Capítulo 8

Espacios vectoriales: Parte 6

8.1 Matriz de cambio de base/coordenadas

En este apartado veremos como un cambio de base en un subespacio o espacio vectorial se puede escribir como una operación producto matriz-vector, con $P \times vector1 = vector2$, siendo $vector1$ y $vector2$ las coordenadas en cada base, y P la matriz de cambio de base. Deduciremos la expresión general para un subespacio H de dimensión d del espacio vectorial V de dimensión n..

Sean $v \in H$ y las bases de $H \quad B = \{b_1, b_2, ..., b_d\}$ y $B' = \{b'_1, b'_2, ..., b'_d\}$

Podemos escribir: $\quad v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_d b_d \qquad v = c'_1 b'_1 + c'_2 b'_2 + ... + c'_d b'_d$

Igualando las expresiones anteriores:

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_d b_d = c'_1 b'_1 + c'_2 b'_2 + ... + c'_d b'_d \qquad \textbf{[1a]}$$

Expresando los elementos de la primera base respecto de la segunda:

$$\begin{cases} b_1 = a_{11} b'_1 + a_{21} b'_2 + ... + a_{d1} b'_d \\ b_2 = a_{12} b'_1 + a_{22} b'_2 + ... + a_{d2} b'_d \\ ... \\ b_d = a_{1d} b'_1 + a_{2d} b'_2 + ... + a_{dd} b'_d \end{cases} \qquad \textbf{[1b]}$$

Sustituyendo estas expresiones de los b_i en la ecuación **[1a]**, obtenemos:

$$\begin{array}{l} c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_d b_d = \\ c_1 a_{11} b'_1 + c_1 a_{21} b'_2 + ... + c_1 a_{d1} b'_d \ + \ c_2 a_{12} b'_1 + c_2 a_{22} b'_2 + ... + c_2 a_{d2} b'_d \ + \ ... \ + \\ c_d a_{1d} b'_1 + c_d a_{2d} b'_2 + ... + c_d a_{dd} b'_d \ = \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} (c_1 a_{11} + ... + c_d a_{1d}) & b'_1 & + & (c_1 a_{21} + ... + c_d a_{2d}) & b'_2 & + & ... & + & (c_1 a_{d1} + ... + c_d a_{dd}) & b'_d = \\ c'_1 & b'_1 & + & c'_2 & b'_2 & + & ... & + & c'_d & b'_d \end{array}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} c'_1 = c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + ... + c_d a_{1d} \\ c'_2 = c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + ... + c_d a_{2d} \\ ... \\ c'_d = c_1 a_{d1} + c_2 a_{d2} + ... + c_d a_{dd} \end{cases} \quad \textbf{[1c]}, \quad \text{o matricialmente} \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ ... \\ c'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2d} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{d1} & a_{d2} & ... & a_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_d \end{bmatrix}$$

El vector de elementos $\vec{c}\,'_i$ son las coordenadas de v relativas a la base B', denotadas $[v]_{B'}$, y el vector de los c_i son las coordenadas de v relativas a la base B, denotadas $[v]_B$, por tanto tenemos:

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2d} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{d1} & a_{d2} & ... & a_{dd} \end{bmatrix} [v]_B$$

que podemos escribir como:

$$\boxed{[v]_{B'} = P\ [v]_B} \quad \mathbf{[2]} \quad , \quad \text{con } P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2d} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{d1} & a_{d2} & ... & a_{dd} \end{bmatrix}$$

Fijándonos en las ecuaciones **[1b]** vemos que los elementos de la columna j de P son las coordenadas del vector $b_j \in B$ respecto de la base B', por tanto:

$$\boxed{P = [\ [b_1]_{B'}\ [b_2]_{B'}\ ...\ [b_d]_{B'}\ ]} \quad \mathbf{[3]}$$

Llamamos a P **matriz de cambio de coordenadas de la base** B **a la base** B'. La multiplicación por la izda. por P transforma el vector de coordenadas $[v]_B$ en $[v]_{B'}$.

