Contenidos

Capítulo 1

Matrices y determinantes

1.1 Definición de matriz y algunos tipos de matrices

Una matriz es una ordenación rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas encerrados entre corchetes (o paréntesis), por ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2+i & 1-i & 0-3i \\ 3-2i & 2+6i & -2-i \\ 0-i & 1+i & \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas A,B,C, ... y sus elementos por minúsculas con dos subíndices, a_{ij} . Los subíndices indican, por este orden, la fila y la columna en la que se sitúa el elemento.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{Se denota también } A = \{a_{ij}\}$$

Una matriz de m filas y n columnas se dice que es una matriz de **orden** $m \times n$, y esto también se denota así: $A_{m\times n}$. El primer índice se refiere al número de filas y el segundo al número de columnas.

Las matrices que trataremos tendrán elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ (a los elementos de un cuerpo se les denomina también escalares). Consideraremos el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, o el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$. Nótese que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (todo real es un elemento de $\mathbb{C}$ con parte imaginaria nula). Ambos son cuerpos conmutativos (tanto la suma como la multiplicación cumplen la propiedad conmutativa).

Hablaremos de "matrices en $\mathbb{R}$" si $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y de "matrices en $\mathbb{C}$" si $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

La matriz ejemplo B se puede considerar como una matriz en el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, o también en el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$.

La matriz ejemplo C es una matriz en el cuerpo de los números complejos. No es una matriz en el cuerpo de los reales ya que tiene elementos que no son números reales.

El conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ tiene distintas notaciones, siendo las más frecuentes las tres siguientes:

$$M_{m\times n}(\mathbb{K}) \text{ ó } \mathbb{K}^{m\times n} \text{ ó } M_{m\times n}$$

La segunda notación particularizada para $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ sería $\mathbb{R}^{m\times n}$ ó $\mathbb{C}^{m\times n}$, respectivamente. La tercera notación no hace referencia a si los escalares son reales o complejos.

Al conjunto que comprende las matrices de todos los órdenes, se le denota en general $M(\mathbb{K})$ o M.
$M(\mathbb{R})$ designa el conjunto de las matrices reales de todos los órdenes
$M(\mathbb{C})$ designa el conjunto de las matrices complejas de todos los órdenes
M designa el conjunto de las matrices de todos los órdenes (no se hace referencia explícita a cual de los dos conjuntos de escalares es el utilizado).

Definimos a continuación algunos tipos de matrices.

1) **Matriz fila** es una matriz de orden $1 \times n$, $A = [a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1n}]$

2) **Matriz columna** es una matriz de orden $m \times 1$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$

A una matriz columna se le denomina también **vector**.

Para los vectores una notación habitual es la de una letra minúscula con una flecha superpuesta:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

3) **Matriz nula** es aquella que tiene todos los elementos nulos. Se denota como $A = 0$, o como Ω. El elemento nulo de un cuerpo es el elemento neutro de la suma. El elemento nulo de los números reales es 0, y el elemento nulo de los números complejos es 0 + 0i.

4) La **matriz opuesta de** A, denotada $-A$, es aquella que resulta de sustituir en A cada elemento por su opuesto (el elemento simétrico de la suma en el cuerpo).
Si $A = \{a_{ij}\}$, los elementos de $-A$ son: $-A = \{-a_{ij}\}$

5) **Matriz cuadrada** es aquella con igual número de filas que de columnas. $m = n$.
Una matriz cuadrada de n filas y n columnas se dice que es una matriz de orden n. Una matriz de este tipo se denota como $A_{n\times n}$ o simplemente A_n.

En una matriz cuadrada la **diagonal principal** es la línea formada por los elementos cuyos subíndices de fila y columna coinciden, $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$.

La **diagonal secundaria** es la línea formada por los elementos a_{ij} tales que $i + j = n + 1$.

Se denomina **traza**, denotada $\mathrm{tr}(A)$, a la suma de los elementos de la diagonal principal de A.
$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

Se llama **triángulo superior** al formado por los elementos a_{ij} situados por encima de la diagonal principal.
Se llama **triángulo inferior** al formado por los elementos a_{ij} situados por debajo de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} * & \triangle & \triangle & \triangle \\ \circ & * & \triangle & \triangle \\ \circ & \circ & * & \triangle \\ \circ & \circ & \circ & * \end{bmatrix}$$

$*$ diagonal principal
$\triangle$ triángulo superior
$\circ$ triángulo inferior

- **Matriz triangular superior**. Matriz cuadrada que tiene el triángulo inferior nulo. O lo que es lo mismo, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

- **Matriz triangular inferior**. Matriz cuadrada que tiene el triángulo superior nulo. O lo que es lo mismo, $a_{ij} = 0$ para $i < j$

- **Matriz diagonal**. Es aquella que es triangular superior y triangular inferior a la vez. Entre éstas cabe destacar la **matriz escalar**, matriz cuya diagonal principal tiene todos los elementos iguales. La **matriz unidad** o **matriz identidad** es una matriz escalar cuya diagonal principal está formada sólo por unos. La matriz identidad de orden n se denota como I_n. "Uno" es el el. neutro de la multiplicación en el cuerpo.

- **Matriz simétrica**. Una matriz A_n es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para todos los valores de i y de j.

- **Matriz antisimétrica o hemisimétrica**. Una matriz A_n es antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos los valores de i y de j. Evidentemente, para los elementos de la diagonal principal se concluye $a_{ii} = -a_{ii}$, por tanto $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots n$.

- **Matriz persimétrica**. Una matriz A_n es persimétrica si es simétrica respecto de la diagonal secundaria.

6) Se dice que $A_{m\times n}$ es **escalonada** si verifica:

a) Si tiene filas cuyos elementos son todos ceros, aparecen en la parte inferior de la matriz.

b) El primer elemento distinto de cero de una fila, empezando por la izquierda, se denomina **elemento pivote o cabecera**. Dadas dos filas consecutivas, el elemento pivote de la 2ª fila está más a la derecha que el elemento pivote de la 1ª fila.

Ejemplo 1.1 *Matrices escalonadas.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{5} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{4} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se indican en negrita los elementos pivote.

A continuación damos dos ejemplos de matrices que no son escalonadas.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Toda matriz cuadrada en forma escalonada es triangular superior</u>

En una matriz escalonada, las columnas que contienen pivotes se denominan **columnas pivotales**.

7) Se dice que $A_{m\times n}$ es **escalonada reducida** si es escalonada, con pivotes unidad, y tal que en las columnas pivotales todos los elementos salvo el pivote son nulos.

Ejemplo 1.2 *Matrices escalonadas reducidas.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Obsérvese la diferencia con las matrices escalonadas.

1.2 Operaciones con matrices y propiedades de las operaciones

1.2.1 Igualdad de matrices

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, ambas del mismo orden, son iguales si $\{a_{ij}\} = \{b_{ij}\} \ \ \forall \ i = 1, \ldots, m \ , \ j = 1, \ldots, n$

1.2.2 Suma de matrices

Dadas $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, ambas del mismo orden, se define $A+B$ como la matriz $C = \{c_{ij}\}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ejemplo 1.3 *Calcular* $A+B$ *con* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

El resultado es una matriz del mismo orden, en nuestro caso 3×2.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4 *Calcular* $A-B$*, tomando las matrices del apartado anterior. (Nótese como la "resta" es la suma de la opuesta).*

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Propiedades de la suma de matrices

1. Operación cerrada: $\forall \ A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \ A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}$

2. Asociativa: $\forall \ A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}, \ A + (B + C) = A + (B + C)$

3. Elemento neutro: $\exists \ 0 \in \mathbb{K}^{m\times n} / \ \forall \ A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \ \ A + 0 = 0 + A = A$

4. Conmutativa: $\forall \ A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \ A + B = B + A$

5. Existencia de elemento opuesto:

   $$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \exists \ -A \in \mathbb{K}^{m\times n} \ / \ A + (-A) = (-A) + A = 0$$

   $-A$ es la que hemos denominado anteriormente matriz opuesta.

   El elemento opuesto de $a \in \mathbb{R}$ es $-a \in \mathbb{R}$

   El elemento opuesto de $a + bi \in \mathbb{C}$ es $-a - bi \in \mathbb{C}$. (Signo opuesto en la parte real y en la parte imaginaria).

1.2.4 Producto de una matriz por un escalar α del mismo cuerpo

Dada $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se define:

$$\alpha * A = C \Leftrightarrow \alpha * a_{ij} = c_{ij} \quad \forall\ i = 1,\dots,m\ ,\ j = 1,\dots,n \qquad \alpha,\ a_{ij} \text{ y } c_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Es decir, se define como otra matriz $C = \{c_{ij}\}$ cuyos elementos se forman multiplicando α por cada uno de los elementos de $A = \{a_{ij}\}$

La matriz C es del mismo orden que A.

Para matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$, tomando los escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ se garantiza que el producto por un escalar sea una operación cerrada, es decir que la matriz resultante siga perteneciendo a $\mathbb{R}^{m\times n}$.

En general se omite el símbolo "$*$" de la operación, escribiendo $\alpha * A$ simplemente cómo αA

Este producto se designa frecuentemente como "producto externo", ya que involucra dos factores de conjuntos distintos, uno es un escalar y el otro una matriz. Así se diferencia del producto de dos matrices, que es un "producto interno", al ser los dos factores del mismo conjunto (ambos factores son matrices).

Ejemplo 1.5 $5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot(-1) & 5\cdot 0 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 1 & 5\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & 5 & 15 \end{bmatrix}$

Ejemplo 1.6 $(5+i) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+i & -5-i & 0 \\ 10+2i & 5+i & 15+3i \end{bmatrix}$

Ejemplo 1.7 $5 \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 2-i & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot(1+i) & 5\cdot 0 \\ 5\cdot(2-i) & 5\cdot 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+5i & 0 \\ 10-5i & 15i \end{bmatrix}$

Ejemplo 1.8 $(5+i) \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 2-i & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5+i)\cdot(1+i) & (5+i)\cdot 0 \\ (5+i)\cdot(2-i) & (5+i)\cdot 3i \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 4+6i & 0 \\ 11-3i & -3+15i \end{bmatrix}$

1.2.5 Propiedades del producto de una matriz por un escalar del mismo cuerpo

1. Cerrada: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\forall\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
2. Ley de identidad o de unidad del producto externo: 1 A = A 1 es el elemento neutro del producto en el cuerpo $\mathbb{K}$

   En $\mathbb{R}$ es el escalar 1 , ejemplo $1(-25) = -25$

   En $\mathbb{C}$ es el escalar $1 + 0i$, ejemplo $(1 + 0i)(2 - 6i) = (2 - 6i)$
3. Pseudoasociativa (asociativa entre el producto externo y el producto interno en $\mathbb{K}$):

   $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Se cumplen además:

4. Distributiva respecto a la suma de matrices:

   $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \forall\alpha \in \mathbb{K}$
5. Distributiva respecto a la suma de escalares:

   $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Otros resultados: $-1\ A = -A$, $0\ A = 0$

1.2.6 Estructura de Espacio Vectorial de las matrices: $(\mathbb{K}^{m\times n}, +, *\mathbb{K})$

El conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ con las operaciones de suma y producto externo por un escalar de $\mathbb{K}$, al cumplir las propiedades anteriormente enumeradas, tiene estructura de **Espacio vectorial**.

Este resultado se expresa cómo: $(\mathbb{K}^{m\times n},\ +\ ,\ *\ \mathbb{K})$ Espacio Vectorial

o diciendo simplemente que $\mathbb{K}^{m\times n}$ es Espacio Vectorial sobre $\mathbb{K}$ (se entiende en este caso, implícitamente, cuales son las operaciones a las que nos referimos).

1.2.7 Producto de matrices

Dadas dos matrices $A_{m\times n} = \{a_{ij}\}$ y $B_{n\times p} = \{b_{ij}\}$ [1], se define $C = A \cdot B$, como otra matriz $C_{m\times p}$ con tantas filas como A y tantas columnas como B, siendo su elemento c_{ij} el resultado de sumar los productos de los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B, en la forma dada en el siguiente sumatorio:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad i = 1,\dots,m \ j = 1,\dots,p$$

El algoritmo puede entenderse fácilmente observando el siguiente esquema:

$$\underset{\substack{\text{fila } i\\ m\times n}}{\begin{bmatrix} & & & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}} \underset{\substack{\text{columna } j\\ n\times p}}{\begin{bmatrix} & - & \\ & - & \\ & - & \\ & - & \\ & - & \end{bmatrix}} \underset{\substack{c_{ij}\\ m\times p}}{\begin{bmatrix} & & \\ & - & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}$$

En general se omite el símbolo "·" de la operación, escribiendo $A \cdot B$ simplemente cómo AB

Ejemplo 1.9 *Multiplicar las siguientes matrices:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot -1 + 1\cdot -2 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + -1\cdot -1 + -2\cdot -2 & 0\cdot 0 + -1\cdot 2 + -2\cdot 3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.10 *Multiplicar entre sí por pares, las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, *cuando sea posible.*

$$A\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \end{bmatrix} = 14$$

$$B\ A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

AC, CA, CB, BC no son operaciones posibles

[1] Nótese que el número de columnas de A ha de coincidir con el número de filas de B

RECORDATORIO de la condición del producto de matrices:

$$A_{m\times\mathbf{n}} \cdot B_{\mathbf{n}\times p} = C_{m\times p}$$

1.2.8 Propiedades del producto de matrices

Siempre que los productos sean posibles, el producto de matrices en $\mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ el cuerpo de los reales, o el de los complejos, cumple las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $\forall A, B, C \in M \quad A\ (B\ C) = (A\ B)\ C$

Se cumplen además:

2. Distributiva respecto a la suma de matrices:
   $\forall A, B, C \in M \quad A\ (B + C) = (A\ B) + (A\ C)$
   $(A + B)\ C = A\ C + B\ C$

3. Pseudoasociativa (asociativa entre el producto externo y el producto interno en M)
   $\forall A, B \in M$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha A)\ B = A\ (\alpha B) = \alpha (A\ B)$

   Nota: Considerando $\alpha = 0$ vemos que si una de las matrices producto es nula el resultado es la matriz nula del orden correspondiente.

