

Capítulo 13

Aplicaciones lineales: Parte 4

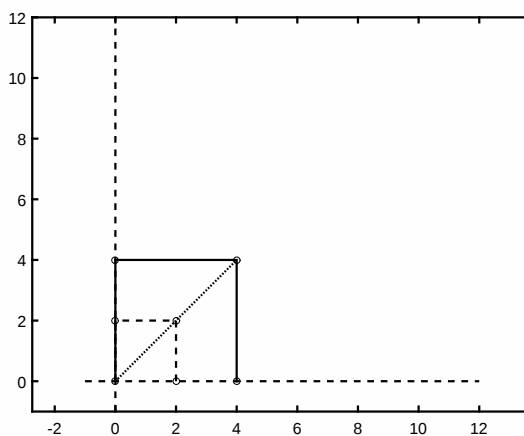
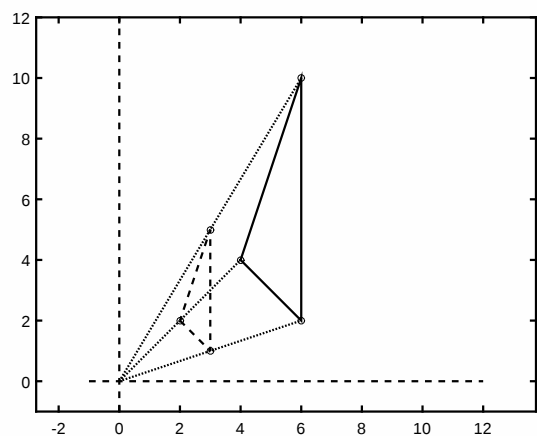
13.1 Ejemplos de endomorfismos con interpretación geométrica sencilla

13.1.1 En $\mathbb{R}^n$ escalamiento uniforme o isótropo

$f(\vec{x}) = k\vec{x}$ con $k > 0 \in \mathbb{R}$ La matriz asociada es la matriz escalar $A = kI$

Habíamos visto que para k positivo menor que 1 la transformación también se denomina compresión o contracción, y para k positivo mayor que 1, dilatación o expansión.

Para $k = 1$ la transformación es la identidad, y la matriz asociada la identidad, para cualquier base.



Izquierda: Escalamiento en $\mathbb{R}^2$ de factor 2. El triángulo en línea discontinua es la figura original. El triángulo se define por los tres vértices. Transformando los tres vértices con el escalamiento se obtiene el triángulo transformado, en trazo continuo.

Derecha: Se presenta el mismo escalamiento en $\mathbb{R}^2$, aplicado a la transformación de un cuadrado.

13.1.2 En $\mathbb{R}^n$ escalamiento no uniforme o anisótropo

Similar al anterior, salvo que k no tiene porque ser igual en las n direcciones independientes.

La matriz asociada respecto de una base sobre esas n direcciones independientes es una matriz diagonal. Los elementos de la diagonal son los factores de escala en cada dirección.

Ejemplo: contracción/dilatación unidireccional vertical en $\mathbb{R}^2$

Vertical (eje Y)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

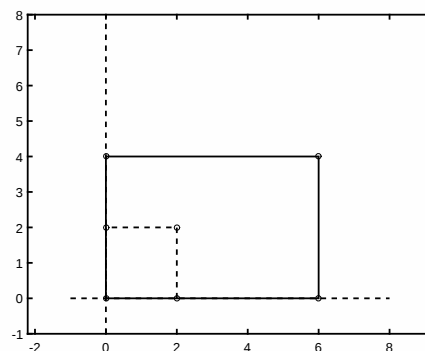
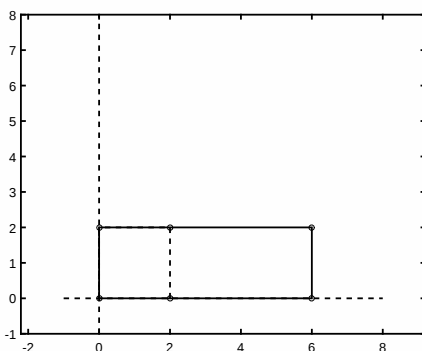
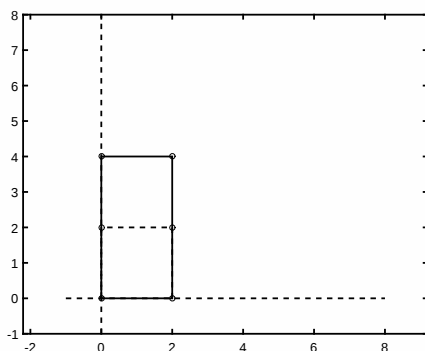
Ejemplo: contracción/dilatación unidireccional horizontal en $\mathbb{R}^2$

