Capítulo 12

Aplicaciones lineales: Parte 3

12.1 Matriz asociada a f respecto de bases cualesquiera

Teorema 12.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal.*

$B = \{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \ldots,\ \vec{b}_n\ \}$ *base de* $\mathbb{R}^n$

$B' = \{\vec{b'}_1,\ \vec{b'}_2, \ldots,\ \vec{b'}_n\ \}$ *base de* $\mathbb{R}^m$

Entonces existe una única matriz F tal que $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_{B'}$, siendo $[\vec{x}]_B$ las coordenadas del vector origen respecto de la base B y $[\vec{y}]_{B'}$ las coordenadas del vector imagen respecto de la base B'. F es la matriz $m \times n$ cuya columna j son las coordenadas del vector $f(\vec{b}_j)$ respecto de la base B'.

$$\boxed{F = [\ [f(\vec{b}_1)]_{B'}\ [f(\vec{b}_2)]_{B'} \ldots\ [f(\vec{b}_n)]_{B'}\ ]}$$

Demostración: $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n$ $\qquad f(\vec{x}) = c'_1\vec{b'}_1 + c'_2\vec{b'}_2 + \ldots + c'_m\vec{b'}_m$

$f(\vec{x}) = f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n) = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n f(\vec{b}_n) =$

$c_1(a_{11}\vec{b'}_1 + a_{21}\vec{b'}_2 + \ldots + a_{m1}\vec{b'}_m) + c_2(a_{12}\vec{b'}_1 + a_{22}\vec{b'}_2 + \ldots + a_{m2}\vec{b'}_m) + \ldots$

$+c_n(a_{1n}\vec{b'}_1 + a_{2n}\vec{b'}_2 + \ldots + a_{mn}\vec{b'}_m) =$

$(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n)\vec{b'}_1 + (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n)\vec{b'}_2 + \ldots +$

$(a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n)\vec{b'}_m = c'_1\vec{b'}_1 + c'_2\vec{b'}_2 + \ldots + c'_m\vec{b'}_m$

Por tanto:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 \ + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = c'_1 \\ a_{21}c_1 \ + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = c'_2 \\ \ldots \\ a_{m1}c_1 \ + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = c'_m \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_m \end{bmatrix}$$

$$[\ [f(\vec{b}_1)]_{B'}\ [f(\vec{b}_2)]_{B'} \ldots\ [f(\vec{b}_n)]_{B'}\ ] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_m \end{bmatrix} \Rightarrow F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_{B'}$$

□

Para el caso particular en el que B sea la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y B' la base canónica de $\mathbb{R}^m$ la expresión anterior queda:

$$[\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{y}$$

Fue obtenida como Teorema 10.1.

Observaciones:

- Cuando no se indica la base a la que se refiere la matriz o las ecuaciones de la transformación lineal, se entiende que la base utilizada es la canónica.
- Cuando en los endomorfismos nos referimos a una única base debemos interpretar que la matriz o las ecuaciones se refieren a esa base tanto en el espacio inicial como en el final.

Ejemplo 12.1. *Dadas las siguientes aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ en las que se hace referencia a la base canónica $\{\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ o a la base $B = \{\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$, indica qué matriz asociada F se infiere de forma inmediata (marcando el recuadro con una $\times$) y cual es esa matriz (rellena con números los puntos suspensivos)*

a) $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$

- $\square$ $F\vec{x} = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- $\square$ $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

b) $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \end{cases}$

- $\square$ $F\vec{x} = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- $\square$ $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

c) $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{u}_3 \end{cases}$

- $\square$ $F\vec{x} = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- $\square$ $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

d) $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{e}_2 \end{cases}$

- $\square$ $F\vec{x} = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- $\square$ $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- $\square$ $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Solución:

a) $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$

- [x] $F\vec{x} = \vec{y}$
- [ ] $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- [ ] $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- [ ] $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \end{cases}$