1.2.9 Estructura de Álgebra de las matrices cuadradas: $(\mathbb{K}^n, +, *\mathbb{K}, \cdot)$

Consideradas en $\mathbb{K}^n$ las tres operaciones anteriormente definidas, de suma, producto interno $(\cdot)$ y producto externo con $\mathbb{K}$ $(*)$, y las propiedades para ellas enumeradas, se verifica que el conjunto $\mathbb{K}^n$ tiene respecto de ellas estructura de **Álgebra**.

Este resultado también se expresa cómo: $(\mathbb{K}^n\ ,\ +\ ,\ *\ \mathbb{K},\ \cdot)$ Álgebra

o diciendo simplemente que $\mathbb{K}^n$ es Álgebra sobre $\mathbb{K}$

1.2.10 Análisis de otras propiedades del producto de matrices

1. $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$; $\qquad A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$; $\qquad I_m A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$

Ejemplo 1.11 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. *Se cumple:*

$I_2\ A = A \qquad A\ I_3 = A \qquad I_2\ A\ I_3 = A$

Ejemplo 1.12 $\begin{bmatrix} 2+i & 7-3i \\ 4i & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & 7-3i \\ 4i & 6 \end{bmatrix}$

2. El producto de matrices no es conmutativo, es decir, no necesariamente $A\ B$ es igual a $B\ A$ aunque ambos productos puedan realizarse.

   Una condición necesaria (aunque no suficiente) para que se cumpla $A \cdot B = B \cdot A$ es que el resultado sea del mismo orden, y esto último requiere que A y B sean matrices cuadradas de ese mismo orden.

Justificamos el resultado: $\begin{cases} A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} \\ B_{n\times p}\cdot A_{m\times n} = C'_{n\times n} \end{cases}$

Tenemos por una parte que el producto es de orden $m \times p$, y por otra que $p = m$ (para poder multiplicar B por A), por tanto C y C' tienen tamaños $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente. Para que ambas sean del mismo orden tendremos $m = n$. Por tanto, al concluir que $m = n = p$, A y B tienen que ser ambas cuadradas de orden n.

Se dice que dos matrices cuadradas de orden n conmutan o que son conmutativas o permutables si cumplen $A \cdot B = B \cdot A$. También se utiliza la denominación "conmutante" o "permutante".

En algunos casos se verifica que $A\ B = -B\ A$ [2], entonces se dice que las matrices cuadradas de orden n A y B son anticonmutativas o antipermutables. También se utiliza la denominación "anticonmutante" o "antipermutante".

Ejemplo 1.13 *Ejemplo de dos matrices cuadradas del mismo orden que no son permutables ni antipermutables.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

3. El producto de matrices tiene divisores de cero: $A\ B = 0$ no implica que $A = 0$ ó $B = 0$.

   La definición estricta de los divisores de cero es la siguiente: una matriz no nula A es un divisor de cero por la izquierda si existe una matriz no nula B tal que $AB = 0$. De forma análoga se define un divisor de cero por la derecha. Una matriz que sea tanto divisor de cero por la izquierda como por la derecha se dice que es divisora de cero.

Ejemplo 1.14 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq 0 \quad y \quad A\ B = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.15 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los dos ejemplos anteriores vemos que las matrices A y B son respectivamente divisores de cero por la izquierda y por la derecha.

[2] Nótese que en este caso también se requiere que A y B sean matrices cuadradas del mismo orden

4. El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación:
   - $A\ B = A\ C$ no implica que $B = C$
   - $B\ A = C\ A$ no implica que $B = C$

   Obviamente sí se verifican la implicaciones recíprocas.

Ejemplo 1.16 *$A\ B = A\ C$, sin embargo $B \neq C$*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sin embargo, $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

Ejemplo 1.17 *De nuevo $AB = AC$ pero $B \neq C$*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. El producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

6. El producto de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.

Ejemplo 1.18 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 29 & 12 \end{bmatrix}$

7. El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. Además $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$

Ejemplo 1.19 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$

8. Una matriz diagonal conmuta con todas las matrices diagonales. Es consecuencia de que el producto de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ sea conmutativo.

Ejemplo 1.20

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.21 *En este ejemplo se observa como se obtiene el producto de una matriz dada por una una matriz diagonal.*

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\8&10&12\\6&9&6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&9\\4&10&18\\2&6&6\end{bmatrix}$$

En el primer caso, DA, cada fila de A queda multiplicada por el elemento de la diagonal.

En el segundo caso, AD cada columna de A queda multiplicada por el elemento de la diagonal.

$$\begin{array}{cc} D\ A & A\ D \\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}=a_{ij}d_{jj} & c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj}=d_{ii}a_{ij}\end{array}$$

9. El producto de una matriz $A_{m\times n}$ por un vector $n\times 1$ es un vector $m\times 1$.

   $A\vec{v}=\vec{w}$

   Ejemplo 1.22 $$\underset{A}{\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}}\ \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}=\underset{\vec{w}}{\begin{bmatrix}14\\32\\14\\6\end{bmatrix}}$$

10. Tomando la matriz $B=[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \dots\ \vec{v}_p\ ]$, en la que cada columna viene representada por un vector, tenemos que $AB=[\ A\vec{v}_1\ \ A\vec{v}_2\ \ \dots\ A\vec{v}_p\ ]$

    Ejemplo 1.23 $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\3&-2\end{bmatrix}$

    $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}$

    $$A\ B=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-3\\10&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\ \vec{v}_1 & A\ \vec{v}_2\end{bmatrix}$$

1.3 Inversa de una matriz

Dada una matriz $A\in M_n$ decimos que F es la inversa de A si: $A\ F=F\ A=I$.
La inversa de A se denota como A^{-1}, es decir $F=A^{-1}$, y se tiene entonces $A\ A^{-1}=A^{-1}\ A=I$

De razonamientos en apartados anteriores se concluye que $A^{-1}\in M_n$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una matriz A que posee inversa se denomina **matriz regular** o **matriz invertible**. De una matriz que no tiene inversa se dice que es **singular** o **no invertible**.

Propiedades

1) Si A es invertible A^{-1} es única
2) Si A es invertible A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$
3) Si A y B son invertibles, entonces $A\ B$ es invertible y $(A\ B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4) Si A invertible y $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, entonces $(\alpha\ A)^{-1} = \alpha^{-1}\ A^{-1}$
5) Si A es invertible, $AB = I \Rightarrow BA = I$, $B^{-1} = A$ y $A^{-1} = B$.
6) Si A es invertible A no es divisor de cero por la izquierda ni por la derecha.

Dem.

1) Sea A^{-1} la inversa de A, y B otra matriz inversa de A.
Considerada la igualdad $A\ B = I$ y premultiplicando ambos miembros por A^{-1}, obtenemos:
$A^{-1}A\ B = A^{-1}\ I \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}$
concluimos que B es la misma matriz que A^{-1}.

2) $A^{-1}A = AA^{-1} = I \qquad \Rightarrow \ (A^{-1})^{-1} = A$

3) Consideramos el producto $B^{-1}A^{-1}$
$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ y
$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$
$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4) $\alpha A\ \alpha^{-1}A^{-1} = \alpha\alpha^{-1}AA^{-1} = 1I = I$ y $\alpha^{-1}A^{-1}\alpha A = 1I = I$
$\Rightarrow (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$

5) Partimos de $AB = I$
multiplicando por A^{-1} por la izquierda y por A por la derecha obtenemos: $BA = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$
Por cumplirse $AB = BA = I$ se deduce que B es la inversa de A.

6) Partimos de $AB = 0$, multiplicando por A^{-1} a la izquierda tenemos $B = 0$, por tanto A no es divisor de cero por la izquierda (no existe B no nulo tal que $AB = 0$). La demostración de que A no es divisor de cero por la derecha se obtendría de forma análoga partiendo de $BA = 0$

Nota: Esta última propiedad nos indica que si A es invertible, entonces el producto $AB = 0$ cumple la propiedad de integridad (sólo el cero es divisor del cero), siendo la matriz nula la B.

Observaciones

• Una consecuencia de la propiedad 3) es que el producto de tres matrices invertibles de orden n es invertible, y la inversa es el producto de las inversas en el orden contrario. La generalización a productos de más matrices es obvia.

$$(A\ B\ C)^{-1} = ((A\ B)\ C)^{-1} = C^{-1}\ (A\ B)^{-1} = C^{-1}\ B^{-1}\ A^{-1}$$
$$(A\ B\ \ldots F)^{-1} = F^{-1} \ldots\ B^{-1}\ A^{-1}$$

• I_n es invertible y su inversa es I_n

• Si A es invertible, podremos despejar B en la ecuación $AB = C$ del siguiente modo: $B = A^{-1}C$.
Si B es invertible, podremos despejar A en la ecuación $AB = C$ del siguiente modo: $A = CB^{-1}$.

1.4 Transformaciones de una matriz

1.4.1 Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A_{m\times n}$ se llama traspuesta de A y se denota A^t, a la matriz que resulta de cambiar ordenadamente sus filas por sus columnas.
A^t será entonces de orden $n \times m$. $a^t_{ij} = a_{ji} \quad \forall \ \ i = 1, \dots, n \ \ , \ \ j = 1, \dots, m$

Ejemplo 1.24 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Propiedades:

1) $(A^t)^t = A$
2) $(\alpha \ A)^t = \alpha \ A^t \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
3) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
4) $(A \ B)^t = B^t \ A^t$

Demostración de la propiedad 4):
Sea $A \ B = C$

$$c^t_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a^t_{kj} b^t_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b^t_{ik} a^t_{kj}$$

La penúltima igualdad se obtiene porque el producto de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ cumple la propiedad conmutativa.
El término más a la izquierda de la cadena de igualdades es el elemento (i, j) de $(A \ B)^t$ y el término más a la derecha es el elemento (i, j) de la matriz $B^t A^t$. Concluyendo entonces que $(AB)^t = B^t \ A^t$
Nótese que la matriz identidad cumple $I^t = I$.

Cuando A es cuadrada tenemos los siguientes resultados:

- A es invertible si y sólo si A^t es invertible, y en este caso $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

  Demostración:

  $AA^{-1} = I \Leftrightarrow (A^{-1})^t A^t = I$ (tomando traspuestas a ambos lados de la primera igualdad o de la segunda)

  $A^{-1}A = I \Leftrightarrow A^t(A^{-1})^t = I$ (tomando traspuestas a ambos lados de la primera igualdad o de la segunda)

  Las igualdades de la derecha muestran que A^t tiene inversa y que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

- Una matriz A_n es simétrica si y sólo si $A = A^t$.

  En efecto A_n es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}$, y como $a_{ij} = a^t_{ji}$, tenemos que $a^t_{ji} = a_{ji}$ y por tanto $A^t = A$

  Ejemplo 1.25 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ *es una matriz simétrica*

- Una matriz A_n es antisimétrica o hemisimétrica si y sólo si $A = -A^t$.

  En efecto A_n es antisimétrica o hemisimétrica si y sólo si $a_{ij} = -a_{ji}$, y como $a_{ji} = a^t_{ij}$, tenemos que $a_{ij} = -a^t_{ij}$ y por tanto $A = -A^t$

  Ejemplo 1.26 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *es una matriz antisimétrica*

Ejemplo 1.27 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ *no cumple* $A = -A^t$ *pues* $-A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Este ejemplo nos permite recordar el requisito de que los elementos de la diagonal principal sean nulos en las matrices antisimétricas.

- Dada una matriz cuadrada A_n, $A + A^t$ es una matriz simétrica.

  Veamos la demostración: Definimos $C = A + A^t$

  $c_{ij} = a_{ij} + a^t_{ij} = a^t_{ji} + a_{ji} = a_{ji} + a^t_{ji} = c_{ji}$

  El resultado $c_{ij} = c_{ji}$ demuestra que C es simétrica.

  (La tercera igualdad se cumple por la propiedad conmutativa de la suma de los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$).

- Dada una matriz cuadrada A_n, $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

  Veamos la demostración: Definimos $C = A - A^t$

  $c_{ij} = a_{ij} - a^t_{ij} = a^t_{ji} - a_{ji} = -a_{ji} + a^t_{ji} = -(a_{ji} - a^t_{ji}) = -c_{ji}$

  El resultado $c_{ij} = -c_{ji}$ demuestra que C es antisimétrica.

  (La tercera igualdad se cumple por la propiedad conmutativa de la suma de los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$).