Horizontal (eje X)
$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

Ejemplo: distintos escalamientos en la dirección horizontal y vertical en $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ k'y \end{bmatrix}$$

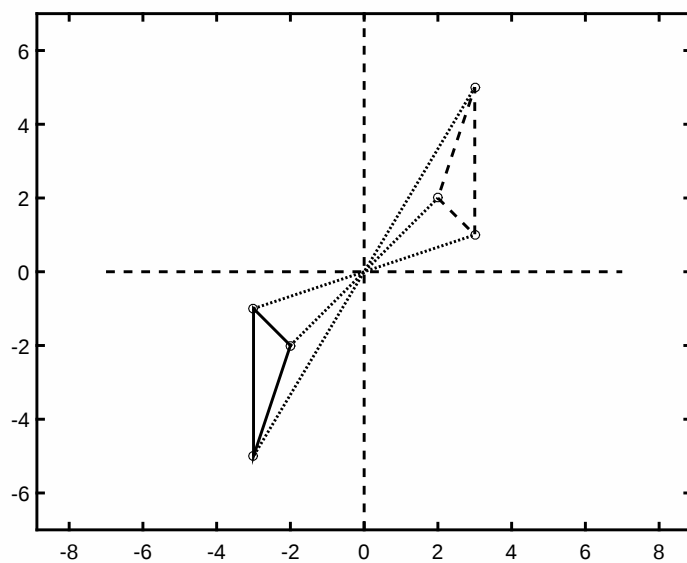
Se muestran gráficos correspondientes a 1) Una expansión vertical, 2) Una compresión horizontal y 3) Una expansión con escalaas distintas en las direcciones vertical y horizontal.



13.1.3 En $\mathbb{R}^n$ simetría respecto del origen

$$f(\vec{x}) = -\vec{x}$$

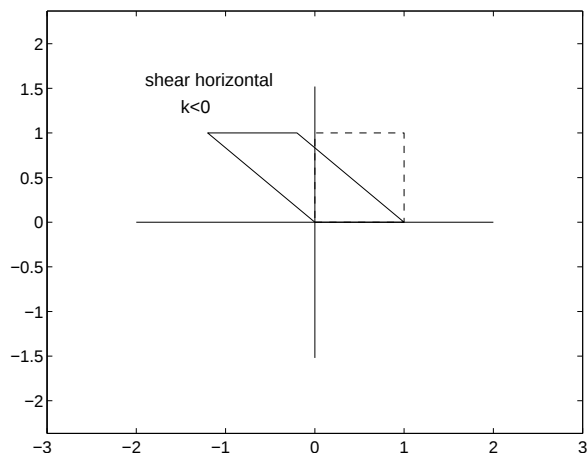
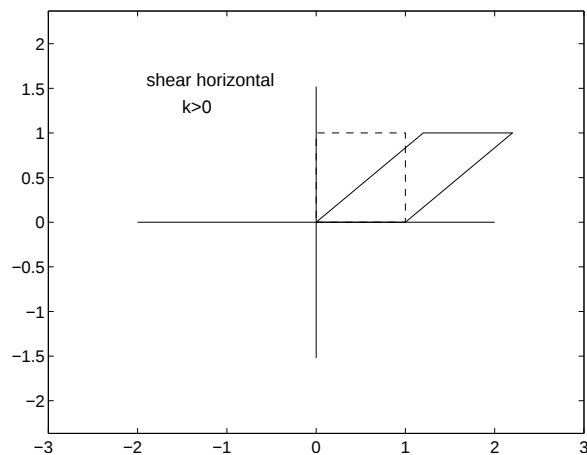
La matriz asociada relativa a cualquier base es la opuesta a la identidad. $A = -I$.



