Capítulo 10

Aplicaciones lineales: Parte 1

10.1 Definición de aplicación entre espacios vectoriales

Definición 10.1. *Una* **aplicación** f *del espacio vectorial* V *sobre* $\mathbb{K}$ *en el espacio vectorial* W *sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ *es una ley que asigna a cada elemento* $v \in V$ *un elemento* $w = f(v)$ *de* W.

A $f(v)$ se le denomina "imagen de v".

v es el "antecedente" de $f(v)$.

Todos los elementos de V tienen una imagen y sólo una.

Al espacio vectorial V se le denomina dominio de f, y al espacio vectorial W codominio de f. También se utilizan los nombres de espacio vectorial inicial para el dominio y espacio vectorial final para el codominio.

Se utiliza la notación
$$\begin{aligned} f : V &\longmapsto W \\ v &\longmapsto w = f(v) \end{aligned}$$

Definición 10.2. *Se denomina* **imagen de f***:* $V \longmapsto W$*, y se denota* $\mathrm{Im}f$*, al conjunto*
$\mathrm{Im}f = \{f(v) \ / \ v \in V\}$.

$\mathrm{Im}f$ *es el conjunto formado por todos los vectores del espacio final que tienen antecedente.*

10.2 Definición de aplicación lineal

Definición 10.3. *Una* **aplicación** $f : V \longmapsto W$ *se dice* **lineal** *si cumple los siguientes axiomas.*

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$$
$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Propiedades

1) $f(0_V) = 0_W$

Dem. $\quad f(0_V) = f(0\ v) = 0\ f(v) = 0_W$

2) $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

Dem. $\quad f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

Nota: La propiedad 2) y la definición de aplicación lineal son equivalentes. Dicho de otra forma, la propiedad 2) se podría haber adoptado como definición de Aplicación Lineal. En este caso los axiomas de la Definición 10.3 serían propiedades derivadas.

3) **Principio de superposición**, sin más que aplicar 2) repetidas veces:

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + \ldots + c_p f(v_p)$$

Esta propiedad pone de manifiesto que para conocer la imagen de un vector de V basta con conocer las imágenes de los vectores de una base de V, y las coordenadas del vector respecto de dicha base.

La imagen de un vector resulta ser la combinación lineal de las imágenes de los vectores base, tomando como coeficientes de la combinación lineal las coordenadas del vector respecto de la base.

Para las aplicaciones lineales se utilizan al menos otros dos nombres: transformaciones lineales y homomorfismos. $f(v)$ también puede designarse como "transformado de v".

Cuando el espacio inicial y el espacio final coinciden las aplicaciones lineales también se designan como endomorfismos.

Definición 10.4. *El endomorfismo f de V en V tal que $f(v) = v \quad \forall v \in V$ se denomina* **endomorfismo identidad**.

En los libros de texto este endomorfismo aparece denotado con frecuencia como id(u), o id$(\vec{x})$ si se trabaja sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

EN LO QUE SIGUE TRATAREMOS APLICACIONES LINEALES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$, AMBOS ESPACIOS VECTORIALES SOBRE EL CUERPO $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{y} = f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Ejemplo 10.1. *Determina si la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$ es o no aplicación lineal.*

Sol:

Demostraremos que f cumple la propiedad 2).

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(x'_1, x'_2, x'_3)) = \\
&f(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_2 + \mu x'_2, \lambda x_3 + \mu x'_3) = \\
&(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_3 + \mu x'_3) = \\
&(\lambda x_1, \lambda x_3) + (\mu x'_1, \mu x'_3) = \\
&\lambda(x_1, x_3) + \mu(x'_1, x'_3) = \lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu f(x'_1, x'_2, x'_3)
\end{aligned}
$$

queda demostrado que f cumple la propiedad 2) y que es por tanto aplicación lineal.

Ejemplo 10.2. *Determina si la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3 + 1)$ es o no aplicación lineal.*

Sol:

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(x'_1, x'_2, x'_3)) = \\
&f(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_2 + \mu x'_2, \lambda x_3 + \mu x'_3) = \\
&\boxed{(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_3 + \mu x'_3 + 1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu f(x'_1, x'_2, x'_3) = \\
&\lambda(x_1, x_3 + 1) + \mu(x'_1, x'_3 + 1) = \\
&\boxed{(\lambda x_1 + \mu x'_1, \lambda x_3 + \mu x'_3 + \lambda + \mu)}
\end{aligned}
$$

Las expresiones encuadradas no son iguales para todo λ y para todo μ (solo si $\lambda + \mu = 1$), por tanto f no es aplicación lineal.