- Toda matriz cuadrada A_n se puede expresar de <u>forma única</u> como suma de una matriz simétrica S y otra antisimétrica H: $A = S + H$

  Veamos la demostración:

  $A = S + H \qquad [1]$

  y tomando traspuestas $A^t = S^t + H^t$

  Por otra parte $S^t = S$ y $H^t = -H$, por tanto $A^t = S - H \qquad [2]$

  Sumando [1] y [2] obtenemos $A + A^t = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}(A + A^t)$

  Restando [1] y [2] obtenemos $A - A^t = 2H \Rightarrow H = \frac{1}{2}(A - A^t)$

  Hemos demostrado cómo obtener S y H a partir de A

Ejemplo 1.28 *Descomponer* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ *como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

<u>Propiedad adicional</u>

- Dada $A_{m\times n}$, las matrices AA^t y A^tA son ambas simétricas.

  Demostración: $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$

  $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$

1.4.2 Primera definición de matriz ortogonal

Una matriz cuadrada se dice **ortogonal** si $AA^t = A^tA = I$

<u>Propiedades:</u>

a) $A^{-1} = A^t$

b) La traspuesta de una matriz ortogonal es ortogonal

c) La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal (la inversa es la misma que la traspuesta).

d) El producto de dos o más matrices ortogonales es ortogonal

Dem.

a) Por la definición de inversa

b) Sea A ortogonal,
$A^{-1}(A^{-1})^t = A^t(A^t)^t = A^tA = I$ y
$(A^{-1})^tA^{-1} = (A^t)^tA^t = AA^t = I$, por tanto A^{-1} es ortogonal.

c) Sea A ortogonal,
$A^t(A^t)^t = A^tA = I$ y
$(A^t)^tA^t = AA^t = I$, por tanto A^t es ortogonal.

d) Lo demostramos para el producto de dos matrices. Sean A y B ortogonales
$(AB)\ (AB)^t = ABB^tA^t = AIA^t = AA^t = I$
$(AB)^t\ AB = B^tA^tAB = B^tIB = B^tB = I$

Un ejemplo de matriz ortogonal es la siguiente: $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ para cualquier valor $\theta \in \mathbb{R}$.

Comprobación:

$$AA^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerda los siguientes valores de senos y cosenos:

$\sin(0°)=0$	$\sin(30°)=1/2$	$\sin(45°)=\sqrt{2}/2$	$\sin(60°)=\sqrt{3}/2$	$\sin(90°)=1$
$\cos(0°)=1$	$\cos(30°)=\sqrt{3}/2$	$\cos(45°)=\sqrt{2}/2$	$\cos(60°)=1/2$	$\cos(90°)=0$

1.4.3 Conjugada de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se llama conjugada de A y se denota $\overline{A}$, a una nueva matriz cuyos elementos son los conjugados de los elementos de A. Dado el complejo $z = a + bi$, su conjugado es $\overline{z} = a - bi$. El conjugado es por tanto el complejo con la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo.

Si la matriz A es real, entonces $\overline{A} = A$

<u>Propiedades:</u>

$\overline{\overline{A}} = A$

$\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$

$\overline{A \pm B} = \overline{A} \pm \overline{B}$

$\overline{AB} = \overline{A}\ \ \overline{B}$

Si todos los elementos de A son imaginarios puros (parte real 0), entonces $\overline{A} = -A$

Cuando A es cuadrada tenemos las siguientes definiciones:

A_n se dice hermítica o autoadjunta si $\overline{A^t} = A$, es decir, si $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos los valores de i y j. Obviamente, los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica han de ser números reales.

A_n se dice antihermítica o hemihermítica si $\overline{A^t} = -A$, es decir, si $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ para todos los valores de i y j. Se desprende que los elementos de la diagonal principal de una matriz antihermítica han de ser nulos o imaginarios puros.

A_n se dice normal si $A\ \overline{A^t} = \overline{A^t}\ A$

A_n se dice unitaria si $\overline{A^t} = A^{-1}$, es decir, si $A\ \overline{A^t} = \overline{A^t}\ A = I$

1.5 Potencia de una matriz

Dada una matriz A_n y un natural positivo k, entonces A^k denota el producto de A por sí misma k veces. Análogamente a la nomenclatura utilizada para los escalares reales o complejos, A correspondería a la base y k al exponente.

$$A^k = \overbrace{AA\ldots A}^{k \quad veces}$$

Estudiamos seguidamente matrices especiales en cuánto al valor de sus potencias.

- Matriz periódica de período k es aquella matriz A cuadrada que verifica que $A^{k+1} = A$ para algún natural positivo k, siendo k el menor de ellos para el que se verifica. En efecto $A^{k+1} = A \ \Rightarrow\ A^{ik+1} = A$ para $i = 1, 2, 3, ...$

  Demostraremos el último resultado mediante inducción:

  - El resultado $A^{ik+1} = A$ se cumple para $i = 1$, es decir, $A^{k+1} = A$.
  - Vamos a suponer que se cumple para un valor i y deduciremos que entonces se cumple también para el siguiente valor de i, es decir $i + 1$.
    Supuesto $A^{ik+1} = A$ se tendrá que $A^{(i+1)k+1} = A^{ik+k+1} = A^{ik+1}A^k = AA^k = A^{k+1} = A$.
  - Al cumplirse para $i = 1$ y para el siguiente índice de cualquiera que lo cumpla, se cumplirá para $i = 2, 3, 4, ...$, es decir, se cumplirá para todo i.

  El período se designa en general como T, es decir $T = k$.

  Si una matriz A es periódica de por ejemplo período $T = 4$, entonces $A^5 = A$, $A^9 = A$, $A^{13} = A$, etc. Partiendo de A, cada vez que multiplicamos A por A^4 volvemos a obtener A.

  Cuando $T = 1$ se tiene $A^2 = A$ y $A^{1*i+1} = A$ para todo i. Por tanto $A^k = A$ para todo $k \geq 2$. Se dice en este caso que A es idempotente.

  Nótese que $A^k = I$ implica $A^{k+1} = A$ pero no recíprocamente. En el caso de A inversible sí se cumple el recíproco, pues multiplicando la expresión $A^{k+1} = A$ por A^{-1} por la derecha se tiene $A^k = I$.

  Por ejemplo la matriz no invertible $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ es períodica de período $T = 2$, cumpliendo por tanto:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

Sin embargo A^2 no es igual a la identidad:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

- <u>Matriz nihilpotente de índice k</u> es aquella matriz A que verifica $A^k = 0$, siendo k el menor natural positivo para el que se cumple la igualdad.

  Las matrices A nihilpotentes de índice $k = 2$, es decir, tales que $A^2 = 0$, se definen simplemente como <u>matrices nihilpotentes</u>.

  Si una matriz es nihilpotente de índice k (sea $k = 2$ o cualquier otro valor), resulta inmediato que $A^p = 0$ para todo $p \geq k$.

- <u>Matriz involutiva</u> es la matriz A que verifica $A^2 = I$, y por tanto $A = A^{-1}$.

  $A^2 = I \;\Rightarrow\; A^3 = A \;\Rightarrow\; A^4 = A^3A = AA = I$

  Considerando un exponente cualquiera se obtendría:

  $A^{2i} = I \;\; \forall i = 1, ..., n \qquad\qquad A^{2i+1} = A \;\; \forall i = 1, ..., n$

  Expresado con palabras, las potencias pares de A producen I y las potencias impares de A producen A.

  La demostración formal, que es muy sencilla, habría de hacerse mediante inducción.

Si A es invertible podemos considerar la potencia k de la matriz A^{-1}.

$$(A^{-1})^k = \overbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}^{k \quad veces}$$

Por la propiedad de que el producto de matrices tiene inversa, y la inversa del producto es el producto de las inversas, en orden contrario, resulta que $(A^{-1})^k$ tiene inversa, y la inversa es A^k, es decir, $((A^{-1})^k)^{-1} = A^k$. Tomando inversas en los dos miembros, y teniendo en cuenta en el primer miembro que la inversa de la inversa es la original, se obtiene el siguiente importante resultado:

$$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$

$(A^{-1})^k$ se expresa por definición como A^{-k} siendo k el natural no negativo o exponente utilizado.

Esta notación es útil al simplificar expresiones como la que se indica a continuación:

$A^kA^{-p} = A^{k-p}$, siendo k y p exponentes positivos.

La igualdad anterior para el caso $k = p$ nos lleva a $A^kA^{-k} = A^0$, y por otra parte $A^kA^{-k} = I$ (cada producto AA^{-1} produce la identidad). Por tanto $A^0 = I$ por definición, para que se cumpla la igualdad $A^kA^{-p} = A^{k-p}$ para cualquier par de valores k y p.

Ejemplo de matriz periódica, de período $T = 4$: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Es la matriz que opera sobre un vector en $\mathbb{R}^2$ una rotación de 90 grados en el sentido contrario al de las agujas del reloj, es decir, $A\vec{v} = \vec{v}_{rot}$

$A^5 = A$, $A^9 = A$, y lo mismo para A^{13}, A^{17}, ...

Aplicar la rotación 5 veces es lo mismo que aplicarla una vez.

Ejemplo de matriz idempotente: $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Ejemplo de matriz nihilpotente de índice 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Toda matriz triangular superior con la diagonal principal nula es nihilpotente para algún índice.

Otro ejemplo de matriz nihilpotente: $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ es nihilpotente de índice 2 o simplemente nihilpotente.

Ejemplo de matriz involutiva: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

1.6 Operaciones elementales y matrices elementales

1.6.1 Operaciones elementales

Efectuamos una **operación elemental** sobre una línea (fila o columna) de la matriz $A_{m\times n}$, cuando realizamos una de estas tres operaciones:

a) Multiplicar la línea i (fila o columna) por un escalar $\alpha \neq 0$. También se denomina escalamiento, o línea-homotecia.

b) Sumar a la línea i la j (paralela a ella) multiplicada por un escalar cualquiera. También se denomina reemplazamiento o manipulación. La línea i es la "transformada" y la línea j la "auxiliar".

c) Intercambiar entre sí las líneas i y j (intercambiar dos filas entre sí o dos columnas entre sí). También se denomina trasposición o permutación.

Cuando se realiza una operación elemental sobre una fila también puede decirse que se realiza una operación elemental "por filas", y análogamente para las columnas.

Con frecuencia abreviaremos "operación elemental" como o.e.

A lo largo del curso se utilizarán las operaciones elementales por filas fundamentalmente para resolver sistemas de ecuaciones, para calcular rangos, y para simplificar la obtención de determinantes. Para esta última tarea se podrá recurrir además a las operaciones elementales por columnas.

Notación de las o.e.: (ilustrada con ejemplos)

F_{13}	se intercambian las filas 1 y 3
$F_{1(7)}$	la fila 1 se multiplica por 7
$F_{13(-4)}$	a la fila 1 se le suma la 3 multiplicada por -4

C_{13}	se intercambian las columnas 1 y 3
$C_{1(7)}$	la columna 1 se multiplica por 7
$C_{13(-4)}$	a la columna 1 se le suma la 3 multiplicada por -4

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido $F_{21(-1)}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido C_{12}

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{C_{12}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{21(-2)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B$

Las operaciones elementales realizadas han sido primero C_{12} y seguidamente $F_{21(-2)}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido $F_{21(-a)}$

Ejemplo de operación que no es operación elemental: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & a \\ a & 2a \end{bmatrix} = B$

La operación realizada de multiplicar la primera fila por a no es una operación elemental, porque si $a = 0$ la operación no es válida.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ a & 2a & a+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada es $F_{21(-1)}$.

1.6.2 Operaciones elementales inversas

Se llama **inversa de una operación elemental** a una operación elemental que cancela el efecto de la primera; es decir, si después de realizar una operación elemental sobre A se efectúa la operación elemental inversa se obtiene de nuevo la matriz original A.

La inversa de una o.e. por filas (columnas) es una o.e. por filas (columnas).

La inversa de F_{ij} es F_{ij}	La inversa de C_{ij} es C_{ij}
La inversa de $F_{i(\alpha)}$ es $F_{i(1/\alpha)}$	La inversa de $C_{i(\alpha)}$ es $C_{i(1/\alpha)}$
La inversa de $F_{ij(\alpha)}$ es $F_{ij(-\alpha)}$	La inversa de $C_{ij(\alpha)}$ es $C_{ij(-\alpha)}$

1.6.3 Matrices elementales

Se define **matriz elemental** como aquella matriz cuadrada de orden n que se obtiene al efectuar una operación elemental sobre una línea (fila o columna) de la matriz identidad de orden n.

Ejemplos de matrices elementales de orden 3:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = E_{F_{23}} \quad \text{Se intercambia fila 2}^{\text{a}} \text{ con fila 3}^{\text{a}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_{1(3)}} \begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = E_{F_{1(3)}} \quad \text{Se multiplica la 1}^{\text{a}} \text{ fila por 3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(-2)}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix} = E_{F_{31(-2)}} \quad \text{Se suma a la 3}^{\text{a}} \text{ fila la 1}^{\text{a}} \text{ por } -2$$

Con frecuencia para <u>simplificar la notación</u> se designan las matrices elementales como las operaciones elementales asociadas. Para los ejemplos anteriores la notación simplificada de las matrices elementales sería: F_{23}, $F_{1(3)}$ y $F_{31(-2)}$

Para las mismas o. e., pero por columnas, las correspondientes matrices elementales serían: C_{23}, $C_{1(3)}$ y $C_{13(-2)}$

Fijándonos en los ejemplos anteriores observamos la siguiente <u>relación entre matrices elementales por filas y por columnas:</u>

$F_{23} = C_{23}$	son iguales
$F_{1(3)} = C_{1(3)}$	son iguales
$F_{31(-2)} = C_{13(-2)}$	las líneas transformada y auxiliar aparecen intercambiadas.