13.1.4 Cizalladura (“shear”) en $\mathbb{R}^2$

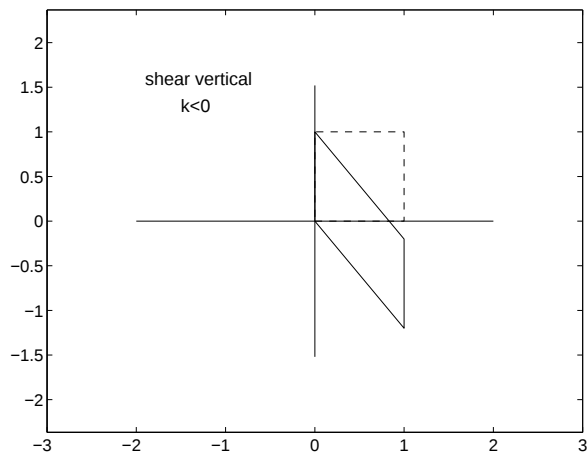
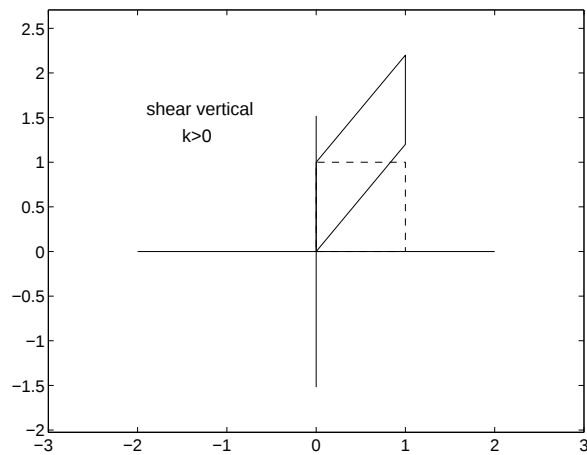
Todas las líneas paralelas a una línea fija se trasladan paralelamente a la línea fija en una cantidad proporcional a la distancia entre la línea y la línea fija.

“shear” horizontal $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $k \neq 0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$



“shear” vertical $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ con $k \neq 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$



13.1.5 Giro (o rotación) en $\mathbb{R}^2$ de centro en el origen y ángulo α

La matriz de este endomorfismo respecto de la base canónica es:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \cos\alpha \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) &= -\operatorname{sen}\alpha \vec{e}_1 + \cos\alpha \vec{e}_2 \end{aligned}$$

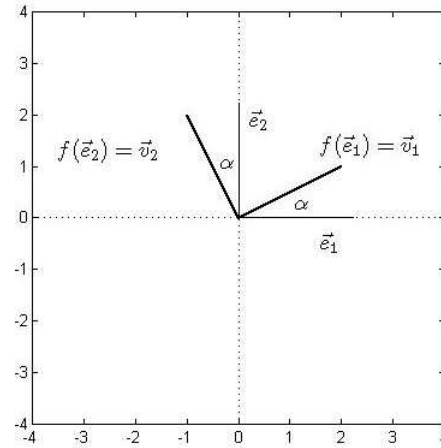
Es un **giro de centro** $(0, 0)$

y **ángulo** α : $-\pi < \alpha \leq \pi$

$0 \leq \alpha \leq \pi$ en el sentido antihorario
o positivo

$-\pi < \alpha < 0$ en el sentido horario
o negativo

- $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$
- $R_\alpha^{-1} = R_\alpha^t$ (es matriz ortogonal)



Ejemplo 13.1. Giro en el plano, respecto del punto $(0, 0)$, del cuadrado de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ y $(0, 1)$, un ángulo $\pi/3$ (60 grados) en el sentido horario.