- [ ] $F\vec{x} = \vec{y}$
- [ ] $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- [x] $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- [ ] $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{u}_3 \end{cases}$

- [ ] $F\vec{x} = \vec{y}$
- [ ] $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- [ ] $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- [x] $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{e}_2 \end{cases}$

- [ ] $F\vec{x} = \vec{y}$
- [x] $F[\vec{x}]_B = \vec{y}$
- [ ] $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- [ ] $F\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esquema para una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$:

- A : Tomamos las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$ $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, , \vec{e}_3\}$ y $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + +x_3\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$

  $$\vec{y} = f(\vec{x}) = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

  $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

  $\vec{y} = A\vec{x}$ con $A = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)\ ]$ Nótese que A es 2×3, porque los $f(\vec{e}_i)$ son elementos de $\mathbb{R}^2$, con dos componentes.

- F : Tomamos otras bases para $\mathbb{R}^2$ y para $\mathbb{R}^3$ $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

  $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ $\vec{y} = c'_1\vec{v}_1 + c'_2\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$

  $$\vec{y} = f(\vec{x}) = [\ f(\vec{u}_1)\ f(\vec{u}_2)\ f(\vec{u}_3)\ ] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

  $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [\ f(\vec{u}_1)\ f(\vec{u}_2)\ f(\vec{u}_3)\ ] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

  Pero como queremos las coordenadas de $\vec{y}$ en la base B':

  $$\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = [\ [f(\vec{u}_1)]_{B'}\ [f(\vec{u}_2)]_{B'}\ [f(\vec{u}_3)]_{B'}\ ] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

  $[\vec{y}]_{B'} = F[\vec{x}]_B$ con $F = [\ [f(\vec{u}_1)]_{B'}\ [f(\vec{u}_2)]_{B'}\ [f(\vec{u}_3)]_{B'}\ ]$

12.2 Relación entre las matrices asociadas a f respecto a bases distintas

12.2.1 Matriz A de canónica a canónica, matriz F de B a B'

Sea $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = \vec{y} = A\vec{x} \qquad \textbf{[1a]}$$

$\vec{x}$ son las coordenadas respecto a la base éstandar de $\mathbb{R}^n$
$f(\vec{x}) = \vec{y}$ son las coordenadas respecto a la base éstandar de $\mathbb{R}^m$
A es la matriz estándar de la aplicación lineal

Supongamos dos bases distintas de las estándar, $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ para $\mathbb{R}^n$ y $B' = \{\vec{b'}_1, \vec{b'}_2, \ldots \vec{b'}_m\}$ para $\mathbb{R}^m$.

$$\vec{x} = P_B\ [\vec{x}]_B \qquad P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\ ]$$
$$\vec{y} = P_{B'}\ [\vec{y}]_{B'} \qquad P_{B'} = [\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \ldots\ \vec{b'}_m\ ]$$

La ec. **[1a]** se transforma a:

$$P_{B'}\ [\vec{y}]_{B'} = A\ P_B\ [\vec{x}]_B$$
$$[\vec{y}]_{B'} = P_{B'}^{-1}\ A\ P_B\ [\vec{x}]_B \quad \text{y definiendo} \quad F = P_{B'}^{-1}\ A\ P_B \qquad \textbf{[2]}$$
$$[\vec{y}]_{B'} = F\ [\vec{x}]_B \qquad \textbf{[1b]}$$

Hemos obtenido una ecuación similar a **[1a]**. La diferencia está en que:
$[\vec{x}]_B$ es el vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base B de $\mathbb{R}^n$
$[\vec{y}]_{B'}$ es el vector de coordenadas de $\vec{y}$ respecto a la base B' de $\mathbb{R}^m$
F es la matriz asociada a la aplicación lineal f, respecto a las bases B y B'.

En el Teorema 12.1 llegamos a una ecuación igual a la **[1b]** obteniendo que las columnas de F han de ser las coordenadas respecto de la base B' de los vectores de la base B.