Este patrón es válido para cualquier orden n, para cualquier par de índices i, j y para cualquier escalar α (no nulo en el caso del escalamiento).

$F_{ij} = C_{ij} \qquad F_{i(\alpha)} = C_{i(\alpha)} \qquad F_{ij\ (\alpha)} = C_{ji\ (\alpha)}$

1.6.4 Inversa de una matriz elemental

- Toda matriz elemental tiene inversa, y la inversa de una matriz elemental es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental inversa.

  La inversa de F_{ij} es F_{ij}

  La inversa de $F_{i(\alpha)}$ es $F_{i\ (1/\alpha)}$

  La inversa de $F_{ij\ (\alpha)}$ es $F_{ij\ (-\alpha)}$

$F_{ij}\ F_{ij} = I$
$F_{i(\alpha)}\ F_{i\ (1/\alpha)} = I$ $F_{i(1/\alpha)}\ F_{i(\alpha)} = I$
$F_{ij\ (\alpha)}\ F_{ij\ (-\alpha)} = I$ $F_{ij\ (-\alpha)}\ F_{ij\ (\alpha)} = I$

  Ejemplos:

$$E_{F_{23}}E_{F_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{1(1/3)}}E_{F_{1(3)}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{31(2)}}E_{F_{31(-2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- El mismo desarrollo se aplicaría a las operaciones elementales por columnas.

1.6.5 Operación elemental sobre A como producto de A por matriz elemental

• Sean una matriz $A_{m\times n}$ y la matriz elemental F_m correspondiente a determinada o. e. por filas; entonces la matriz $B_{m\times n}$ que resulta de efectuar dicha o. e. sobre $A_{m\times n}$ es igual al producto $F_m A_{m\times n}$.

• Sean una matriz $A_{m\times n}$ y la matriz elemental C_n correspondiente a determinada o. e. por columnas; entonces la matriz $B_{m\times n}$ que resulta de efectuar dicha o. e. sobre $A_{m\times n}$ es igual al producto $A_{m\times n}C_n$.

Resumimos así el resultado anterior:

$A \xrightarrow[\text{o.e.f } F]{} B \ \Rightarrow\ B = F\ A$ — F multiplica por la izda (pre-multiplica)

$A \xrightarrow[\text{o.e.c. } C]{} B \ \Rightarrow\ B = A\ C$ — C multiplica por la dcha (post-multiplica)

<u>Ejemplo 1:</u> A partir de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ queremos obtener la matric B que tiene <u>intercambiadas las filas 2 y 4</u>. Determina la matriz elemental F tal que $F.A = B$

F es 4×4, pues A tiene 4 filas. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, <u>sumar a la 2ª fila la 1ª multiplicada por (-2)</u> utilizando el producto por una matriz elemental.

F es 3×3, pues A tiene 3 filas.

$F_{21(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz elemental que resulta de sumarle a la fila 2ª de I_3, la 1ª multiplicada por (-2).

$$F_{21(-2)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coincide con el resultado obtenido al sumar a la 2^a fila de A la 1^a multiplicada por (-2), es decir, al efectuar $F_{21(-2)}$ sobre A.

<u>Ejemplo 3:</u> Dada $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, <u>intercambiar las columnas 1 y 3</u> utilizando el producto por una matriz elemental.

$C_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7 Equivalencia de matrices

1.7.1 Definiciones

Se dice que $A_{m\times n}$ es **equivalente** a $B_{m\times n}$, $A \sim B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales.

Se dice que $A_{m\times n}$ es **equivalente por filas** a $B_{m\times n}$, $A \sim_f B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales por filas.

Se dice que $A_{m\times n}$ es **equivalente por columnas** a $B_{m\times n}$, $A \sim_c B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales por columnas.

Observaciones:

- $A \sim_f B \Rightarrow A \sim B$ pero no al revés
- $A \sim_c B \Rightarrow A \sim B$ pero no al revés

La condición de equivalencia por filas y la condición de equivalencia por columnas son "más fuertes" (más restrictivas) que la condición de equivalencia.

<u>Ejemplos:</u>

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ no son equivalentes por filas, no son equivalentes por columnas, y sí son equivalentes.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son equivalentes por filas (y por tanto equivalentes), pero no son equivalentes por columnas.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ son equivalentes por columnas (y por tanto equivalentes), pero no son equivalentes por filas.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ no son ninguna de ellas equivalente a la otra.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son equivalentes, y además son tanto equivalentes por filas como equivalentes por columnas.

1.7.2 Equivalencia por filas, equivalencia por columnas y equivalencia son relaciones de equivalencia

Desde el punto de vista de las relaciones entre los elementos de un conjunto, en este caso el conjunto de matrices $M_{m\times n}$, las relaciones de equivalencia así definidas pertenecen a la clase de relaciones denominadas **"relaciones de equivalencia"**, puesto que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Lo justificamos a continuación para la equivalencia general. Razonamientos parecidos permitirían justificar la equivalencia por filas y la equivalencia por columnas.

<u>Reflexiva:</u> Podemos justificar que A es equivalente a A tomando por ejemplo la o.e. de multiplicar una fila por el escalar 1.

<u>Simétrica:</u> Si A es equivalente a B, B es equivalente a A. Se justifica realizando en el paso de B a A las o.e. inversas a las realizadas en el paso de A a B (en el orden inverso, pues primero se debe deshacer la última o.e., luego la penúltima y así sucesivamente).

<u>Transitiva:</u> Si A es equivalente a B, y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C.

A o.e. $1 \to ... \to$ o.e. $l \to B$ y B o.e. $l{+}1 \to ... \to$ o.e. $k \to C \quad \Rightarrow$

A o.e. $1 \to ... \to$ o.e. $l \to$ o.e. $l{+}1 \to ... \to$ o.e. $k \to C$

Las expresiones anteriores indican que si la secuencia de o.e. de 1 a l nos lleva de A a B, y la secuencia de $l+1$ a k de B a C, entonces la secuencia completa de 1 a l y de $l+1$ a k transforma A en C.

1.7.3 Factorizaciones asociadas a equivalencia de matrices

$$A \underset{\text{def}}{\sim} B \Leftrightarrow F_a \,...\, F_2\, F_1\, \boldsymbol{A}\, C_1\, C_2 \,...\, C_b \;=\; \boldsymbol{B} \Leftrightarrow (F_1)^{-1}(F_2)^{-1} \,...\, (F_a)^{-1}\, \boldsymbol{B}\, (C_b)^{-1} \,...\, (C_2)^{-1}(C_1)^{-1} \;=\; \boldsymbol{A}$$

Denotando $F = F_a \;...\; F_2\; F_1$, y $C = C_1\; C_2\; ...\; C_b$, tenemos que F y C son invertibles, por ser producto de matrices invertibles.

Presentamos a continuación las factorizaciones de los tres tipos de equivalencia.

- **Equivalencia**

  $A \sim B \;\Rightarrow\; \exists F, C$ invertibles tales que $\boldsymbol{FAC = B}$

  (y en consecuencia $F^{-1}BC^{-1} = A$)

- **Equivalencia por filas**

  El caso particular en el que sólo se usen o.e. por filas corresponde a tomar $C = I$.

  $$A \sim_f B \;\Leftrightarrow\; F_a \;...\; F_2\; F_1\; \boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{B} \;\Leftrightarrow\; (F_1)^{-1}\; (F_2)^{-1} \;...\; (F_a)^{-1}\; \boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{A}$$

  $A \sim_f B \;\Rightarrow\; \exists F$ invertible tal que $\boldsymbol{FA = B}$

  (y en consecuencia $F^{-1}B = A$)

- **Equivalencia por columnas**

  El caso particular en el que sólo se usen o.e. por columnas corresponde a tomar $F = I$.

  $$A \sim_c B \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}\; C_1\; C_2 \;...\; C_b \;=\; \boldsymbol{B} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{B}\; (C_b)^{-1} \;...(C_2)^{-1}\; (C_1)^{-1} \;=\; \boldsymbol{A}$$

  $A \sim_c B \;\Rightarrow\; \exists C$ invertible tal que $\boldsymbol{AC = B}$

  (y en consecuencia $BC^{-1} = A$)

La factorización $FAC = B$ se expresa con frecuencia utilizando los nombres P y Q para las matrices F y C, es decir $PAQ = B$. La razón es que F y C son matrices invertibles y los nombres P y Q son los que se suelen utilizar en Álgebra Lineal para designar matrices invertibles.

1.7.4 Equivalencia en matrices cuadradas y su relación con la matriz inversa

1. Para el caso particular de matrices cuadradas, los resultados $FAC = B$ (y $F^{-1}BC^{-1} = A$) indican que si una de ellas (A o B) es invertible también lo será la otra (el producto de matrices invertibles es una matriz invertible). Es decir, $\underline{A \sim B \Rightarrow \text{ambas son invertibles o no lo es ninguna}}$.

2. Una consecuencia del resultado anterior es que $\underline{A \sim I \Rightarrow A \text{ invertible}}$, ya que la identidad lo es.

3. $A \sim I \Rightarrow$ A equivalente por filas a I y A equivalente por columnas a I.

   Demostración: $FAC = I \Leftrightarrow A = F^{-1}IC^{-1} = F^{-1}C^{-1} = F_1...F_k = C_1...C_k = F_1...F_kI = IC_1...C_k$.

   En las secciones 1.6.2, 1.6.3 y 1.6.4 vimos que las inversas de matrices elementales de filas son matrices elementales de filas, que las inversas de las matrices elementales de columnas son matrices elementales de columnas y que toda matriz elemental de filas es igual a una matriz elemental de columnas y al revés, en particular: $F_{ij} = C_{ij}$ $\quad F_{i(\alpha)} = C_{i(\alpha)}$ $\quad F_{ij\ (\alpha)} = C_{ji\ (\alpha)}$.

   Por eso la expresión $A = F^{-1}C^{-1}$ anterior ha podido escribirse en cualquiera de las dos formas siguientes:

   - $A \ = \ F^{-1}C^{-1} = F_1 \ ... \ F_k \ = \ F_1 \ ... \ F_k \ I$
   - $A \ = \ F^{-1}C^{-1} = C_1 \ ... \ C_k \ = \ I \ C_1 \ ... \ C_k$

   $A \ = \ F_1 \ ... \ F_k \ I$ expresa que A es equivalente por filas a I, y $A \ = \ I \ C_1 \ ... \ C_k$ que A es equivalente por columnas a I.

4. $A \sim I \Leftrightarrow A$ es producto de matrices elementales.

   Demostración: Del resultado anterior se concluye la implicación directa. La implicación inversa se deduce sin más que escribir $A = E_1...E_k = \begin{cases} F_1...F_kI \\ IC_1...C_k \end{cases}$.

5. A producto de elementales $\Rightarrow A$ es invertible (pues el producto de invertibles es invertible).

   Esta propiedad también se podría haber deducido combinando los resultados de los apartados 4 y 2.

Resumen de las propiedades de 2 a 5:

$$\begin{array}{ccc} A \sim I \ \Leftrightarrow \ A \sim_f I \ \Leftrightarrow \ A \sim_c I & \Leftrightarrow & A \text{ producto de elementales} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A \text{ invertible} & & A \text{ invertible} \end{array}$$

Queda pendiente la implicación vertical hacia arriba.

1.8 Forma escalonada por filas de una matriz

1.8.1 Definición de forma escalonada por filas y de forma escalonada reducida por filas

Partiendo de cualquier matriz $A_{m\times n}$ se puede llegar mediante un número finito de o.e. por filas a una matriz $U_{m\times n}$ escalonada, y a ésta se le denomina **forma escalonada por filas de** A. Existen infinitas formas escalonadas por filas de una matriz dada A.

$$A \ \sim_f \ U_{esc\ filas}$$

El proceso de obtener una forma escalonada por filas de una matriz se denomina "eliminación gaussiana".

Nótese que por ser U una forma escalonada por filas de A, se tiene: $U = F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ A$, siendo F_i la matriz elemental correspondiente a cada o.e. realizada. La expresión de U puede simplificarse como $U = PA$, siendo $P = F_a \ ... \ F_2 \ F_1$ (matriz invertible).

Se denomina **forma escalonada reducida por filas de una matriz** A a la forma escalonada por filas de A que tiene pivotes unidad y ceros encima de los elementos pivote. La forma escalonada reducida por filas de una matriz A dada es única. En general utilizaremos para esta matriz las notaciones $A_{red\ filas}$ o $U_{red\ filas}$.

A la forma escalonada reducida por filas también se le llama "forma normal de Hermite". Aunque la forma escalonada reducida por filas es única, se puede llegar a ella por distintas (infinitas) secuencias de operaciones elementales por filas.