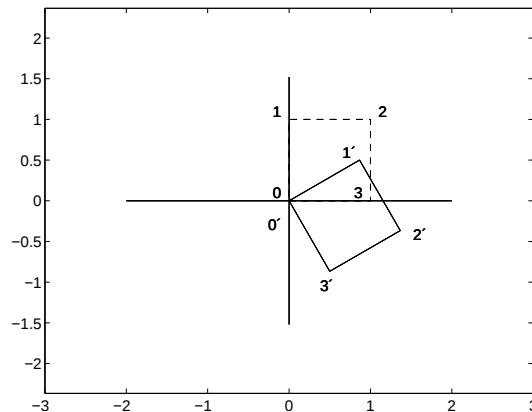
Matriz estándar asociada: $R = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\operatorname{sen}(-\pi/3) \\ \operatorname{sen}(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \operatorname{sen}(\pi/3) \\ -\operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}$

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{3})/2 \\ (1 - \sqrt{3})/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

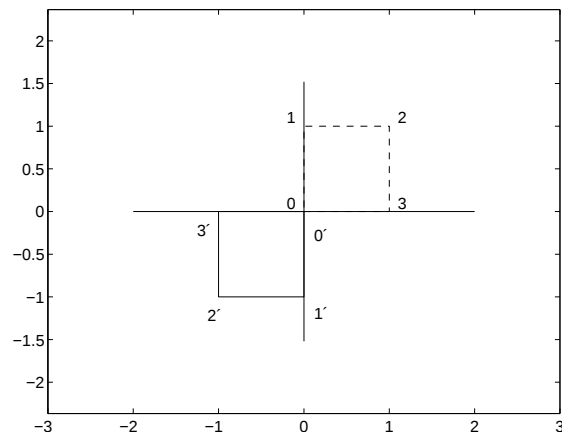


Ejemplo 13.2. El giro en el plano de $\alpha = 180$ grados corresponde a la simetría respecto del origen en el plano.

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

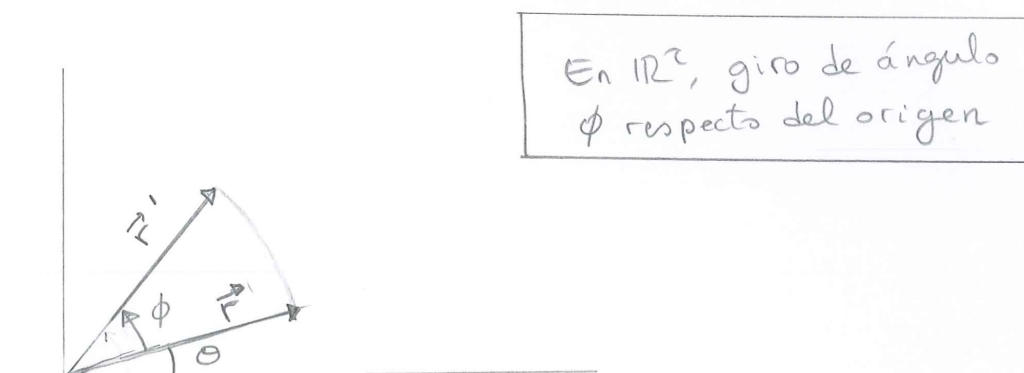
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

$R = -I$ en cualquier base



Ejemplo 13.3. El giro en el plano de $\alpha = 0$ grados es la matriz identidad.

Otra deducción de la matriz de rotación o de giro:



En $\mathbb{R}^2$, giro de ángulo ϕ respecto del origen

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} r' \cos(\theta + \phi) \\ r' \sin(\theta + \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta + \phi) \\ r \sin(\theta + \phi) \end{bmatrix} =$$

$r' = r$

$$\begin{bmatrix} r (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) \\ r (\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \phi - y \sin \phi \\ y \cos \phi + x \sin \phi \end{bmatrix}$$

↑
sustituyendo $r \cos \theta = x$
 $r \sin \theta = y$

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} x \cos \phi - y \sin \phi \\ x \sin \phi + y \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{R_\phi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

R_ϕ Matriz de giro de
ángulo ϕ en sentido
antihorario.