10.3 Ejemplos de aplicaciones lineales sencillas

Ejemplo 10.3. Contracción

$f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(\vec{x}) = r\vec{x}$ *con* $0 < r < 1$

Ej. $f(\vec{x}) = 0.2\ \vec{x}$*. Asigna a un vector otro de igual dirección y sentido pero de norma menor (en un factor 0.2).*

Ejemplo 10.4. Dilatación

$f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(\vec{x}) = r\vec{x}$ *con* $r > 1$

Ej. $f(\vec{x}) = 30\ \vec{x}$*. Asigna a un vector otro de igual dirección y sentido pero de norma mayor (en un factor 30).*

Se utilizan también los nombres de expansión y compresión. r se denomina razón o factor de dilatación/expansión o de contracción/compresión.

Estos ejemplos se podrían generalizar al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Asimismo, el caso $r = 1$ correspondería al endomorfismo indentidad: $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

Es sencillo demostrar gráficamente que estas aplicaciones son aplicaciones lineales, es decir, que $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ para todo $\vec{x}$ y todo $\vec{y}$, y que $f(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ para todo $\vec{x}$ y para todo λ.

10.4 Matriz estándar asociada a una aplicación lineal

Analicemos un ejemplo sencillo como la aplicación lineal dilatación de un factor 3 en $\mathbb{R}^2$, que se escribe como $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$

Expresemos el vector $\vec{x}$ cómo combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = f(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = x_1\ f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2\ f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = x_1\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Denotando las coordenadas estándar de $f(\vec{x})$ como (y_1, y_2), es decir $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, tendremos:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{, por tanto,} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

Vemos como la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ queda definida por la matriz real $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\vec{y} = f(\vec{x})$ pasa a ser $\vec{y} = A\vec{x}$, que también podemos escribir como $f(\vec{x}) = A\vec{x}$

A es la denominada **matriz estándar de la aplicación lineal** f, porque hace corresponder al vector de coordenadas $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^2$, el vector de coordenadas $\vec{y} = f(\vec{x})$ relativas a la base estándar del espacio final $\mathbb{R}^2$.

Nótese que las columnas de A son $f(\vec{e}_1)$ y $f(\vec{e}_2)$.

En este ejemplo $A = 3I$, por tanto $f(\vec{x}) = 3\ I\ \vec{x} = 3\ \vec{x}$

De forma general, para toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{y} = f(\vec{x})$ se podrá expresar como $\vec{y} = A_{m\times n}\ \vec{x}$, haciendo corresponder al vector de $\mathbb{R}^n$ de coordenadas canónicas $\vec{x}$, el vector de $\mathbb{R}^m$ de coordenadas canónicas $\vec{y}$. Las columnas de A son las coordenadas canónicas de las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

A cada aplicación lineal le corresponderá una matriz A única, y recíprocamente a cada matriz $A_{m\times n}$ le corresponderá una aplicación lineal f única de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Se tratará este resultado en el Teorema 10.1.

Es fácil entender que una aplicación de la forma $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ es lineal, ya que por las propiedades de operaciones con matrices hemos visto que:

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} \qquad\qquad A(\lambda\vec{u}) = \lambda A\vec{u}$$

En el Capítulo 2 sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales habíamos tratado la ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ para determinar, dados $A_{m\times n}$ e $\vec{y}_{m\times 1}$, la solución $\vec{x}_n$. La ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ también se puede entender desde otro punto de vista, pensando en A como un operador o función que actúa sobre $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, multiplicándose a él por la izquierda, para producir el vector imagen $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. La ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ define por tanto la aplicación lineal que a cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$.

Dada f con matriz asociada A, para calcular la imagen de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ debemos efectuar $A\vec{x}$, es decir, premultiplicar por A.

Para determinar si $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tiene antecedente o antecedentes respecto de la aplicación lineal f, y en su caso hallarlos, debemos estudiar, y en su caso resolver, el SL de matriz ampliada $[\ A \mid \vec{y}\ ]$.