Aplicando las propiedades simétrica y transitiva de la equivalencia por filas deducimos que todas las matrices equivalentes por filas entre sí tienen la misma forma escalonada reducida por filas. Expresamos este resultado como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} A \ \sim_f \ B \\ A \ \sim_f \ U_{red\ filas} \end{array}\right\} \Rightarrow B \ \sim_f \ U_{red\ filas}$$

Demostración:

$$A \ \sim_f \ B \ \ \Rightarrow \ \ B \ \sim_f \ A;$$

$$\left.\begin{array}{l} B \ \sim_f \ A \\ A \ \sim_f \ U_{red\ filas} \end{array}\right\} \Rightarrow B \ \sim_f \ U_{red\ filas}$$

Nótese que para cualquier matriz C se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} A \ \sim_f \ B \\ A \ \sim_f \ C \end{array}\right\} \Rightarrow B \ \sim_f \ C$$

Ejemplo de formas escalonadas y forma reducida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las dos primeras matrices a la derecha de A son formas escalonadas de A, y la tercera es la forma escalonada reducida de A.

1.8.2 Obtención de la forma escalonada por filas mediante Eliminación Gaussiana Simple

Describimos a continuación un algoritmo para obtener a partir de $A_{m\times n}$ una forma escalonada por filas determinada. El método se denomina **Eliminación Gaussiana Simple** y el orden en el que se efectúan las operaciones elementales por filas viene prefijado por un convenio. No se pueden realizar escalamientos. El intercambio de filas sólo se puede realizar para buscar un elemento pivote en la obtención de la forma escalonada por filas, y se ha de realizar con la primera fila siguiente que sí posea pivote.

El algoritmo de **Eliminación Gaussiana Simple** consta de los siguientes pasos:

1) Partiendo de la izquierda, buscamos la 1^a columna con un elemento distinto de cero, llamémosla j_1. Esta columna j_1 es la primera columna pivotal. Si el primer elemento no nulo de j_1 (el de la fila más alta) no está en la 1^a fila se intercambian la primera fila y ésta. Este elemento no nulo, en la posición $(1\ ,\ j_1)$ es el primer elemento pivote. Mediante operaciones elementales por filas convertimos los elementos de la primera columna pivotal que están debajo del elemento pivote, en ceros. La fila auxiliar utilizada es la 1^a fila. La operación elemental que elimina el elemento b es la de sumar a la fila que contiene el elemento b la fila auxiliar multiplicada por $(-b\ /\ \textit{primer pivote})$.

2) Moviéndonos hacia la derecha, a partir de la 1^a columna pivotal, buscamos la siguiente columna que tenga un elemento no nulo en la 2^a fila o siguientes. Esa columna j_2 será la segunda columna pivotal. Se realizará un intercambio de filas si este primer elemento no nulo no estuviera en la 2^a fila, para colocarlo precisamente en ésta. Este es el segundo elemento pivote. Además de esta operación elemental de intercambio a fin de que el elemento pivote se encuentre en la 2^a fila (posición $(2\ ,\ j_2)$), se realizarán las operaciones elementales necesarias para que todos los elementos de la columna pivotal, por debajo del pivote, sean ceros, utilizando como fila auxiliar la fila 2^a. Estas operaciones elementales no afectan a los elementos de las columnas situadas a la izquierda de j_2, ya que los elementos de la fila 2 a la izquierda de j_2 son todos nulos.

3) Seguimos moviéndonos hacia la derecha. Sea j_3 la siguiente columna que tiene un elemento no nulo, ahora en la 3^a fila o más abajo. Si es necesario intercambiaremos las filas para que, en la nueva matriz, la columna j_3 tenga en la fila 3 el primer elemento no nulo encontrado (tercer elemento pivote), y a continuación realizaremos las operaciones para transformar a ceros los elementos por debajo de él, utilizando la fila 3 como auxiliar.

4) Seguimos repitiendo el proceso hasta conseguir r columnas pivotales, $j_1, j_2 \ldots, j_r$ y solamente ceros en las filas $r+1, r+2, ..., m$.

Al final de estos cuatro pasos habremos conseguido transformar la matriz, a través de operaciones elementales por filas, en una **forma escalonada por filas**.

Dada una matriz, *mediante el método de eliminación gaussiana simple se obtiene una única matriz en la forma escalonada por filas.* Esto es debido a que las operaciones elementales que se realizan y el orden en que se realizan están fijadas por el método.

Ejemplo: Obtén la forma escalonada por filas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mediante eliminación gaussiana simple.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{F_{13}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{F_{41(-1/2)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1-1 & 4-3 & 5-4 & 0-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{F_{23}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{52(-1/2)}}{\overset{F_{42(-1/2)}}{\longrightarrow\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1-1 & -2-3/2 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1-1 & 2-3/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \underset{F_{53(-1/2)}}{\overset{F_{43(7/2)}}{\longrightarrow\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{esc\ filas\ EGS} \qquad A \sim_f A_{esc\ filas\ EGS}$$

Se obtienen 3 cols. pivotales: la 2ª, la 3ª y la 5ª. Los pivotes son 2, 2 y 1 respectivamente.

1.8.3 Propiedades fundamentales de las formas escalonadas por filas

1. Todas las formas escalonadas por filas de una matriz tienen el mismo número de filas no nulas. A ese número se le suele denotar r.
2. Todas las formas escalonadas por filas de una matriz tienen las columnas pivotales en las mismas posiciciones. Y el número de ellas coincide con el número de filas no nulas r.

1.8.4 Rango de una matriz

Se denomina **rango** de una matriz $A_{m\times n}$ al número de columnas pivotales o número de filas no nulas de cualquier forma escalonada por filas de la matriz.

Propiedades:

• Dada una matriz $A_{m\times n}$ el rango ha de ser menor o igual que m y menor o igual que n.

• Todas las matrices equivalentes por filas entre sí tienen el mismo rango.
Nótese que el recíproco no se cumple.

• Un resultado muy importante que no vamos a demostrar es el siguiente: $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A^t$

• El rango de la matriz I_n es n, pues la matriz ya es escalonada por filas y tiene n filas no nulas (o lo que es lo mismo, n columnas pivotales).

• Toda matriz equivalente por filas a la identidad tiene rango n.

Ejemplo 1.29 $\text{rg}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{bmatrix} = 2\ ,\ \text{rg}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\0 & 2 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 2\ ,\ \text{rg}\begin{bmatrix}4 & -1 & 1 & 2\\0 & -1 & 2 & -3\\0 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix} = 3$

Ejemplo 1.30 *Determina el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\2 & 4 & -1\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\2 & 4 & -1\\0 & -2 & 0\end{bmatrix} \underset{F_{21(-2)}}{\sim_f} \begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\0 & -6 & -1\\0 & -2 & 0\end{bmatrix} \underset{F_{32(-1/3)}}{\sim_f} \begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\0 & -6 & -1\\0 & 0 & 1/3\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \text{rg}A = 3$$

Ejemplo 1.31 *Determina el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\a & 2a\end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\a & 2a\end{bmatrix} \underset{F_{21(-a)}}{\sim_f} \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & a\end{bmatrix}$$ *El rango es 1 si* $a = 0$ *y 2 si* $a \neq 0$.

Es importante darse cuenta de no cometer el error de efectuar las operaciones: fila primera por $-a$, *y fila segunda igual a ella misma más la primera. En efecto no puede hacerse porque la primera operación no es elemental (ver en página 23). Veamos la consecuencia de este error:*

Si de $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\a & 2a\end{bmatrix}$ *pasamos a* $\begin{bmatrix}-a & -a\\a & 2a\end{bmatrix}$, *con la siguiente operación elemental obtenemos que la última matriz es equivalente por filas a* $\begin{bmatrix}-a & -a\\0 & a\end{bmatrix}$, *y por tanto el resultado para el rango es:*
El rango es 0 si $a = 0$ *y 2 si* $a \neq 0$. *Nótese que para el caso* $a = 0$ *el rango calculado es erróneo.*

Ejemplo 1.32 *a) Justifica si las siguientes matrices son equivalentes por filas o no y si tienen el mismo rango o no. b) Justifica si son o no equivalentes por columnas.*

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Las dos matrices están en forma escalonada y tienen el mismo número de filas no nulas, uno, por tanto tienen el mismo rango, y su valor es 1.

Las matrices no son equivalentes por filas, porque ningún conjunto de operaciones elementales por filas permite llegar de una a la otra.

Las matrices son equivalentes por columnas, pues de la primera a la segunda se puede llegar por ejemplo mediante las siguientes o.e. por columnas:
1) $C_{21(2)}$, *2)* $C_{31(2)}$.

1.8.5 Obtención de la forma escalonada reducida a partir de una forma escalonada

La obtención de la escalonada reducida por filas a partir de una forma escalonada se realiza mediante la eliminación denominada de Gauss-Jordan o de reducción, realizando las operaciones elementales por filas necesarias para transformar en "unos" los elementos pivote y en "ceros" los elementos de las columnas pivotales situados por encima del elemento pivote.

Un procedimiento sistemático posible es el de escalar las filas no nulas, en primer lugar, a fin de que todos los pivotes tomen el valor 1, y seguidamente obtener los "ceros" por encima de los elementos pivote.

Denotando como $j_1, j_2 \dots j_r$ las columnas pivotales de la matriz escalonada de orden $m \times n$, los pasos serían los siguientes:

1) Considerando la última fila no nula, que llamamos fila r, como auxiliar, y con las correspondientes operaciones elementales sobre las filas, consigamos mediante reemplazamientos que la columna j_r tenga ceros en las filas 1, 2, ..., $r-1$. Ninguna columna a la izquierda de j_r se verá afectada por estas operaciones, ya que los elementos de la fila r a la izquierda de la columna pivotal j_r son todos nulos.

2) Continuamos hacia arriba, en la fila $r-1$, donde a través de operaciones elementales, tomando la fila $r-1$ como fila auxiliar, haremos cero los elementos de la columna pivotal j_{r-1} en las filas 1, 2, ..., $r-2$. Continuamos con estas transformaciones para que cada columna pivotal j_i tenga ceros en las $i-1$ primeras filas, siempre disminuyendo i, hasta $i=2$.

Con el proceso descrito se obtiene la **forma escalonada reducida por filas**.

Ejemplo: Obtén la forma reducida por filas de la matriz A del ejemplo anterior partiendo de la forma escalonada allí obtenida (calculada mediante Eliminación Gaussiana Simple).

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{2(1/2)}]{F_{1(1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{13(-2)}]{F_{23(-3/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{12(-3)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{red\ filas} \quad , \quad A \sim_f A_{red\ filas}$$

Las columnas pivotales son las mismas: la segunda, la tercera y la quinta. Los pivotes ahora son todos 1 y cada columna pivotal tiene ceros por encima de los elementos pivote.

1.9 Equivalencia por filas a la identidad: aplicación para obtener la inversa

Si A_n es equivalente por filas a la identidad A es invertible, y ya que A_n se expresa cómo:

$\boxed{F_a \dots F_2 F_1 \ A = I}$ (1)

despejamos A^{-1} cómo: $\boxed{A^{-1} = F_a \dots F_2 F_1}$ (2)

La última ecuación es igual a esta otra: $\boxed{A^{-1} = F_a \dots F_2 F_1 I}$ (3)

Las ecuaciones (1) y (3) ponen de manifiesto el siguiente resultado: efectuando la misma secuencia de operaciones elementales por filas y en el mismo orden que llevan de A a I, la matriz I se transforma en A^{-1}.

El resultado determina un procedimiento para obtener la inversa de una matriz denominado método de Gauss-Jordan. El esquema es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} \longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow \longrightarrow \begin{bmatrix} I & | & A^{-1} \end{bmatrix}$$

operaciones elementales por filas

Ejemplo 1.33 *Determina la inversa de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *por el método de Gauss-Jordan, si es que dicha inversa existe.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | \, 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | \, 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & | \, 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | \, 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | \, 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & | \, 6 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

*fila2 = fila2 - 2 * fila1*
*fila3 = fila3 - 2 * fila1*
Se intercambian las filas 2 y 3
*fila 2 = fila 2 * (-1)*
fila3 = fila3 + 4 fila2*

Observamos que el rango es 3, igual al orden de la matriz A, por tanto A tiene inversa. La submatriz de la izquierda es ya triangular superior, pero falta hacer "1" uno de los pivotes.

*Aplicando fila3 = 1/8 * fila3 tenemos:*

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$$

*fila2 = fila2 - 2*fila3*
fila1 = fila1 - fila 3

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | \; 1-3/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | \; 2-3/2 & 0-1/4 & -1+1 \\ 0 & 0 & 1 & | \; 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | \; 1/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | \; 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | \; 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$$

*fila1 = fila1 - 2*fila2*

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \; | & 1/4-1 & -1/8+1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \; | & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \; | & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \; | & -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \; | & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \; | & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Resultado: *La matriz inversa de A es* $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$

1.10 Matrices equivalentes: forma canónica equivalente y rango

Hemos visto como a partir de una matriz $A_{m\times n}$ podíamos obtener infinitas matrices equivalentes por filas a ella, en la forma escalonada. Una de estas formas escalonadas era la denominada forma escalonada reducida de A. Todas las formas escalonadas por filas de A tendrán entre una y n columnas pivotales (la única matriz sin columnas pivotales es la matriz nula), que **no** serán necesariamente las n primeras. A continuación vemos un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{32(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Forma esc. por filas}} \xrightarrow{F_{12(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{2(-1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Forma esc. reducida por filas}}$$

Concluimos (ya al llegar a la primera forma escalonada por filas) que el rango de A es 2, siendo las columnas pivotales la primera y la tercerca.