13.1.6 Proyección ortogonal y simetría ortogonal sobre/respecto a hiperplano en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - 1$. Los hiperplanos vienen dados por una única ecuación implícita.

- En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

- En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen

Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

Nótense las siguientes propiedades de las matrices Pr y S :

$PrPr = Pr$, es decir, Pr es idempotente.

$SS = I$, es decir, S es involutiva.

13.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 13.1. Determina si las aplicaciones $f(x) = 5x$ y $g(x) = 5x + 3$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, son o no aplicaciones lineales.

Ejercicio 13.2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$. Halla el núcleo de la aplicación lineal.

Ejercicio 13.3. Considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2) = (3x_1, 3x_1 + x_2)$. Comprueba que es una aplicación lineal y halla el núcleo.

Ejercicio 13.4. Demuestra que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2)$ es inyectiva y no suprayectiva.

Ejercicio 13.5. Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}_0$, siendo $\vec{v}_0$ un vector constante, no es una aplicación lineal. Esta transformación es una traslación.

Ejercicio 13.6. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (2, 1)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (0, 1)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (1, 1)$$

Halla una base de la imagen de $\mathbb{R}^3$ para esta aplicación lineal, las ecuaciones de la aplicación lineal y el núcleo.

Ejercicio 13.7. Manualmente y con Matlab. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, -1)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (1, -1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (1, -3, 3)$$

Halla una base del núcleo de f (si no es el subespacio cero) y una base de la imagen de f .

Determina si f es inyectiva o no y si es sobreyectiva o no.

Ejercicio 13.8. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, 0)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (0, 1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (1, 1, 1)$$

Demuestra que f es inyectiva y suprayectiva.

Ejercicio 13.9. Considera la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases canónicas

es $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Determina una base de $\text{Im} f$.

Ejercicio 13.10. Manualmente y con Matlab. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, 1)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (2, 0, -3)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 4)$$

a) Halla la matriz correspondiente a la aplicación lineal, indicando las bases a las que está referida

b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2, -3, 5)$

c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, -5, 4)$

Ejercicio 13.11. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$. Determina una base de $\text{Ker} f$ en función del parámetro c .

Ejercicio 13.12. Construye, si es posible, una aplicación lineal con las condiciones pedidas en cada uno de los casos siguientes, dando su matriz asociada:

- a) una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$
- b) una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$
- c) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$ cuyo rango sea 5
- d) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim \text{Ker} f = 3$

Ejercicio 13.13. Manualmente y con Matlab. Considera las siguientes aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - y, 3x, 2y) & \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ g(x, y) &= (x, x + y, x - y, y) & \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^4 \\ h(x, y, z, t) &= (x - t, x + y + z, y - z) & \mathbb{R}^4 &\mapsto \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Demuestra que $f = h \circ g$

Ejercicio 13.14. Sea f la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1, 1) &= (1, 1, 1) \\ f(1, 1, 1, -1) &= (1, 1, -1) \\ f(1, 1, -1, -1) &= (1, -1, -1) \\ f(1, -1, -1, -1) &= (-1, -1, -1) \end{aligned}$$

Determina la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases canónicas.

Ejercicio 13.15. Manualmente y con Matlab. Sea B la base de $\mathbb{R}^3$ dada por los vectores $\{(1, 0, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 2)\}$. Se considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, definido por:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (4, -2, 1) \\ f(2, 1, 1) &= (11, 2, -1) \\ f(0, 1, 2) &= (1, 2, -1) \end{aligned}$$

donde todos los vectores están expresados en la base canónica.

- a) Halla la matriz M del endomorfismo respecto de la base B en el espacio inicial y de la base canónica en el espacio final.
- b) Halla la matriz A de f respecto de las bases canónicas en el espacio inicial y final.
- c) Halla las dimensiones de $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$, y utiliza lo obtenido para justificar que f no es biyectiva.
- d) Calcula una base de $\text{Ker} f$ y una base de $\text{Im} f$.