Lo que nos aporta esta sección es la ecuación **[2]**, que permite determinar la matriz F a partir de A o recíprocamente:

$$F = P_{B'}^{-1}\ A\ P_B \qquad\qquad A = P_{B'}\ F\ P_B^{-1}$$

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a la transformación lineal y las asociadas al cambio de base, que en efecto puede considerarse como un endomorfismo:

$$f:\ \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P_B"] \arrow[r, dashed, "F"] & {[\vec{y}]_{B'}} \arrow[u, "P_{B'}"']
\end{tikzcd}$$
$$A = P_{B'}\ F\ P_B^{-1}$$

$$f:\ \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\
{[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P_B"] \arrow[r, dashed, "F"] & {[\vec{y}]_{B'}} \arrow[u, "P_{B'}"']
\end{tikzcd}$$
$$F = P_{B'}^{-1}\ A\ P_B$$

En el esquema de la izquierda podemos ver A como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha F como composición de tres aplicaciones lineales.

P_B tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica.
$P_{B'}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base canónica.

12.2.2 El caso más general: matriz F de B a B' , matriz G de C a C'

A continuación veremos la relación entre las matrices F y G asociadas a dos pares de bases cualesquiera.

$$F\ [x]_B = [y]_{B'}$$
$$G\ [x]_C = [y]_{C'}$$

$[x]_B = P\ [x]_C$ P es la matriz de cambio de base de C a B en $\mathbb{R}^n$. Sus columnas son las coordenadas de los vectores de C respecto a la base B.

$[y]_{B'} = Q\ [y]_{C'}$ Q es la matriz de cambio de base de C' a B' en $\mathbb{R}^m$. Sus columnas son las coordenadas de los vectores de C' respecto de la base B'.

En la expresión $F[x]_B = [y]_{B'}$ sustituimos $[x]_B = P\ [x]_C$ e $[y]_{B'} = Q\ [y]_{C'}$, obteniendo:

$$F\ P\ [x]_C = Q\ [y]_{C'}$$

$$Q^{-1}\ F\ P\ [x]_C = [y]_{C'}\ \Rightarrow\ G = Q^{-1}\ F\ P \quad \text{y} \quad F = Q\ G\ P^{-1}$$

Veámoslo en un esquema como el del apartado anterior:

$$\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^m \\
 & [\vec{x}]_B & \underset{F}{\dashrightarrow} & [\vec{y}]_{B'} \\
P & \uparrow & & \uparrow\ Q \\
 & [\vec{x}]_C & \underset{G}{\dashrightarrow} & [\vec{y}]_{C'}
\end{array}
\qquad\qquad F = Q\ G\ P^{-1}$$

12.3 Matrices equivalentes

Recordemos del Capítulo 1 que dos matrices, que llamamos en este caso $F_{m\times n}$ y $G_{m\times n}$, son **equivalentes** si existen dos matrices invertibles P_n y Q_m tales que $F = PGQ$.

Teorema 12.2. *Dos matrices son equivalentes entre sí si y sólo si definen la misma aplicación lineal respecto a bases distintas.*

Demostración: $\Rightarrow$
Sea $F = PGQ$, y supongamos F referido a bases B_1 y B_2 en espacio inicial y final respectivamente.

$$\begin{tikzcd} f\colon & \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^m \\ & {[\vec{x}]_{B_1}} \arrow[r, dashed, "F"'] \arrow[d, "Q"'] & {[\vec{y}]_{B_2}} \\ & {[\vec{x}]_{B_3}} \arrow[r, dashed, "G"'] & {[\vec{y}]_{B_4}} \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

Entonces G es la matriz asociada respecto de las bases B_3 y B_4 tales que Q es la matriz de paso de B_1 a B_3 y P^{-1} es la matriz de paso de B_2 a B_4.