Volviendo al caso de los endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ y tomando uno cualquiera f, la expresión de la matriz asociada se deduciría simplemente así :

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$

$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2)$, y denotando $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ a las coordenadas estándar de $f(\vec{x})$, tendremos:

$$\underset{\vec{y}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} = \underset{A}{[\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ ]} \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

Las columnas de A son las coordenadas estándar de las imágenes de los vectores de la base canónica.

<u>**Obtención de la matriz estándar $A_{m\times n}$ asociada a una aplicación lineal**</u>

Teorema 10.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Entonces existe una única matriz A tal que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$. En efecto A es la matriz $m \times n$ cuya columna j es el vector $f(\vec{e}_j)$, donde $\vec{e}_j$ es la columna j de la matriz identidad de orden n.*

$A = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \dots\ f(\vec{e}_n)\ ]$

Demostración: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ **[1]** $\qquad \vec{y} = y_1\vec{e'}_1 + y_2\vec{e'}_2 + \ldots + y_m\vec{e'}_m$ **[2]**
Hemos utilizado la notación con 'prima' para la base canónica de $\mathbb{R}^m$ para distinguirla de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, ya que el número de componentes de los vectores $\vec{e}_1$ de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{e'}_1$ de $\mathbb{R}^m$ es diferente.

Expresando $\vec{x}$ respecto de la base canónica, y utilizando el hecho de que la aplicación es lineal, se tiene:

$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$

Seguidamente, expresando los vectores $f(\vec{e_i})$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^m$, tenemos:

$x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) = x_1(a_{11}\vec{e'}_1 + a_{21}\vec{e'}_2 + \ldots + a_{m1}\vec{e'}_m) + x_2(a_{12}\vec{e'}_1 + a_{22}\vec{e'}_2 + \ldots + a_{m2}\vec{e'}_m) + \ldots + x_n(a_{1n}\vec{e'}_1 + a_{2n}\vec{e'}_2 + \ldots + a_{mn}\vec{e'}_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\vec{e'}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\vec{e'}_2 + \ldots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)\vec{e'}_m$

Por tanto hemos llegado a la expresión de $\vec{y} = f(\vec{x})$ respecto de la base $\vec{e'_i}$, y teniendo en cuenta **[2]** se obtienen las siguientes m ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 \ + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right. \quad \textbf{[3]} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$[\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$A\ \vec{x} = \vec{y}$$ □

$A_{m\times n}$ se denomina matriz estándar de la aplicación lineal f, porque hace corresponder a las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^n$, las coordenadas de $f(\vec{x}) = \vec{y}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^m$.

$A = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ]$ pone de manifiesto cómo, en una aplicación lineal, conocida la imagen de una base se podrá determinar la imagen de cualquier vector.

Recordemos que $f(\vec{e_i})$ son las coordenadas de ese vector imagen respecto de la base estándar de $\mathbb{R}^m$.

<u>**Ecuaciones de la aplicación lineal.**</u>

Las ecuaciones **[3]** se denominan **Ecuaciones de la Aplicación Lineal**. No son más que el conjunto de las m ecuaciones "escalares" correspondientes a la ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{y}$.

Las ecuaciones (una por cada variable del espacio final) permiten obtener las coordenadas canónicas (también llamadas estándar) del vector imagen, $(y_1, y_2, ..., y_m)$, a partir de las coordenadas canónicas del vector origen $(x_1, x_2, ..., x_n)$, o vector antecedente. La expresión de $A\vec{x}$ da lugar, obviamente, a ecuaciones lineales en las variables x_i.

En el ejemplo del endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$,

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Por tanto las ecuaciones son las siguientes: $\begin{cases} y_1 = 3x_1 \\ y_2 = 3x_2 \end{cases}$

<u>**Matriz asociada al endomorfismo identidad**</u>

La matriz asociada al endomorfismo identidad en $\mathbb{R}^n$ es la matriz identidad I_n ya que $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ $\forall i = 1, ..., n$

10.5 El subespacio Im f

Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$,

$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$

$\Rightarrow \text{Im}f = \{f(\vec{x}) \ / \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} =< f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n) >$

Recordemos que $A = [\ f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2) \ldots\ f(\vec{e}_n)\ ]$

Por tanto Imf= Col$A$

- La base de Imf se obtiene eliminando los vectores del conjunto $\{\ f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2), \ldots,\ f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, los vectores correspondientes a las columnas no pivotales de A.
- dim Imf=rg$A$

10.6 Núcleo de una aplicación lineal

Definición 10.5. *Se denomina* **núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, *y se denota* Ker$f$, *al conjunto* $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Teniendo en cuenta que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, siendo A la matriz estándar asociada a f, **Ker** f **= Nul** A

10.7 Dimensiones de Imf y Ker$f$

Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$, con matriz asociada A. Teniendo en cuenta que Imf=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f}$$

$$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

10.8 Aplicación lineal inyectiva y sobreyectiva

- $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ es inyectiva si:
  $\forall \vec{x}, \vec{x'} \in \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) = f(\vec{x'}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{x'}$

  Es decir, si cada $\underline{\vec{y} \in \mathrm{Im} f}$ tiene un único antecedente.