Mediante o.e. por columnas podemos ahora hacer que las columnas pivotales sean las dos primeras:

$$C_{23} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y continuando con o.e. por columnas podemos hacer que todos los elementos de las columnas no pivotales sean nulos:

$$C_{31(-2)} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A la última matriz la llamamos "forma canónica equivalente" de la matriz A. Es única.

Forma canónica equivalente de la matriz $A_{m\times n}$ es la matriz equivalente de A que tiene la expresión:

$$\begin{bmatrix} I_r & | & \Omega \\ - & - & - \\ \Omega & | & \Omega \end{bmatrix}, \text{ siendo } r \text{ el rango de } A$$

Para obtener la forma canónica equivalente de una matriz $A_{m\times n}$ será necesario, en general, efectuar tanto operaciones elementales por filas como operaciones elementales por columnas.

Se concluyen de forma inmediata los siguientes resultados:

1) Dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ son equivalentes si y sólo si tienen la misma forma canónica equivalente.
2) Dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ son equivalentes si y sólo siendo del mismo tamaño tienen el mismo rango.

Obviamente si A_n es equivalente a la identidad, I_n, entonces la forma canónica equivalente de A es la identidad, I_n.

Nótese que para matrices A y B del mismo tamaño se cumple:

$$\begin{cases} A \ \sim_f \ B & \Rightarrow \quad \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B \\ A \ \sim_c \ B & \Rightarrow \quad \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B \\ A \ \sim \ B & \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B \end{cases}$$

1.11 Definición de determinante

A toda matriz cuadrada A_n con elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ le asociamos un número denominado **determinante de** A, det$A$ o $|A|$ simbolizado así :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}$$

Este número se calcula sumando todos los productos que se obtienen al multiplicar n elementos de la matriz de todas las formas posibles, con la condición de que en cada producto exista un único elemento de cada fila y un único elemento de cada columna; cada uno de estos productos llevará su signo o el opuesto según la permutación formada por los subíndices fila de los n factores y la formada por los subíndices columna de los n factores sean o no de la misma clase, respectivamente.

Cada sumando tiene esta forma:

$$a_{1\ j_1} \ \ a_{2\ j_2} \ \ \dots \ \ a_{n-1\ j_{n-1}} \ \ a_{n\ j_n}$$

siendo $j_1, j_2, \dots, j_n$ una permutación de $1, 2 \dots n$. Por simplicidad hemos tomado para las filas el orden natural.

El número de permutaciones (ordenaciones) de n elementos distintos $1, 2 \dots n-1, n$ es $n!$, por tanto el número de sumandos es $n!$.

Dos permutaciones son de la misma clase (distinta clase) cuando para pasar de una otra se necesita un número par (impar) de intercambios (también llamados inversiones o trasposiciones).

El valor de un determinante no varía cuando cambiamos ordenadamente sus filas por sus columnas. $|A|=|A^t|$**.** En efecto, los productos y sus signos son los mismos en A que en A^t.

Cuando el determinante es de una matriz de orden 2 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \circ & \\ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \bullet \\ \bullet & \end{vmatrix}$$

Perm. Filas	Perm. Columnas		Signo
1 2	1 2	Misma clase	+
1 2	2 1	Distinta clase	−

Para un determinante de orden 3 resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Perm. Filas	Perm. Columnas		Signo	Inversiones
1 2 3	1 2 3	Misma clase	+	0
1 2 3	1 3 2	Distinta clase	−	1
1 2 3	2 1 3	Distinta clase	−	1
1 2 3	2 3 1	Misma clase	+	2
1 2 3	3 1 2	Misma clase	+	2
1 2 3	3 2 1	Distinta clase	−	1

La regla de Sarrus simplifica la obtención del determinante de orden 3.

con signo $+ \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$; con signo $- \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$

Para un determinante de orden 4, tendríamos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ sumandos, cada uno formado por el producto de 4 elementos. Sin embargo, veremos cómo determinadas propiedades de los determinantes nos permitirán simplificar enormemente su cálculo.

Ejemplo 1.34 *Calcular los siguientes determinantes:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 2 - 3 - 8 - 0 = -7$$

$$\begin{vmatrix} 2+i & 4-i \\ 6 & 5i \end{vmatrix} = (2+i)5i - 6(4-i) = 10i - 5 - 24 + 6i = 16i - 29$$

1.12 Matriz de cofactores y matriz adjunta

Sea la matriz $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, se define **menor complementario** del elemento a_{ij}, denotado m_{ij}, como el determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j.

Se denomina **cofactor** del elemento a_{ij}, y se denota A_{ij}, al producto de su menor complementario m_{ij} por el signo que resulta de calcular $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

Nótese que m_{ij} de A es igual a m_{ji} en A^t, pues eliminar las líneas (i,j) en A es igual a eliminar las líneas (j,i) en A^t. De igual modo A_{ij} en A es igual a A_{ji} en A^t, es decir, $A_{ij} = A^t_{ji}$.

Se llama **matriz de cofactores de** A a la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor A_{ij}. Esta matriz se denota como $\mathrm{cof}(A)$.

$$\mathrm{cof}(A) = \{A_{ij}\}$$

En Álgebra Lineal tiene especial interés la denominada **matriz adjunta de** A, que es la traspuesta de la matriz de cofactores.

$$\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{cof}(A))^t$$

Se prueba fácilmente que $(\mathrm{cof}(A))^t = \mathrm{cof}(A^t)$, por tanto la matriz adjunta se puede calcular como la traspuesta de la matriz de cofactores de la original, o como la matriz de cofactores de la traspuesta de la original.

$$\{\ \mathrm{adj}(A)\ \}_{ij} = \{\ (\mathrm{cof}(A))^t\ \}_{ij} = \{\ \mathrm{cof}(A)\ \}_{ji} = A_{ji} = A^t_{ij} = \{\ \mathrm{cof}(A^t)\ \}_{ij}.$$

1.13 Propiedades de los determinantes

1. El valor de un determinante no varía cuando cambiamos ordenadamente sus filas por sus columnas. $|A|=|A^t|$. (Ya se había enunciado en la primera sección del apartado de Determinantes).

2. Si se intercambian entre sí dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.

3. Un determinante con dos líneas paralelas iguales es nulo. (Consecuencia inmediata de la propiedad 2)).

4. Si todos los elementos de una línea tienen un factor común, el determinante puede obtenerse como el producto de ese factor común por el determinante que resulta de eliminar ese factor común en la correspondiente línea (dividiendo los elementos de esa línea por el factor común).

   por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. Si los elementos de una línea (fila ó columna) son nulos, el determinante es nulo. (Consecuencia inmediata de la propiedad 4), puesto que el escalar que sería factor común es el cero).

6. Si la matriz A tiene dos líneas paralelas proporcionales el determinante de A es nulo. Consecuencia de las propiedades 4 y 3, pués al sacar factor común quedarán dos líneas iguales.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{11} \\ a_{12} & \alpha a_{12} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

7. Si los elementos de una línea son la suma de r sumandos, el determinante se puede descomponer en suma de r determinantes que tienen las restantes líneas iguales y en el lugar de aquella, otra formada por los primeros, segundos, terceros, etc, sumandos.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & 5 & 0 \\ d+e+f & 1 & -1 \\ g+h+i & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5 & 0 \\ d & 1 & -1 \\ g & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ e & 1 & -1 \\ h & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 5 & 0 \\ f & 1 & -1 \\ i & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+a & 1 \\ a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Si los elementos de una línea son combinación lineal[3] de líneas paralelas, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{12}+\beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22}+\beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32}+\beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\ 0 + \beta\ 0 = 0$$

9. Si a los elementos de una línea se le suman los correspondientes a otra paralela multiplicados por un escalar, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| + \alpha\ 0 = |A|$$

Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes

[3] Considerando los elementos de una línea como un vector

10. La suma de los elementos de una línea multiplicados por sus respectivos cofactores es igual al valor del determinante.

    Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes

11. La suma de los elementos de una línea multiplicados por los cofactores de otra paralela es nula.

12. El determinante de las matrices triangulares y diagonales es el producto de los elementos de la diagonal principal. De esta propiedad se deduce de forma inmediata que el determinante de la matriz identidad es 1.

13. Dadas A_n, B_n

    (a) $|A\ B| = |A|\ |B|$

    (b) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

    (c) Si A es invertible su determinante es distinto de cero, y $\quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

    Generalización del apartado (a) (C cuadrada de orden n)

    $|A\ B\ C| = |(A\ B)\ C| = |(A\ B)|\ |C| = |A|\ |B|\ |C|$

    y lo mismo para más de tres factores

    Demostración del apartado (c)

    $AA^{-1} = I \quad$ y obteniendo los determinantes: $|AA^{-1}| = |I| = 1$

    por el apartado (a) $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$,

    por tanto $|A||A^{-1}| = 1$ y ello implica tres resultados:

    $$\begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A^{-1}| \neq 0 \\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{cases}$$

14. Q ortogonal $\Rightarrow |Q|$ es 1 o -1

    Recordamos que una matriz cuadrada Q se dice **ortogonal** si $QQ^t = Q^tQ = I$.

    Tomando determinantes y teniendo en cuenta que $|Q^t| = |Q|$, obtenemos

    $|Q||Q| = 1 \Rightarrow |Q| = 1$ o $|Q| = -1$

Aplicando las propiedades anteriormente expuestas podemos simplificar enormemente el cálculo de determinantes.

1.14 Cálculo del determinante por cofactores

El valor del determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) de A por sus respectivos cofactores (Propiedad 10 de la lista anterior). Es decir

elegida una fila i $\qquad |A| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

ó

elegida una columna j $\qquad |A| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

Este resultado es muy útil para simplificar el desarrollo de determinantes de orden superior a 3, al permitirnos reducir el cálculo del determinante de una matriz de orden n a básicamente el cálculo de n determinantes de orden $n-1$.

Ejemplo 1.35 *Calcula el siguiente determinante por cofactores de la primera columna.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 1\cdot A_{21} + (-1)\cdot A_{31} + 3\cdot A_{41} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \ldots$$

Hubiera sido más sencillo calcular este determinante por cofactores de la primera fila.

Ejemplo 1.36 *Calcula el valor del siguiente determinante.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos por ejemplo por cofactores de la 1^{a} *columna. Pero previamente realizaremos las operaciones (9) necesarias para hacer ceros todos los elementos de esta columna excepto el primero. La fila 1 es la fila auxiliar, utilizada para transformar los elementos de las filas 3 y 5.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \begin{matrix} F_{31(-1)} \\ F_{51(-1)} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+(-1) & 1+(-2) & 0+(-1) & 2+(-2) & 0+(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1+(-1) & 2+(-2) & 2+(-1) & 1+(-2) & 1+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los cofactores de la 1^{a} *columna:*

$$|A| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Y desarrollando el nuevo determinante de orden 4 por cofactores de la 1^{a} *columna.*

$$|A| = (-1)(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1+2-1+2) = 2$$

1.15 Determinante e inversa: cálculo de la inversa a partir de la adjunta

Consideremos el producto $A \cdot \text{adj}(A)$,

$$A\ \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Recordando que la suma del producto de los elementos de una línea de A por sus respectivos cofactores es el determinante de A, y que la suma del producto de los elementos de una línea por los cofactores de otra paralela es nulo, tenemos:

$$A\ \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| I$$

Si $|A| \neq 0$, podemos pasar $|A|$ al primer miembro, dividiendo, y obtenemos:

$$A \quad \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = I \tag{1.1}$$

Partiendo del producto de matrices $\text{adj}(A) \cdot A$, y con el mismo desarrollo, obtendríamos:

$$\frac{\text{adj}(A)}{|A|} \quad A = I \tag{1.2}$$

$$\text{De las ecuaciones (1.1) y (1.2) deducimos: } A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \tag{1.3}$$

<u>RESUMEN:</u> En la propiedad 13 se demostró que A invertible implica $|A| \neq 0$. De lo que se concluye que si $|A| = 0$ la matriz no es invertible.

En este apartado encontramos que si $|A| \neq 0$ existe inversa, dada por $A^{-1} = \text{adj}(A)/|A|$. Por tanto concluimos que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) A es invertible

b) A tiene determinante no nulo

En este apartado hemos mostrado además un segundo procedimiento de cálculo de la inversa de una matriz (el procedimiento de Gauss-Jordan se vio en una sección anterior).

Ejemplo 1.37 *Calcula la inversa de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ *a partir de su adjunta.*

La matriz cuyos elementos son los menores complemetarios m_{ij} *es la siguiente:*

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de cofactores tenemos que multiplicar los elementos m_{ij} *por el factor* $(-1)^{i+j}$*, o lo que es lo mismo, tenemos que cambiar de signo los elementos en los que la suma del índice de fila y el índice de columna sea impar.*

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Seguidamente se obtiene la transpuesta:

$$adj(A) = (cof(A))^t \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la inversa sólo queda dividir por el determinante.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Comprueba el resultado siempre que calcules una inversa, confirmando que $A^{-1}A = I$.