$\Leftarrow$
Sea F matriz asociada a un endomorfismo respecto de las bases B_1 y B_2, y G la matriz asociada al mismo endomorfismo respecto de las bases B_3 y B_4

$$\begin{tikzcd} f\colon & \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^m \\ & {[\vec{x}]_{B_1}} \arrow[r, dashed, "F"'] \arrow[d, "Q"'] & {[\vec{y}]_{B_2}} \\ & {[\vec{x}]_{B_3}} \arrow[r, dashed, "G"'] & {[\vec{y}]_{B_4}} \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $F = P\ G\ Q$, siendo P la matriz de cambio de base de B_4 a B_2 y Q la matriz de cambio de base de B_1 a B_3. P y Q son invertibles, por tanto F y G son equivalentes. $\square$

También debemos recordar del Capítulo 1 que dos matrices son **equivalentes** si y sólo si tienen el mismo rango. Por tanto dos matrices $F_{m\times n}$ y $G_{m\times n}$ representan la misma aplicación lineal, referidas a las bases que corresponda, si y sólo si tienen el mismo rango.

12.4 Endomorfismos y matrices semejantes

Definición 12.1. *Se dice que dos matrices F_n y G_n son* **semejantes** *si $\exists$ P invertible tal que F se puede factorizar de la forma $F = PGP^{-1}$. Si dos matrices son semejantes, es obvio que también son equivalentes, pero no al revés.*

Teorema 12.3. *Dos matrices F_n y G_n son semejantes si y sólo si correspondiendo la primera a un endomorfismo referido a la misma base en espacio inicial y final, la segunda corresponde al mismo endomorfismo en otra base, de nuevo la misma en el espacio inicial y final.*

Demostración: $\Rightarrow$
Sea $F = PGP^{-1}$, y supongamos A referido a base B en espacio inicial y final.

$$
\begin{array}{lccc}
f: & \mathbb{R}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & [\vec{x}]_B & \xrightarrow[F]{} & [\vec{y}]_B \\
P^{-1} & \downarrow & & \uparrow \; P \\
 & [\vec{x}]_C & \xrightarrow[G]{} & [\vec{y}]_C
\end{array}
\qquad\qquad F = P\,G\,P^{-1}
$$

Entonces G es la matriz asociada respecto de la base C tal que P^{-1} es la matriz de paso de B a C.

$\Leftarrow$
Sea F matriz asociada a un endomorfismo respecto de la base B, y G la matriz asociada al mismo endomorfismo respecto de la base C

$$
\begin{array}{lccc}
f: & \mathbb{R}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & [\vec{x}]_B & \xrightarrow[F]{} & [\vec{y}]_B \\
P^{-1} & \downarrow & & \uparrow \; P \\
 & [\vec{x}]_C & \xrightarrow[G]{} & [\vec{y}]_C
\end{array}
$$

Entonces $F = P\ G\ P^{-1}$, siendo P^{-1} la matriz de cambio de base de B a C. La factorización encontrada demuestra que F y G son semejantes. $\square$

Rangos de las matrices semejantes entre sí

Debido a que semejanza implica equivalencia y las matrices equivalentes tienen el mismo rango, se concluye que las matrices semejantes entre sí tienen el mismo rango. Sin embargo equivalencia no implica semejanza, por tanto dos matrices del mismo rango, que por tanto serían equivalentes, no son necesariamente semejantes.

Determinante y traza de matrices semejantes

Teorema 12.4. *Si F_n y G_n son semejantes, entonces tienen el mismo determinante.*

Demostración: $|F| = |\ P\ G\ P^{-1}\ | = |P|\ |G|\ |P^{-1}| = |G|$ $\square$

Teorema 12.5. *Si F_n y G_n son semejantes, entonces tienen la misma traza* [1].