  Se puede dar también la siguiente definición. f es inyectiva si:
  $\forall \vec{x}, \vec{x'} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \neq \vec{x'} \Rightarrow f(\vec{x}) \neq f(\vec{x'})$

- $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva si:
  $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^m\, \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = \vec{y}$. Es decir, si todos los vectores de $\mathbb{R}^m$ tienen antecedente.

  Es decir, f es sobreyectiva si $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^m$.

  f no es sobreyectiva cuando existe algún $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ sin antecedente.

  A una aplicación lineal sobreyectiva también se le puede denominar aplicación lineal sobre, suprayectiva o exhaustiva.

Si la aplicación lineal es inyectiva al homomorfismo también se le puede designar como epimorfismo.

Si la aplicación lineal f es inyectiva y sobreyectiva a la vez se dice que es **biyectiva**. En este caso, todo vector del espacio final tiene un antecedente y sólo uno. Las aplicaciones lineales biyectivas también reciben el nombre de isomorfismos.

Relación del carácter inyectivo y/o sobreyectivo de f con el rango de A y con las dimensiones de núcleo e imagen

Consideremos la aplicación lineal f de ecuación:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{m\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\vec{y}}$$

- f es inyectiva $\Leftrightarrow$ el SL anterior **no** puede ser compatible indeterminado para ningún valor de $\vec{y} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = n \Leftrightarrow \mathrm{Nul}A = \{\vec{0}\}$

- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ el SL anterior **es** compatible para todo $\vec{y} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = m \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ f\ (= \mathrm{Col}A) = \mathbb{R}^m$

- Matrices A cuadradas (endomorfismos): Los resultados anteriores permiten concluir que en el caso particular $n = m$ la aplicación es inyectiva y sobreyectiva, es decir biyectiva (cuando $\mathrm{rg}A = m = n$) o no es ni inyectiva ni sobreyectiva (si el rango es menor que $m = n$).

10.9 Ejemplos de ejercicios

Ejemplo 10.5. *Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ definida como $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. a) Determina $f(1,1,1,1)$, $f(1,4,-1,3)$, $f(0,0,0,0)$ y $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$. b) Justifica si la aplicación es inyectiva o no y si es sobreyectiva o no.*

<u>*Sol:*</u>

a)

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(1,1,1,1) = (5,8) \qquad f(1,4,-1,3) = (0,0) \qquad f(0,0,0,0) = (0,0)$$

Obtengamos ahora la imagen de un vector genérico $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

Denotando $f(\vec{x}) = \vec{y}$, tenemos que las componentes de $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ son:

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ y_2 = 2x_1 + 5x_3 + x_4 \end{cases}$$

b)

Vemos que la aplicación proporciona la misma imagen (0,0) para dos vectores de $\mathbb{R}^4$ distintos, por tanto f no es inyectiva. No obstante analizamos la clasificación de la aplicación de forma sistemática estudiando el SL:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 3 & y_1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & y_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 3 & y_1 \\ 0 & 3/2 & -9/2 & -1/2 & y_2 - y_1/2 \end{array}\right]$$

El SL es compatible (rgA=rgA*=2) indeterminado, para todo vector (y_1, y_2). Por ser compatible la aplicación es sobreyectiva (todo vector del espacio final tiene antecedente) y por ser indeterminado es no inyectiva (más de un antecedente).

Otro razonamiento es el siguiente: Teniendo en cuenta que rgA=2, la aplicación no es inyectiva porque tendría que ser 4, y sí es sobreyectiva porque para serlo el rango tiene que ser 2.

