\end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & +2z & -t & = & 0\\ 2x & +3y & -4z & +2t & = & 0\\ 3x & & +z & -t & = & 0\end{array}\right.$$

Ejercicio 2.2. *Resolver por el método de eliminación gaussiana los siguientes sistemas. Nótese como los tres sistemas tienen la misma matriz de coeficientes A.*

$$a)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 0\\ x & +y & & +2t & = & 0\\ 2x & +2y & +3z & & = & 0\\ -x & -y & -2z & +2t & = & 0\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 7\\ x & +y & & +2t & = & 8\\ 2x & +2y & +3z & & = & 10\\ -x & -y & -2z & +2t & = & 0\end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 7\\ x & +y & & +2t & = & 5\\ 2x & +2y & +3z & & = & 10\\ -x & -y & -2z & +2t & = & 0\end{array}\right.$$

Justifica si el vector $\vec{b}_1 = (7, 8, 10, 0)$ *puede expresarse o no como combinación lineal de las columnas de A. Haz lo mismo para el vector* $\vec{b}_2 = (7, 5, 10, 0)$.

Ejercicio 2.3. *Calcular a para que el siguiente sistema admita solución distinta de la trivial y resolverlo.*

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y - az = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.4. *Discutir y resolver, según los valores de m, el siguiente sistema.*

$$\begin{cases} 6x + 18y - 2mz = 0 \\ 7x - 2y - 4z = 0 \\ 4x + 10y - 6z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.5. *Discutir y resolver si es posible, el siguiente sistema, según los valores de k.*

$$\begin{cases} (k+5)x + (2k-1)y - z = 0 \\ x + (k-2)y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.6. *Calcular los valores de m, k y h para que el sistema sea compatible indeterminado.*

$$\begin{cases} 3x + y + kz = 0 \\ x - y - z = 0 \\ mx + y + hz = 0 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.7. *Clasifica los sistemas lineales con las matrices ampliadas siguientes como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, en función de los parámetros a y b. Cuando un caso no se pueda dar escribe "nunca". Cuando un caso se d siempre, independientemente del valor de a y b escribe "siempre". Para los casos en los que obtengas varios valores de parámetros, únelos explícitamente utilizando la conjugación pertinente "y" u "o" (las comas no valen).*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 2b & | & b-1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & | & 2 \\ 0 & 1 & a & | & 2 \\ 0 & 0 & b-1 & | & b-1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & | & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & | & b \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & a & | & b \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & b & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & a \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

Ejercicio 2.8. *Estudiar el tipo de solución en función del parámetro a*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a\,x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + a\,x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.9. *Estudiar el tipo de solución en función del parámetro λ*

$$\begin{cases} \lambda\,x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 + x_2 + \lambda\,x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + 2\,\lambda\,x_3 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.10. *Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema, según los distintos valores del parámetro a:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ -ax & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ x & - & ay & + & z & + & t & = & 3 \\ x & + & y & - & az & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & z & - & at & = & 5 \end{array}\right.$$

2015-2016 Primer parcial IQ se pidió justificar si existía o existían valor/es de a para que el sistema fuera compatible

Ejercicio 2.11. *Clasifique el siguiente sistema lineal en función del parámetro a.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & a\,x_3 & = & a \\ 2\,x_1 & - & a\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: ....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: ....

El sistema es incompatible si y sólo si: ....

Indique "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Sólo se puntúa si las respuestas presentadas son consistentes entre sí.

2015-2016. Junio. G.I. Mecánica.

Ejercicio 2.12. *Clasifica en función del parámetro a el sistema lineal de matriz ampliada*

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & a & | & 3 \\ 1 & 1 & a & | & a \end{bmatrix}$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: ....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: ....

El sistema es incompatible si y sólo si: ....

Indique "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Sólo se puntúa si las respuestas presentadas son consistentes entre sí.

2016-2017. Primer parcial G.I. Química. Junio G.I. Mecánica.

Nótese que la matriz ampliada es la misma que la del Ejerc. 1.26D, pero con las filas ya ordenadas para que los parámetros aparezcan en la parte inferior.

Ejercicio 2.13. *Calcular a para que sea compatible el siguiente sistema y resolverlo.*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 5 \\ 2x - y = 8 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.14. *Determinar a y b para que el vector $(1, 0, a, b)$ pueda expresarse como combinación lineal de $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.*

Ejercicio 2.15. *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, *encuentra a simple vista una solución de $A\vec{x} = \vec{0}$ que no sea la solución $\vec{0}$. (Pista: Que una combinación lineal de las dos columnas produzca el vector nulo).*

Ejercicio 2.16. *Determina si las siguientes rectas tienen un punto de intersección común: $2x_1 + 3x_2 = -1$, $6x_1 + 5x_2 = 0$ y $2x_1 - 5x_2 = 7$. En caso afirmativo obtén las coordenadas de dicho punto.*

Ejercicio 2.17. *Determina si las siguientes rectas tienen un punto de intersección común: $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$ y $-x_1 - 3x_2 = 4$. En caso afirmativo obtén las coordenadas de dicho punto.*

Ejercicio 2.18. *En $\mathbb{R}^3$ se consideran los planos $\Pi_1 : 2x - 2y + az = 0$ y $\Pi_2 : -3x + 3y + 3z = 0$, donde a es un parámetro. Determina el lugar geométrico de la intersección de los mismos en función del parámetro a.*