[1] No demostramos este teorema

Endomorfismo diagonalizable y matriz diagonalizable

Definición 12.2. *Se dice que un endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ es* **diagonalizable** *si existe una base de $\mathbb{R}^n$ respecto a la cual la matriz asociada sea diagonal.*

Definición 12.3. *Se dice que una matriz A_n es* **diagonalizable** *si A es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existen una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.*

Vemos la relación entre las dos definiciones anteriores en el siguiente esquema. A correspondería a la matriz estándar asociada y P sería la matriz de cambio de base de B a la canónica, siendo B la base respecto de la cual la matriz asociada es D diagonal.

$$
\begin{array}{llcl}
f: & \mathbb{R}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & \vec{x} & \underset{A}{\dashrightarrow} & \vec{y} \\
P^{-1} & \downarrow & & \uparrow \;\; P \\
 & [\vec{x}]_B & \underset{D}{\dashrightarrow} & [\vec{y}]_B
\end{array}
$$

La matriz correspondiente a un endomorfismo diagonalizable es diagonalizable, cualquiera que sea la base a la que esté referida la matriz, siempre que la base sea la misma en el espacio inicial y final.

12.5 Ejemplos de ejercicios

Ejemplo 12.2. *Sea g un endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz asociada respecto a la base $B = \{(1,3),(2,5)\}$ es $R = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.*

a) Calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica.

b) Calcula la imagen del vector $\vec{u} = (6,15)$, expresando el resultado respecto de la base canónica.

c) Calcula Ker g.

d) Escribe la expresión de $g((1,3))$ como combinación lineal de los vectores de la base B.

Sol.

- **a)** *Hay que calcular la matriz A tal que $A\vec{x} = \vec{y}$*

  Sabemos que $R[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$, con $R = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

  Partiendo de $R[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$, y expresando $[\vec{x}]_B$ e $[\vec{y}]_B$ en función de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, obtenemos:

  $R[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \Rightarrow R(P_B)^{-1}\vec{x} = (P_B)^{-1}\vec{y}$

  Premultiplicando la última ecuación por P_B se obtiene

  $P_B R P_B^{-1}\vec{x} = \vec{y}$ *Por tanto* $A = P_B R P_B^{-1}$

  $$P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad P_B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -52 & 20 \\ -143 & 55 \end{bmatrix}$$

  A modo de ilustración, mostramos cómo actúan las dos matrices, asociadas al mismo endomorfismo:

  $$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \qquad \begin{bmatrix} -52 & 20 \\ -143 & 55 \end{bmatrix}\vec{x} = \vec{y}$$

  Puede comprobarse que las matrices R y A tienen la misma traza y el mismo determinante, pues así ha de ser por ser semejantes entre sí .

- **b)** $$\underset{A}{\begin{bmatrix} -52 & 20 \\ -143 & 55 \end{bmatrix}}\underset{\vec{u}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}} = \underset{f(\vec{u})}{\begin{bmatrix} -12 \\ -33 \end{bmatrix}}$$

  Otro método: *obtención de la imagen utilizando la matriz R*

  Primero tenemos que expresar (6,15) en la base B, resolviendo el siguiente sistema:

  $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

  La solución es (0,3), por tanto las coordenadas de (6,15) respecto a la base B son $[\vec{u}]_B = (0,3)$

  Tomando la matriz R: $R\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$

  $$R\ [\vec{u}]_B = [f(\vec{u})]_B = [\vec{y}]_B$$

y ahora transformamos $[\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$ *a coordenadas relativas a la base canónica:*

$f(\vec{u}) = \vec{y} = -6\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -33 \end{bmatrix}$

- **c)** *Calculamos el núcleo de g haciendo uso de la matriz A, relativa a la base estándar en espacio inicial y final. La razón de hacerlo así es que el núcleo quede expresado en coordenadas canónicas.*

  $\begin{bmatrix} -52 & 20 & \mid 0 \\ -143 & 55 & \mid 0 \end{bmatrix}$

  Resulta obvio que la matriz $R = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ *rango 2, por lo que su matriz equivalente A también tiene rango 2, y podemos eliminar la segunda fila de la matriz ampliada anterior.*

  Por tanto nos queda:

  $\begin{bmatrix} -52 & 20 & \mid 0 \\ 0 & 0 & \mid 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 13 & -5 & \mid 0 \\ 0 & 0 & \mid 0 \end{bmatrix}$