1.16 Relación entre los determinantes de matrices equivalentes

En esta sección analizamos cómo varía el determinante de una matriz al efectuar sobre ella operaciones elementales, recordando las siguientes propiedades de los determinantes:

- la permutación o intercambio de líneas cambia el signo del determinante
- reemplazar una línea por ella más un múltiplo de otra paralela no hace variar el determinante
- el escalamiento de una línea (recordemos que ha de ser con un factor no nulo) escala el determinante por el mismo factor

Por tanto, si $A \sim B$, $\boxed{|B| = |A| \times (-1)^s \times \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_p}$ siendo s el número de intercambios de líneas y α_i (todos distintos de 0) los factores de los escalamientos realizados al transformar A en B mediante operaciones elementales.

La expresión anterior nos está indicando:

$\boxed{\text{Si } A \sim B \text{ , } |A| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0}$

En una sección anterior ya vimos que si $A \sim B$, entonces A invertible $\Leftrightarrow$ B invertible. Cómo además dedujimos también que A invertible $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$, el resultado que acabamos de ver ya se podía haber afirmado antes.

Relación entre el determinante y la equivalencia a la identidadd

Analizamos ahora el caso en que partiendo de A_n realizamos operaciones elementales por filas hasta llegar a una forma escalonada que denotamos como U (la denominada eliminación gaussiana).

Por ser U cuadrada y escalonada es triangular superior y $|U|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Por tanto:

$|U| = u_{11} \times u_{22} \times \ldots \times u_{nn}$

Y de aquí deducimos:

- $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |U| \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \ u_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow$ el número de pivotes es $n \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

  Continuando con o.e. por filas hasta llegar a la forma escalonada reducida ésta sería I_n.

- $|A| = 0 \Leftrightarrow |U| = 0 \Leftrightarrow \exists \ u_{ii} = 0 \Leftrightarrow$ el número de pivotes es menor que n, , es decir, $\text{rg}A \ < \ n$.

  Continuando con o.e. por filas hasta llegar a la forma escalonada reducida, ésta no sería I_n, ya que el número de pivotes es menor que n.

1.17 Determinante, inversa, rango y equivalencia a la identidad

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertible $\Leftrightarrow \text{rg}A = n \Leftrightarrow A \sim I \Leftrightarrow A$ es producto de matrices elementales.

Ejemplo 1.38 *Determina si las siguientes matrices son regulares.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>*Sol:*</u>

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -2$ *El determinante es no nulo por tanto A es regular*

  También se podría haber razonado que A es regular ya que rg A = 3 (vemos que en la EG quedan 3 pivotes)

  Por tener tres columnas pivotales A es equivalente por filas a I_3 (sólo hace falta escalar las filas para hacer "unos" los pivotes y realizar la eliminación de Gauss-Jordan), lo cual indicaría también que la matriz es regular.

- $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ *B no es regular ya que su determinante es nulo.*

  Del resultado rg B=2 (en la EG quedan 2 pivotes) también se podría haber concluido que B no es regular.

  Nótese, aunque no se haya pedido esta respuesta, que B no es equivalente a I_3

Ejemplo 1.39 *Determina el valor de c para que la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *sea invertible, analizando su equivalencia a la matriz identidad.*

<u>*Sol:*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21(-2)} \\ F_{31(-2)}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & c-4 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{32(c-4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} = A_{esc}$$

Nótese que la operación $F_{32(c-4)}$ *puede realizarse cualquiera que sea el valor de c.*

- *Si* $c = 4$ *obtenemos la forma escalonada por filas* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *que no puede transformarse mediante operaciones elementales por filas en* I_3*, ya que sólo disponemos de dos pivotes.*

- *Si* $c \neq 4$ *podemos seguir operando a partir de* A_{esc} *hasta llegar a la identidad.*

$$A_{esc} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} \underset{F_{3\left(\frac{1}{-2(c-4)}\right)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que la operación $F_{3\left(\frac{1}{-2(c-4)}\right)}$ *puede realizarse por ser* $c \neq 4$.

En la forma escalonada vemos que la matriz tiene 3 pivotes, por tanto la matriz es equivalente a la identidad e invertible.

Resultado: *La matriz es invertible si y sólo si* $c \neq 4$

A modo de repaso realizaremos las transformaciones de Gauss-Jordan para llegar a I_3*:*

$$\underset{\substack{F_{23(2)} \\ F_{13(-1)}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{12(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{2(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

1.18 Rango como el orden del mayor menor no nulo

Dada una matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, se define **menor de orden** p de A, con $p \leq m$ y $p \leq n$, al determinante de la submatriz cuadrada de orden p cuyos elementos están situados en la intersección de p de las filas, $i_1, \dots, i_p$, y p de las columnas, $j_1, \dots, j_p$, de A. La elección de distintos conjuntos de filas y de columnas, siempre en el orden natural, dará lugar a los distintos menores. Nótese que el menor no es la submatriz, sino el determinante de esa submatriz.

Por ejemplo, considerada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, veamos algunos de sus menores:

El menor de orden 2 que toma las filas 1,2 y las columnas 1,4, es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

El menor de orden 2 que toma las filas 1,3 y las columnas 2,4, es: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$.

El número de menores de orden 2 en esta matriz es 18, ya que existen 3 elecciones para el par de filas (1,2 ; 1,3 ; 2,3) y 6 para el par de columnas (1,2 ; 1,3; 1,4 ; 2,3 ; 2,4 ; 3,4).

El número de menores de orden 3 en esta matriz es 3, ya que existen 4 elecciones para la terna de columnas (1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 ; 2,3,4).

Teorema 1.1 *Sea $A_{m\times n}$ una matriz, entonces rgA es igual al orden del mayor menor no nulo de A.*

Por ejemplo, si una matriz $A_{5\times 8}$ tiene rango 3, entonces existe al menos un menor de orden 3 que no es nulo, y todos los menores de orden superior (los de orden 4 y los de orden 5 en este ejemplo) son nulos.

<u>Búsqueda del rango sirviéndose de los menores</u>

Básicamente extraído de J. de Burgos "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana". 1999. Segunda edición. McGraw Hill. Página 96.

Para hallar el rango de A, se toma un menor M_2 de orden 2 no nulo y se le orla con una fila fija, la i, y con sucesivas columnas; si todos los menores de orden 3 que asï¿½ se obtienen son nulos, entonces se prescinde de la fila i, y se repite el proceso con otra o con otras filas hasta: 1) encontrar un menor M_3 de orden 3 no nulo, en cuyo caso el rango es al menos 3; ó 2) descubrir que todos los menores de orden 3 son nulos, en cuyo caso el rango es 2. Si hay un menor M_3 no nulo, se le orla con una fila y con sucesivas columnas, siguiendo el mismo proceso que con M_2, lo que nos lleva o bien a que el rango es 3 (si todos los menores de orden 4 son nulos) o bien a que el rango es al menos 4 (en cuanto se encuentre un menor de orden 4 no nulo). Siguiendo así , se llega a un menor no nulo del mayor tamaño posible; este tamaño es el rango.

1.19 Repaso sobre vectores de $\mathbb{R}^n$

1.19.1 Definición

Denotamos el conjunto de las matrices columna reales de n componentes, $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}^n$. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan vectores y en general se denotan con una letra minúscula latina con una flecha encima: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan primera, segunda, ..., enésima **componente** de $\vec{x}$. También se admite la notación $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los elementos x_i se designan también como **entradas** del vector $\vec{x}$.

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ / \ x_1 \in \mathbb{R}, \ \ x_2 \in \mathbb{R}\}.$

$\vec{x}, \vec{x'} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{x'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ con $x'_1, x'_2 \in \mathbb{R}$

Suma: $\vec{x} + \vec{x'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Producto por un escalar: $\lambda\vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ también se puede expresar así : $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \ / \ x_1 \in \mathbb{R}, \ \ x_2 \in \mathbb{R}\}$.
Suma: $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$
Multiplicación por un escalar: $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

El elemento neutro, también llamado vector nulo de $\mathbb{R}^2$, es el vector (0,0).
El opuesto de un vector dado $\vec{x} = (x_1, x_2)$ es el vector $-\vec{x} = (-x_1, -x_2)$.

Descripción geométrica de $\mathbb{R}^2$

Considerando el sistema de referencia cartesiano bidimensional con ejes perpendiculares X e Y que se cortan en $(0, 0)$, puesto que cada punto del plano está determinado por un par ordenado de números o coordenadas, *podemos identificar el vector* $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *con el punto geométrico* $P = (x_1, x_2)$.

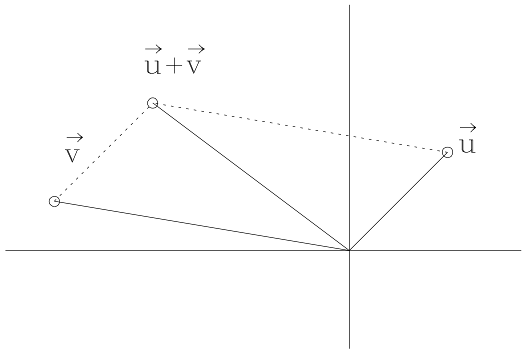
Esta relación biunívoca entre vectores y puntos permite identificar el plano XY con $\mathbb{R}^2$.

Análogamente se tiene la representación del vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ como el segmento orientado con origen en $(0, 0)$ y extremo en (x_1, x_2).

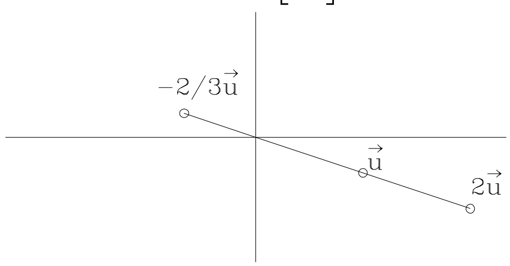
La suma de dos vectores tiene una representación geométrica interesante, verificándose el resultado conocido como REGLA DEL PARALELOGRAMO: $\vec{u} + \vec{v}$ corresponde al cuarto vértice (opuesto a $\vec{0}$) del paralelogramo cuyos otros vértices vienen dados por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{0}$.

La suma de vectores se puede interpretar como suma de "desplazamientos": para sumar $\vec{v}$ al vector $\vec{u}$, se sitúa el origen de $\vec{v}$ en el extremo de $\vec{u}$, trasladándolo paralelamente, y el vector suma tiene origen en $\vec{0}$ y extremo en el del vector $\vec{v}$ trasladado.

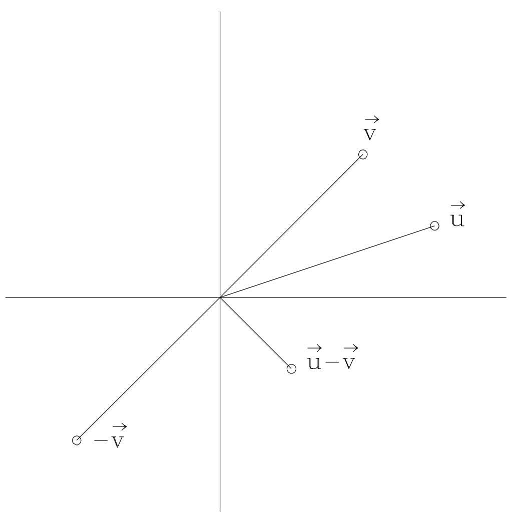
Ejemplo 1.40 *Representar en un plano* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$



Ejemplo 1.41 *Sea* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. *Representa graficamente los vectores* $\vec{u}$, $2\vec{u}$, *y* $-\frac{2}{3}\vec{u}$.



Para simplificar la notación, también utilizamos la resta de vectores, y escribimos $\vec{u} - \vec{v}$ en lugar de $\vec{u} + -\vec{v}$. La figura muestra $\vec{u} - \vec{v}$ como suma de $\vec{u}$ y $-\vec{v}$.



$\mathbb{R}^3$

Un vector de $\mathbb{R}^3$ es una matriz columna 3×1 con tres entradas reales. En el sistema de referencia cartesiano tridimensional con ejes perpendiculares X, Y, Z, que se cortan en $(0, 0, 0)$, el vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ representa geométricamente el punto $P = (x_1, x_2, x_3)$. Asimismo se utiliza la representación como un segmento orientado con origen en $(0, 0, 0)$ y extremo en $P = (x_1, x_2, x_3)$.