Ejemplo 10.6. *Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (5, -7, 2)$ y $f(\vec{e}_2) = (-5, 8, 0)$. a) Encuentra la matriz A tal que $\vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$ para un vector genérico $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, y las ecuaciones de la aplicación lineal. b) Analiza si f es inyectiva y si es sobreyectiva. Obtén la forma implícita de Imf.*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) = x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 5x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x1 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *(Como era de esperar ya que $A = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \end{bmatrix}$. En efecto, podríamos haber escrito directamente la matriz A a partir de las imágenes de $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$.*

Las ecuaciones de la aplicación lineal son: $\begin{cases} y_1 = 5x_1 - 5x_2 \\ y_2 = -7x_1 + 8x_2 \\ y_3 = 2x_1 \end{cases}$

Nótese que la imagen de $\vec{x}$ también se podría expresar así:

$$f(x_1, x_2) = (5x_1 - 5x_2, -7x_1 + 8x_2, 2x_1)$$

Dado un vector $\vec{x}$ de coordenadas (x_1, x_2), su imagen es la combinación lineal de los vectores $(5, -7, 2)$, $(-5, 8, 0)$ con coeficientes x_1, x_2. Ya que los vectores imagen son las combinaciones lineales de dos vectores linealmente independientes (uno no es múltiplo del otro), los vectores imagen se encontrarán en un plano de $\mathbb{R}^3$, no en todo $\mathbb{R}^3$, por tanto la a.l. **no es sobreyectiva**. *Nótese rgA=2, y debería ser 3 para ser sobreyectiva.*

Ya que rgA es 2 y en las ecuaciones de la a.l. tenemos dos incógnitas, la aplicación **es inyectiva***: cada vector del conjunto imagen tiene un único antecedente.*

Obtención de la ecuación implícita del plano formado por los vectores imagen:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & | & y_1 \\ -7 & 8 & | & y_2 \\ 2 & 0 & | & y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -5 & | & y_1 \\ 0 & 1 & | & 7/5y_1 + y_2 \\ 0 & 2 & | & -2/5y_1 + y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -5 & | & y_1 \\ 0 & 1 & | & 7/5y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & | & -16/5\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

Ecuación implícita $16\ y_1 + 10\ y_2 - 5\ y_3 = 0$

Ejemplo 10.7. *Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1,3,-1)$ y $f(\vec{e}_2) = (-3,5,7)$.*

a) Encuentra la matriz estándar A asociada a la aplicación lineal y las ecuaciones de la aplicación lineal.
b) Encuentra la imagen de $\vec{u} = (2,-1)$ bajo la aplicación lineal f.
c) Encuentra un $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea $\vec{b} = (3,2,-5)$.
d) ¿Hay más de un $\vec{x}$ cuya imagen por f sea $\vec{b}$?.
e) Determina si $\vec{c} = (3,2,5)$ tiene antecedente.
f) Clasifica la aplicación respecto a inyectividad y sobreyectividad.

Sol:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Las ecuaciones de la aplicación lineal son: $\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2 \\ y_3 = x_1 + 7x_2 \end{cases}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

Hay que resolver el sistema de matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 3 & 5 & | & 2 \\ -1 & 7 & | & -5 \end{bmatrix}$ *Un sistema equivalente en la forma escalonada es:* $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$. *El SL es compatible determinado, con solución $x_2 = -1/2$ y $x_1 = 3/2$. $\vec{x} = (3/2, -1/2)$*

d) El SL anterior es <u>determinado</u>, por tanto sólo hay un $\vec{x}$ cuya imagen sea $\vec{b}$, que es $\vec{x} = (3/2, -1/2)$.

e) Hay que resolver el sistema de matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 3 & 5 & | & 2 \\ -1 & 7 & | & 5 \end{bmatrix}$. *Un sistema equivalente en forma escalonada es:* $\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & -5 \end{bmatrix}$. *El SL es incompatible, por tanto $\vec{c} \notin Imf$*

f) La aplicación lineal no es sobreyectiva, ya que dimf =rgA=2, que es menor que la dimensión del espacio final. Además acabamos de ver como el vector $\vec{c}$ del apartado anterior no tiene antecedente. La aplicación sí es inyectiva porque el rango de A coincide con la dimensión del espacio inicial.