  Una posible base de Ker g es $\{(5, 13)\}$

- **d)** $g((1,3)) = 4(1,3) + 2(2,5)$, *sin más que fijarnos en la primera columna de la matriz R, que son las coordenadas respecto de B del transformado del primer vector de la base B.*

Apartados a y b: 16-17 Parcial 2 IQ, para estos datos:
$B = \{(1,1), (2,4)\}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = (2,3)$

Ejemplo 12.3. *Se considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz estándar asociada es* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Determina la matriz asociada a la aplicación respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^4$ y la base $B = \{(1,0,2),(0,1,3),(1,2,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.*

Sol.

$$A\vec{x} = \vec{y} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Tenemos que calcular N tal que $N\vec{x} = [\vec{y}]_B$

$A\vec{x} = \vec{y} = P_B[\vec{y}]_B \Rightarrow P_B^{-1}A\vec{x} = [\vec{y}]_B$. *Por tanto la matriz N que buscamos es $N = P_B^{-1}A$.*

Otra forma de llegar a la expresión $P_B^{-1}\ A$ es considerar la composición de dos aplicaciones lineales en el siguiente orden:

1) Aplicando A sobre $\vec{x}$ obtenemos la imagen $\vec{y}$

2) Seguidamente, aplicando P_B^{-1} sobre el resultado anterior $\vec{y}$, se transforman las coordenadas de $\vec{y}$ a $[\vec{y}]_B$

$$\vec{x} \xrightarrow{\quad A \quad} \vec{y} \xrightarrow{\quad P_B^{-1} \quad} [\vec{y}]_B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}$$

$$P_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 & 1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & -1/6 \end{bmatrix}$$

$$N = P_B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 & 1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 & 4/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & -7/3 \\ 11/6 & -1/6 & 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

Esquema de como actúan las matrices A y N:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 & 4/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & -7/3 \\ 11/6 & -1/6 & 4/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 12.4. *Se considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, definida por:*

$$\begin{aligned}(1,1,0) &\longmapsto (0,-3,-2)\\ (3,0,-2) &\longmapsto (1,4,-5)\\ (0,-2,2) &\longmapsto (1,-4,0)\end{aligned}$$

a) Determina la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases B en el espacio inicial y C en el espacio final, que tú escojas. Pueden ser iguales o distintas.

b) Determina la matriz asociada a la aplicación lineal respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

<u>*Sol.*</u>

a) En primer lugar demostraremos que el conjunto $\{(1,1,0),(3,0,-2),(0,-2,2)\}$ forma una base, pues de lo contrario no estaría definida f sobre todo $\mathbb{R}^3$.

$\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix} = -10 \neq 0$ *por tanto los tres vectores forman una base.*

Denotamos esos vectores como $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$.

$$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3$$

$$f(\vec{x}) = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + c_3 f(\vec{b}_3) = c_1 \begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\4\\-5\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}1\\-4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

Expresando el sistema matricialmente obtenemos: $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -3 & 4 & -4\\ -2 & -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$

Llamando M a la matriz de la izquierda tenemos que esta es la matriz de la aplicación lineal tomando la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ en el espacio inicial y la base canónica en el final. Es decir, $M[\vec{x}]_B = \vec{y}$

b) Para obtener la matriz A tal que $A\vec{x} = \vec{y}$ debemos sustituir en la ecuación anterior $[\vec{x}]_B$ en función de $\vec{x}$.

$$[\vec{x}]_B = P_B^{-1}\vec{x} \qquad \text{con } P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ ] = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$\vec{y} = M[\vec{x}]_B = MP_B^{-1}\vec{x}$, *por tanto la matriz asociada en la base estándar es* $A = MP_B^{-1}$

$$A = MP_B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -3 & 4 & -4\\ -2 & -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2/5 & -2/5 & 1/10\\ -6/5 & -9/5 & -19/5\\ -9/5 & -1/5 & -1/5\end{bmatrix}$$