Ejercicio 2.19. *Se desea construir modularmente un edificio. El reparto de viviendas en cada planta se escogerá de uno de los tres planes posibles. Cada planta del Plan A tiene 3 viviendas de 3 habitaciones, 7 de dos habitaciones y 8 de una habitación. Cada planta del Plan B tiene 4 viviendas de 3 habitaciones, 4 de 2 habitaciones y 8 de una habitación. Cada planta del Plan C tiene 5 viviendas de 3 habitaciones, 3 de 2 habitaciones y 9 de una habitación.*

a) ¿ Que interpretación darías al vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ *?*

b) Escribe una combinación lineal de vectores que exprese el total de viviendas de 3, 2 y 1 habitaciones del edificio.

c) ¿ Es posible diseñar un edificio con exactamente 66 viviendas de 3 habitaciones, 74 de dos habitaciones y 136 de una habitación?. En caso afirmativo, ¿ hay más de una forma?. Explica la respuesta.

Ejercicio 2.20. *Resuelve por el método de Gauss-Jordan y por el método de Cramer.*

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 2.21. *Encuentra una relación entre b_1, b_2 y b_3 que haga compatible el sistema con la siguiente matriz ampliada:*

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & | \; b_1 \\ 4 & 7 & -4 & | \; b_2 \\ -6 & -3 & 1 & | \; b_3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.22. *Supón que la matriz de coeficientes de un SL es de orden 3×5 y tiene 3 columnas pivotales. Explica por qué el sistema es compatible.*

Ejercicio 2.23. *Continúa la frase: "Si un sistema lineal es compatible, entonces la solución es única si y sólo si ...."*

<u>Ejercicios con Matlab</u>

Ejercicio 2.24. *Clasifique, y en su caso resuelva, los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son las siguientes:*

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & | \ 1 \\ 5 & 6 & -1 & | \ 3 \\ 4 & 9 & 5 & | \ 1 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & | \ 0 \\ 5 & 6 & -1 & | \ 0 \\ 4 & 9 & 5 & | \ 0 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & | \ 1 \\ 5 & 6 & -1 & | \ 3 \\ 4 & 9 & -3 & | \ 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que b) es el sistema homogéneo correspondiente al sistema no homogéneo a).

Ejercicio 2.25. *Clasifique, y en su caso resuelva, los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son las siguientes:*

$$a)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & | \ 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | \ 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & | \ 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | \ 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que b) es el sistema homogéneo correspondiente al sistema no homogéneo a).

Ejercicio 2.26. *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & - & 5t & = & 1 \\ 3x & + & 3y & & & + & 3t & = & 3 \\ 3x & + & 4y & + & z & - & 4t & = & 2 \end{array} \right.$ *, halle su solución general y la solución particular correspondiente a los valores $z = 1$ y $t = -2$.*

Ejercicio 2.27. *Clasifique el sistema de ecuaciones lineales siguiente en función de los valores de a y b:*

$$\begin{cases} 2.1x - 1.1y + 8z = 26 \\ 1.2x - 0.9y + 9z = 21 \\ 3.5x - 1.2y + az = b \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: ....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: ....

El sistema es incompatible si y sólo si: ....

Indique "siempre" o "nunca" si procediese.

2015-2016 Primer parcial G.I. Mecánica. Matlab

Varios

Ejercicio 2.28. *Supón un conjunto de datos experimentales que puedan representarse como puntos en un plano. Un* **polinomio interpolador** *de los datos es un polinomio cuyo gráfico pasa por todos los puntos. En trabajos científicos un polinomio de este tipo puede usarse, por ejemplo, para estimar valores entre puntos conocidos. Otro uso es para crear curvas para gráficos de ordenador. Para obtener el polinomio interpolador hay que resolver un sistema lineal.*

Encuentra el polinomio interpolador $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ *para los datos (1,12), (2,15), (3,16). Es decir, encuentra* a_0, a_1, a_2, *tales que:*

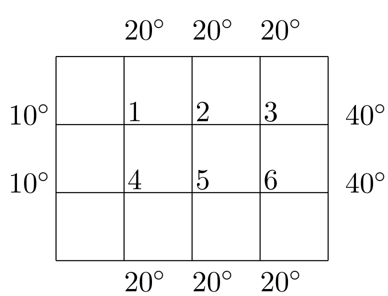
$$\begin{cases} a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 = 12 \\ a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 = 15 \\ a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 = 16 \end{cases}$$

Demuestra que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \end{bmatrix}$, *con* $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ *y* $x_2 \neq x_3$ *tiene rango 3.*

Ejercicio 2.29. *Un problema importante en el estudio de la transferencia de calor es el de determinar la distribución de temperatura en estado estacionario de una placa delgada cuando se conoce la temperatura en el borde. Supóngase que la placa de la figura representa una sección transversal de una barra metálica, con flujo de calor despreciable en la dirección perpendicular a la placa. Denotemos* $T_1, T_2, \ldots, T_6$ *las temperaturas de los 6 nodos interiores de la red de la figura. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual a la media de la temperatura de los 4 nodos más cercanos, a la izda, encima, a la derecha y por debajo. Por ejemplo:*

$$T_1 = \frac{(10 + 20 + T_2 + T_4)}{4} \quad o \quad 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$$

a) Escribe el sistema cuya solución nos permite conocer las temperaturas.
b) Resuelve dicho sistema.



Ejercicio 2.30. *Determina la corriente en las mallas de la red de la Figura, sabiendo que el sistema lineal correspondiente es:*

$$\begin{cases} 11I_1 - 3I_2 = 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5 \\ -I_2 + 3I_3 = -25 \end{cases}$$