Ejemplo 10.8. *Dada la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 5}.$$

a) ¿ Cual es la imagen del vector $(0,0,0,1,0)$?.

b) Obtén la dimensión del núcleo y una base B del mismo.

c) Obtén la dimensión y una base C de Imf

d) Obtén la forma implícita de Imf

e) Obtén una base C' de Imf, lo más sencilla posible. (Pista: Haz uso de la forma implícita obtenida en el apartado anterior.)

f) Clasifica f respecto de la inyectividad y sobreyectividad

Sol:

a) $f(0,0,0,1,0) = (1,3,8)$, *sin más que multiplicar la matriz por el vector* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) $\text{Ker} f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \;\; / \;\; A\vec{x} = \vec{0}\}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} * & & * & & \end{array} \end{array}$$

Hemos llegado hasta la forma escalonada reducida, porque simplificará la resolución del sistema.

*Las columnas señaladas con * son columnas pivotales. rgA=2. Deducimos entonces que dim Ker f = 3, pues dim Ker$f$ = 5 - rgA = 5 - 2 = 3*

Para obtener la base del núcleo tenemos que resolver el sistema. Tomaremos las incógnitas correspondientes a las columnas no pivotales como parámetros libres.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 &= x_4 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} \qquad \text{Ker} f = <\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}>$$

Los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes pues $\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow x_2 = x_4 = x_5 = 0$ (no hay más que fijarse en las componentes 2, 4 y 5), por tanto B=$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de Ker$f$.

c) Imf $= Col\ A = < \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ ...\ \vec{a}_5\ >$

Para obtener la base de Imf hay que eliminar del conjunto $\{\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_5\ \}$ *los vectores l.d. El subconjunto máximo de vectores l.i. lo podemos obtener tomando las columnas de A* $\vec{a}_1$ *y* $\vec{a}_3$*, pues son columnas pivotales en una forma escalonada por filas de la matriz.*
$\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ *y* $\vec{a}_5$ *son c.l. de* $\vec{a}_1$ *y* $\vec{a}_3$.

Tomamos por tanto la base de Imf: $C = \{(-3,1,2),(-1,2,5)\}$ *dim Imf* $= rgA = 2$

d) Los vectores de $\mathrm{Im}f$ *son los* $\{\vec{y} \in \mathbb{R}^3\ /\ A\vec{x} = \vec{y}$ *tiene solución* $\}$*. Denotando como* (y_1, y_2, y_3) *las coordenadas estándar del vector* $\vec{y}$*, el SL tiene solución si y sólo si* $rgA = rg\ A^*$.

$$A^* = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & \mid y_1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & \mid y_2 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & \mid y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & \mid y_2 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & \mid y_1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & \mid y_3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & \mid & y_2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & \mid & y_1 + 3y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & \mid & -2y_2 + y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & \mid & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & \mid & (y_1 + 3y_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & (-y_1 - 3y_2)/5 - 2y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & \mid & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & \mid & (y_1 + 3y_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & (-y_1 - 13y_2 + 5y_3)/5 \end{bmatrix}$$

El SL es compatible si y sólo si $\boxed{-y_1 - 13y_2 + 5y_3 = 0}$. *Esta es la forma implícita de Imf.*

Comentario: *Este método nos ha permitido obtener la forma implícita del subespacio Imf, que es la ecuación encuadrada arriba. Una forma mucho más sencilla de obtener la forma implícita sería haber utilizado únicamente las columnas pivotales de A, pues son base de Imf. Presentamos el resultado a continuación. Los vectores de la base de Imf se han reordenado para facilitar las operaciones en la eliminación gaussiana.*

$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & -3 & \mid y_1 \\ 2 & 1 & \mid y_2 \\ 5 & 2 & \mid y_3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} -1 & -3 & \mid & y_1 \\ 0 & -5 & \mid & y_2 + 2y_1 \\ 0 & 0 & \mid & -y_1 - 13y_2 + 5y_3 \end{bmatrix}$$

Se comprueba que se obtiene la misma ecuación implícita que mediante el método anterior.

Para asegurarnos de que la ecuación es correcta conviene hacer la comprobación de que los vectores base $(-1,2,5)$ *y* $(-3,1,2)$ *la cumplen.*

e) Resolviendo la ecuación implícita $\boxed{-y_1 - 13y_2 + 5y_3 = 0}$*, obtendremos una base de Imf.*

Tomando como incógnita principal y_1*, despejamos* $y_1 = -13y_2 + 5y_3$*, y de esta expresión deducimos la solución general:*

$$\begin{bmatrix} -13y_2 + 5y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_2 \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una base sencilla de Imf es $C' = \{(-13,1,0),(5,0,1)\}$

f) La aplicación no es inyectiva porque porque el rango es inferior a 5, ya que $m = 3$*. La aplicación no es sobreyectiva porque para ello el rango tendría que ser 3, y es 2.*

Ejemplo 10.9. *Sea $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$, con matriz asociada* $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *a) Determina si f es sobreyectiva, b) si f es inyectiva, c) una base B del subespacio Imf y d) una base C de* Ker$f$.