Podemos comprobar por ejemplo como $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3\\-2\end{bmatrix}$

O comprobar conjuntamente los tres vectores:

$$A\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -3 & 4 & -4\\ -2 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

Apartado a: 16-17 Parcial 2 GIQ sin Matlab

Ejemplo 12.5. *Sea la aplicación lineal* $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *tal que:*

$g(1,0,0) = (3,-1)$
$g(0,1,0) = (0,4)$
$g(0,0,1) = (-2,5)$

con todos los vectores referidos a la base canónica.

a) Determina la matriz A *asociada a la aplicación lineal respecto de la bases canónicas.*
b) Determina la matriz F *asociada a la aplicación lineal respecto de las bases* $B = \{(1,3,0),(1,0,2),(0,4,-2)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *y* $B' = \{(2,1),(4,3)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

<u>*Sol.*</u>

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ *pues* $A = [\ g(\vec{e}_1)\ g(\vec{e}_2)\ g(\vec{e}_3)\ ]$

b)

$$\begin{tikzcd} g:\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\ {[\vec{x}]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed, "F"'] & {[\vec{y}]_{B'}} \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

$$A = QFP^{-1} \Rightarrow F = Q^{-1}\ A\ P$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad |Q| = 2 \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35/2 & -39/2 & -6 \\ 19/2 & 19/2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 12.6. *De una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ se sabe que:*

$$f(0,1,2,2)=(7,-1,9,3) \qquad f(1,0,4,0)=(2,8,5,4) \qquad Kerf=\begin{cases}2x+y+3z+t=0\\ x-2t=0\end{cases}$$

a) Escoge una base B en el espacio inicial, una base C en el espacio final (pueden ser iguales o diferentes), y determina la matriz asociada a la aplicación lineal relativa a esas bases.

b) Justifica si f es o no inyectiva.

<u>*Sol.*</u>

a) Un endomorfismo en $\mathbb{R}^4$ queda definido si se conocen las imágenes de los vectores de una base de $\mathbb{R}^4$.

Denotando $\vec{a}_1=(0,1,2,2)$ y $\vec{a}_2=(1,0,4,0)$, si $Kerf$ es complementario de $<\vec{a}_1,\vec{a}_2>$ tendremos una base de $\mathbb{R}^4$ cuyas imágenes son conocidas (la imagen de los vectores del núcleo es el vector cero), y por tanto puede determinarse la matriz asociada al endomorfismo.

La base de $Kerf$ se obtiene resolviendo su forma implícita:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & | \ 0\\ 2 & 1 & 3 & 1 & | \ 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & | \ 0\\ 0 & 1 & 3 & 5 & | \ 0\end{bmatrix}$$

La forma paramétrica es: $x=2t$, $y=-3z-5t$, por tanto $(2t,-3z-5t,z,t)$, y una posible base es: $\{(2,-5,0,1),(0,-3,1,0)\}$. Denotamos esos vectores como $\vec{a}_3$ y $\vec{a}_4$ respectivamente.

Obtengamos ahora el rango de los cuatro vectores:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 4 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 2 & 1 & -8\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 11\end{bmatrix}$$ *Determinante $1\times 1\times(77-12)\neq 0$, por tanto rango 4.*

La matriz M asociada al endomorfismo, respecto de la base $B=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\}$ en el espacio inicial, y la base canónica en el espacio final, es: $M=\begin{bmatrix}7 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 8 & 0 & 0\\ 9 & 5 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$

La base B es la indicada, y la C la canónica.

b) La aplicación no es inyectiva puesto que su núcleo no es el vector $(0,0,0,0)$.

Apartado a) 16-17 Parcial 2 GIM sin Matlab, para estos datos:
$f(0,1,2,2)=(0,2,4,4)$, $f(1,0,4,0)=(3,0,12,0)$, *y el mismo $Kerf$.*