La relación biunívoca entre vectores y puntos, una vez definido el origen, permite identificar el espacio tridimensional XYZ con $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.42 *Sean* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. *Calcula* $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

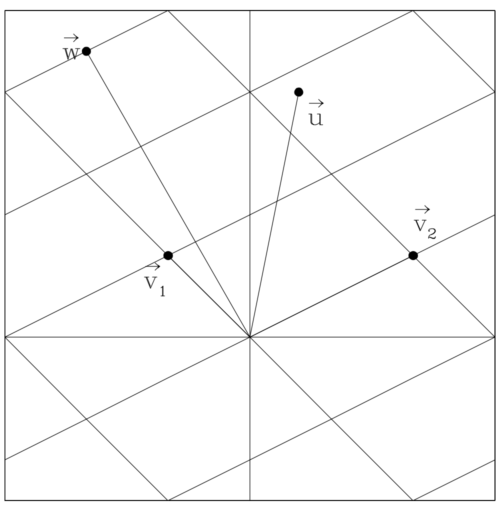
1.19.2 Combinación lineal

Definición 1.1 *Dado un conjunto de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, llamamos combinación lineal de estos vectores a cualquier vector* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *que se pueda escribir en la forma* $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p$*, con* $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$*.*
A los escalares $c_1, c_2, \ldots c_p$ *se les llama* *pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden ser cualquier real, incluyendo el cero.*

Son por ejemplo combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ los siguientes vectores:

$\sqrt{3}\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\frac{1}{2}\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$, $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$

Ejemplo 1.43 *En la figura se muestran combinaciones lineales seleccionadas de los vectores* $\vec{v}_1 = (-1, 1)$ *y* $\vec{v}_2 = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$*. Estima las combinaciones lineales de los vectores* $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$ *que generan a los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{w}$*.*



$\vec{u} \simeq 1.8\vec{v}_1 + 1.2\vec{v}_2$
$\vec{w} \simeq 3\vec{v}_1 + 0.5\vec{v}_2$

1.19.3 Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es **linealmente dependiente** (también llamado "ligado") si existen unos escalares $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, no todos nulos, tales que

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

Un conjunto es **linealmente independiente** (también llamado "libre") si y sólo si no es linealmente dependiente. Expresado de otra forma, un conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial

$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}$ implica necesariamente que $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$.

Un conjunto de vectores linealmente dependiente se caracteriza porque alguno de sus vectores ha de poder expresarse como combinación lineal del resto, lo cual no puede suceder en un conjunto linealmente independiente.

1.20 Ejercicios

Operaciones sencillas con matrices

Ejercicio 1.1 *Obtén AB siendo A y B las siguientes matrices en el cuerpo $\mathbb{R}$*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.2 *Obtén AC y B^2+B, siendo A,B y C las siguientes matrices en el cuerpo $\mathbb{R}$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.3 *Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:*

Punto	*Masa*
$\vec{x_1} = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2g$
$\vec{x_2} = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5g$
$\vec{x_3} = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2g$
$\vec{x_4} = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1g$

- *Calcula el centro de gravedad $\vec{x}$ del sistema, sabiendo que:*

$$\vec{x} = \frac{m_1\vec{x_1} + \ldots + m_k\vec{x_k}}{m_1 + \ldots + m_k}$$

- *Calcula el centro geométrico del sistema.*

Traspuestas, simétricas, antisimétricas

Ejercicio 1.4 *Dadas las matrices en $\mathbb{R}$,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Determina AB, AC, CA (si no existe alguno de estos productos indíquelo explícitamente)
b) las traspuestas de estos productos

Ejercicio 1.5 *Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$.*
a) Calcula $A^2 - 3AA^t + (A^t)^2$
b) Calcula $A^2 - 3A^tA + (A^t)^2$

Ejercicio 1.6 *Si P es una matriz antisimétrica, que se puede decir de P^2.*

Potencias

Ejercicio 1.7 *Calcula las tres primeras potencias de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, y la expresión general de A^k*

<u>Ejercicios con matrices que requieren resolver sist. ecs. lineales</u>

Ejercicio 1.8 *Dada la matriz A en $\mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, comprobar que se puede verificar una relación de la forma $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, con λ, $\mu \in \mathbb{R}$*

Ejercicio 1.9 *Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$, calcula, <u>en función de λ</u>, las matrices B de orden 2 tales que AB=0 15-16 Primer Parcial G.I. Química*

Ejercicio 1.10 *Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$, hallar todas las matrices permutables con ella.*

Ejercicio 1.11 *Descomponer la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*

Ejercicio 1.12 *Sean las matrices cuadradas de orden 2, simétricas y en $\mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$. Determina los posibles valores de a, b y c para que AB sea simétrica.*

<u>Determinantes</u>

Ejercicio 1.13 *Calcula el siguiente determinante, desarrollándolo por cofactores de la tercera fila.*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.14 *Demuestra que*

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Ejercicio 1.15 *Demuestra que,*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{, sin efectuar el desarrollo correspondiente.}$$

Ejercicio 1.16 *Halla el valor de los siguientes determinantes de orden n*

$$a) \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} \quad , \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda \end{vmatrix} \quad , \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.17 *Calcula el valor de los siguientes determinantes*

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

Inversas

Ejercicio 1.18 *Sabiendo que $B = A/3$, siendo B regular, obtén la inversa de B en función de la inversa de A.*

Ejercicio 1.19 *Obtén la inversa de la matriz A, a partir de su adjunta.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.20 *Determina si la matriz A es invertible, en función de los valores de a y b. (Pista: utiliza el determinante, si $\det = 0$ no invertible, si $\det \neq 0$ invertible).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & b \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrices equivalentes por filas: Inversas por Gauss-Jordan, formas escalonada y reducida por filas, rango

Ejercicio 1.21 *Obtén la forma escalonada reducida por filas de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

16-17 Final Junio G.I. Mecánica

Ejercicio 1.22 *Calcula, si existen, las inversas de las siguientes matrices, aplicando el método de Gauss-Jordan.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$ *16-17 Primer Parcial G.I. Mecánica*

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.23 *Calcula el rango de las siguientes matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 11 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.24 *Dada las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, *determina para cada una de ellas:*

a) Una forma escalonada por filas

b) La forma reducida por filas

c) El rango

d) El determinante

e) La inversa si existe

Ejercicio 1.25 *Determina el rango de la matriz A en función del parámetro a.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.26 *Determina el rango de las siguientes matrices, en función del parámetro que contienen:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & s \\ 1 & 2 & s \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ *15-16 Primer Parcial G.I. Mecánica Modelo 1*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 1 & 3 & c & 0 & -3 \\ 0 & 1 & c & 2 & c \\ 0 & -1 & -1 & c & c \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$$ *15-16 Primer Parcial G.I. Mecánica Modelo 2; 15-16 Septiembre G.I. Química*

<u>**Matrices equivalentes en general**</u>

Ejercicio 1.27 *Para cada par de matrices de los conjuntos dados, escribe verdadero o falso:*

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\begin{cases} A \sim B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_f B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_c B & \ldots\ldots.. \end{cases}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\begin{cases} A \sim B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_f B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_c B & \ldots\ldots.. \end{cases}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} A \sim B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_f B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_c B & \ldots\ldots.. \end{cases}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

  $\begin{cases} A \sim B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_f B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_c B & \ldots\ldots.. \end{cases}$ $\begin{cases} A \sim C & \ldots\ldots.. \\ A \sim_f C & \ldots\ldots.. \\ A \sim_c C & \ldots\ldots.. \end{cases}$ $\begin{cases} B \sim C & \ldots\ldots.. \\ B \sim_f C & \ldots\ldots.. \\ B \sim_c C & \ldots\ldots.. \end{cases}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} A \sim B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_f B & \ldots\ldots.. \\ A \sim_c B & \ldots\ldots.. \end{cases}$

<u>Varios</u>

Ejercicio 1.28 *Dada* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$*, señala cual de las expresiones siguientes corresponde a la forma general de la matriz* $(A^k)^{-1}$*,* $k \geq 1$*:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{1-k} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$

15-16 Primer Parcial G.I. Mecánica

Ejercicio 1.29 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & k^2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$, *siendo* α*,* $k \in \mathbb{R}$*. Calcula, en función de* α *y* k*, los valores de* λ *tales que* $|A| = 0$*. También puede resolverse fácilmente con Matlab utilizando cálculo simbólico.*

Ejercicio 1.30 *Halla todas las matrices* A *de tamaño* 2×2 *tales que* $A^t \neq A$ *y* $(A^t)^2 = A^2$*. También puede resolverse fácilmente con Matlab utilizando cálculo simbólico.*

Ejercicio 1.31 *Halla todas las posibles matrices de orden 2 que son a la vez simétricas e idempotentes.*

Ejercicios con Matlab

Ejercicio 1.32 *Considerada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Sustituye el término $(2,3)$ *por un* -3*, y el término* $(1,2)$ *por un* 7*, denotando a la matriz resultante como* B*. Muestra* B *por pantalla.*

b) Extrae en un vector denotado $\vec{f_1}$ *la primera fila de* B*, y en otro vector* $\vec{c}_2$ *la segunda columna de* B*.*

c) Extrae en una matriz F *las filas de la 1 a la 3 de* B*, y en otra matriz* C *las columnas 2 y 4.*

d) Añade la matriz identidad 4×4*,* I_4*, a la derecha de* B *y denomina a la matriz resultante* $D1$*. Análogamente, añade* I_4 *debajo de* B *y denomina* $D2$ *a la matriz resultante.*

e) Crea un vector cuyos elementos sean los términos de la diagonal principal de B*. Muestra ese vector por pantalla.*

f) Calcula la traza de B*, el determinante de* B*, la forma escalonada reducida de* B*, el rango de* B *y la inversa de* B*, si existe. Si existe la inversa comprueba que* $B^{-1}B = I$

Ejercicio 1.33 *Crea las siguientes matrices: a) Matriz* 4×4 *con todos sus términos cero*

b) Matriz 3×5 *con todos sus términos iguales a 9*

c) Matriz diagonal 8×8 *cuya diagonal principal contiene los números naturales de 1 a 8. Muestra esta matriz por pantalla.*

Ejercicio 1.34 *Sean las matrices* $A = \begin{bmatrix} 7.2 & -6 & -2 \\ -6 & 7 & 3 \\ 5 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$

Determina la matriz X *tal que* $AX = B$

Ejercicio 1.35 *Dadas las matrices* $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$*, y sabiendo que* $D = A * B * C = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 17 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$*, calcule la matriz* C*. Si no existe, indíquelo explícitamente. 15-16 Primer Parcial G.I. Mecánica Matlab*

Ejercicio 1.36 *Halla la matriz* A *sabiendo que la inversa de* B *es* $\begin{bmatrix} 10 & -2.2 & 2 \\ 4.5 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ *y que la inversa de* AB *es* $\begin{bmatrix} 10 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 2.5 & 4 & 0.5 \end{bmatrix}$ *15-16 Septiembre G.I. Mecánica Matlab*

Ejercicio 1.37 *Dada la matriz* $B = \begin{bmatrix} 1.1 & 2.5 & -1.8 \\ -1.1 & 1.3 & 2.6 \end{bmatrix}$*, calcula:*

a) $R = BB^tB$ *b) El producto de* R *por el vector* $v = (3.5, -7/19, 8)$

Ejercicio 1.38 *Considera la matriz* $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Comprueba que las matrices $A = CC^t$ *y* $B = C^tC$ *son ambas simétricas.*

Ejercicio 1.39 *Dadas las siguientes matrices A y B, justifica si existe algún valor de m para el cual sean equivalentes por filas, y en caso afirmativo da ese valor de m.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -6 & 4 & -m \\ 3 & 11 & 1-2m & 9 \end{bmatrix}$$

- *El valor de m es:*

  Escribe "todo m" o "ningún valor de m" si se diera alguno de estos casos.

- *Describe el razonamiento empleado y las instrucciones utilizadas.*
  15-16 Primer Parcial G.I. Química Matlab

  16-17. Primer Parcial G.I. Mecánica Matlab para estas matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 29/5 \\ 2 & 5 & 41 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -18 \\ -1 & -6 & k \\ 3 & 11 & -68 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.40 *Dadas las matrices:* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 & 3 \\ 4 & 5.2 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{bmatrix}$ *,* $B = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 1 \\ 5.2 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$ *y* $C = \frac{1}{3}\ A$, *calcula los determinantes* $|A|$, $|B|$ *y* $|C|$.

- *Escribe la ecuación que relaciona* $|A|$ *y* $|B|$ *y justifica el resultado.*

Ecuación:

Justificación:

- *Escribe la ecuación que relaciona* $|A|$ *y* $|C|$ *y justifica el resultado.*

Ecuación:

Justificación:

Ejercicio 1.41 *Considerada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a \end{bmatrix}$*, determina si es o no inversible, en función del parámetro* a.

OBSERVACIÓN: Para trabajar con matrices que incluyan variables simbólicas se puede hacer uso de la función **det()***, si éstas son cuadradas, pero no de las funciones* **rank()** *ni* **rref()***. Puedes comprobar con la matriz A como los resultados derivados de usar det() son correctos, mientras que los obtenidos con rref() o rank() no lo son.*

Ejercicio 1.42 *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ *y siendo* B *su matriz escalonada reducida por filas, obtener una posible matriz invertible* P *tal que* $PA = B$.

Ejercicio 1.43 *Dada la matriz* $$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

señala cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas (escribiendo "V" o "F" sobre la línea discontinua) y justifica las respuestas.

a) A es involutiva .... *b) A es idempotente* ....

c) A es periódica de período menor o igual que 4 .... *d) A es ortogonal* ....

Justificaciones:

a) ....

b) ....

c) ....

d) ....

16-17 Primer Parcial G.I. Mecánica Matlab.
16-17 Junio G.I. Química Matlab.

Ejercicio 1.44 *Dada la matriz* $$B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

señala cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas (escribiendo "V" o "F" sobre la línea discontinua) y justifica las respuestas.

a) B es involutiva .... *b) B es equivalente a la identidad* ....

c) B es periódica de período menor o igual que 4 .... *d) B es ortogonal* ....

Justificaciones:

a) ....

b) ....

c) ....

d) ....

16-17 Primer Parcial G.I. Mecánica Matlab