Ejercicio 13.16. Sea $L = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la aplicación lineal L de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Determina la matriz asociada a L respecto:

- a) Las bases $S = \{(1, -1), (0, 1)\}$ y $T = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1)\}$
- b) La base canónica en $\mathbb{R}^2$ y la base T en $\mathbb{R}^3$
- c) La base S en $\mathbb{R}^2$ y la base canónica en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 13.17. Obtén una matriz F semejante a la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (que no sea la propia matriz A). Suponiendo que A representa una transformación lineal referida a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, la matriz F corresponderá a la misma transformación lineal respecto a otra base B (la misma en espacio inicial y final). Determina esa base B .

Ejercicio 13.18. Manualmente y con Matlab. Determina la ecuación de la recta cuyos puntos permanecen fijos en la transformación lineal

$$g(x, y) = \left(\frac{3x + y}{2}, \frac{y - x}{2} \right)$$

¿Cual es la matriz asociada a esta aplicación lineal, respecto de la base canónica?

Ejercicio 13.19. Manualmente y con Matlab. Calcula (expresión en forma implícita o proporcionando una base) la imagen del subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $z = 2y$,

mediante la transformación lineal $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 13.20. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1 + x_2, x_1 + ax_3, x_2 + x_4)$$

Se pide:

- a) Valores de a para los cuales f es inyectiva
- b) Valores de a para los cuales f es sobreyectiva
- c) Base del núcleo de f en función de a , y para el caso particular $a = 2$
- d) Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Calcular las ecuaciones implícitas de $f(V)$ para $a = 0$.

16-17 Par2 GIM sin Matlab: apartados a y b, en el apartado d se pide una base de $f(W)$ siendo $W = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$

Ejercicio 13.21. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la transformación lineal correspondiente al escalamiento de factores $k = 2$ y $k' = 5$ en las direcciones $(1, 3)$ y $(2, 1)$. Determina la matriz estándar asociada.

Ejercicio 13.22. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano XY . Determina la matriz asociada respecto de la base canónica.

Ejercicio 13.23. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano XY . Determina la matriz asociada respecto de la base canónica.

Ejercicio 13.24. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$. Determina la matriz asociada respecto a una base B que escojas, la misma en espacio inicial y final, indicando cual es dicha base.

Ejercicio 13.25. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x + y + z = 0$. Determina la matriz asociada respecto a una base B que escojas, la misma en espacio inicial y final, indicando cual es dicha base.

Ejercicio 13.26. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la transformación lineal correspondiente a la rotación de un ángulo de 30 grados en sentido contrario al de las agujas del reloj. Determina la matriz asociada respecto de la base canónica.

Ejercicios de nivel más avanzado

Ejercicio 13.27. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $U = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $W = x + y + z = 0$. Encuentra un endomorfismo f en $\mathbb{R}^3$ de forma que $\text{Ker}f = U$ e $\text{Im}f = W$ y determina su matriz asociada respecto de las bases canónicas.

Ejercicio 13.28. Sea un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que el conjunto $B = \{(2, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ es una base del subespacio imagen de f . Argumenta que tipo de aplicación es. Obtén la matriz asociada respecto de las bases canónicas de un endomorfismo cuyo subespacio imagen sea el generado por B , así como las ecuaciones de dicho endomorfismo y una base de su núcleo.

Ejercicio 13.29. De una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ se sabe que: $\text{Ker}f = \langle (2, 1, 0, 1), (0, 1, 3, 0) \rangle$ e $\text{Im}f = \langle (0, 1, 2), (1, 1, 0) \rangle$. Hallar una posible matriz T asociada, indicando las bases adoptadas.

Ejercicio 13.30. De una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ se sabe que: $\text{Ker}f = \langle (2, 1, -1) \rangle$ e $\text{Im}f = \langle (1, 1, 0), (1, 2, 0) \rangle$. Hallar una posible matriz T asociada, indicando las bases adoptadas.