- *a) La aplicación es sobreyectiva si $\forall\ \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución.*

  El sistema es $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

  y la matriz ampliada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 8 & 1 & y_1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & y_3 \end{array}\right]$

  rg $A=$ rg $A^* = 3$*, por tanto el sistema es compatible para cualquier terna (y_1, y_2, y_3), por tanto f sobreyectiva.*

- *b) La aplicación es inyectiva si cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ es como mucho imagen de un vector de $\mathbb{R}^4$. Hemos visto que todo $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tiene antecedente, por tanto tenemos que ver si hay un o infinitos antecedentes. Como el número de columnas pivotales (3) es menor que el número de incógnitas (4), queda un parámetro libre, y por tanto tenemos que el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones. Luego f no es inyectiva.*

- *Respuestas a a) y a b) teniendo en cuenta el rango de A.*

  La matriz A del enunciado ya se encuentra en la forma escalonada, por tanto conocemos el valor de su rango sin hacer cálculos, rgA=3.

  rg$A$ (= dim Im f) $= 3 =$ dim $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ *Sobreyectiva*

  rg$A$ $= 3 \neq$ dim $\mathbb{R}^4 \Rightarrow$ *No inyectiva*

- *c)* Imf=$\mathbb{R}^3$ *por tanto una base de Imf es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*:* $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

- *d)* Ker$f$ $= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ A\vec{x} = \vec{0}\}$

  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$
  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

  $x = -6z$, $y = z/2$, $z = z$, $t = 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Base de* Ker$f$*:* $C = \{(-6, 1/2, 1, 0)\}$

  Para asegurarnos de que el vector $(-6, 1/2, 1, 0)$ pertenece a Kerf, y de que por tanto no nos hemos equivocado en los cálculos, conviene realizar el producto de A por este vector para comprobar que se obtiene $(0,0,0)$:

  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.10. *Sea la aplicación lineal $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2\ ,\ 5x_1 + 7x_2\ ,\ x_1 + 3x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestra que f es inyectiva. ¿Es f sobreyectiva?. Encuentra una base para Imf. Obtén las ecuaciones implícitas de Imf. Encuentra una base sencilla para Imf a partir de sus ecuaciones implícitas.*

$f(1,0) = (3,5,1),\ f(0,1) = (1,7,3) \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

- *Las columnas de A son linealmente independientes por tanto f es inyectiva. rgA=2*
- *f es sobreyectiva si $Imf = \mathrm{Col}A = \mathbb{R}^3$. dim $Im\ f$ = rg A = 2. Por tanto f no es sobreyectiva.*
- $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ *con* $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$

  Por tanto $B = \{(3,5,1), (1,7,3)\}$ es una base de $\mathrm{Im}\ f$.

  (Como las columnas de A son l.i., forman directamente la base de Imf).
- *Para obtener la forma implícita de Imf imponemos que el SL con matriz ampliada* $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \mid y_1 \\ 5 & 7 & \mid y_2 \\ 1 & 3 & \mid y_3 \end{bmatrix}$ *sea compatible.*

  Aplicamos eliminación gaussiana:

  $$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid y_3 \\ 5 & 7 & \mid y_2 \\ 3 & 1 & \mid y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid & y_3 \\ 0 & -8 & \mid & y_2 - 5y_3 \\ 0 & -8 & \mid & -3y_3 + y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mid & y_3 \\ 0 & -8 & \mid & y_2 - 5y_3 \\ 0 & 0 & \mid & y_1 - y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

  El sistema es compatible $\Leftrightarrow y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$.

  Por tanto $y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$ es la ecuación implícita.
- *A partir de la ecuación implícita obtengamos una base sencilla de Imf:*

  $y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 - 2y_3$

  $$Im\ f = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ con } y_2,\ y_3 \in \mathbb{R} \quad = y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } y_2,\ y_3 \in \mathbb{R}$$

  Base' $= \{(1,1,0), (-2,0,1)\}$