P es invertible (el SL **[1c]** es comp. det. ya que las coorden. relativas a una base son únicas). Multiplicando **[2]** por P^{-1} por la izquierda, obtenemos:

$P^{-1}\ [v]_{B'} = [v]_B$

P^{-1} es la matriz que transforma las coordenadas relativas a la base B' en las coordenadas relativas a la base B. Las columnas de P^{-1} son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

Ejemplo 8.1. *Consideremos el espacio* $\mathbb{R}^3$*, y en él la base estándar* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *y una base* $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$*. Obtén las matrices de cambio de base entre la base* B *y la estándar.*

$[\vec{x}]_{can} = P[\vec{x}]_B$*, con* $P = [\ [\vec{b}_1]_{can}\ \ [\vec{b}_2]_{can}\ \ [\vec{b}_3]_{can}\ ]$*, de acuerdo con la expresión de* P *en* **[3]**.

Recordemos que no es necesario hacer referencia a la base canónica y que se entiende $\vec{x} = [\vec{x}]_{can}$*, por tanto podemos escribir las expresiones anteriores cómo:*

$\vec{x} = P[\vec{x}]_B$*, con* $P = [\ \vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \vec{b}_3\ ]$

Denotando como P_B *la matriz que tiene por columnas las coordenadas estándar de los vectores de la base* B*, es decir* $P_B = [\ \vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \vec{b}_3\ ]$*, tenemos que* $P = P_B$*, por tanto:*

$P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$.

Considerando la transformación de la base estándar a la base B*, la matriz* Q *de cambio de base es aquella que cumple que* $[\vec{x}]_B = Q\vec{x}$.

Obviamente $Q = P_B^{-1}$

Q *tiene como columnas las coordenadas de* $\vec{e}_1$*,* $\vec{e}_2$ *y* $\vec{e}_3$ *respecto de la base* B*.*

Ejemplo 8.2. *Sea* $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ *una base de* $\mathbb{R}^2$, *con* $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Obtén la matriz de cambio de base de B *a la estándar.*

b) Sabiendo que un vector $\vec{v}$ *tiene coordenadas* $(7, -6)$ *respecto de la base* B, *obtén sus coordenadas en la base estándar.*

c) Encuentra las coordenadas de $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *respecto de la base* B.

d) Obtén la matriz de cambio de base desde la estándar a B.

a) $P_B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ ] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *la matriz que tiene por columnas los vectores de la base* B *en coordenadas estándar, es la matriz de cambio de base pedida, pues* $P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$

En efecto, si (c_1, c_2) *son las coordenadas de* $\vec{x}$ *respecto de la base* B, *entonces:*

$$c_1 \underset{\vec{b}_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} + c_2 \underset{\vec{b}_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}, \text{ lo que implica } \quad \underset{\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{[\vec{x}]_B}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}, \text{ es decir,}$$

$$P_B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz de cambio de base P *tal que* $P[\vec{x}]_B = \vec{x}$ *es* P_B.

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)

$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *son las coordenadas de* $\vec{x}$ *relativas a la base estándar de* $\mathbb{R}^2$ *o coordenadas estándar de* $\vec{x}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener las coordenadas $[\vec{x}]_B = (c_1, c_2)$ *hay que resolver la ecuación:*

$$c_1 \underset{\vec{b}_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} + c_2 \underset{\vec{b}_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{[\vec{x}]_B}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad P_B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolvamos el sistema mediante E.G. en su matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | \ 4 \\ 1 & 1 & | \ 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & | \ \ 4 \\ 0 & -3 & | -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & | \ 4 \\ 0 & 1 & | \ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & | \ 6 \\ 0 & 1 & | \ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | \ 3 \\ 0 & 1 & | \ 2 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$\boxed{[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Son las coordenadas de } \vec{x} \text{ relativas a la base } B.}$$

Comprobación: $\vec{x} = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Nótese que la matriz de coeficientes del sistema es $P_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *que es una matriz invertible, y que por tanto la solución* $[\vec{x}]_B$ *del sistema de matriz ampliada* $[P_B \mid \vec{x}]$ *también se puede obtener* *como el producto* $P_B^{-1}\vec{x}$. $\quad [\vec{x}]_B = (\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Este procedimiento enlaza con el siguiente apartado.

d)

$[\vec{x}]_B = P_B^{-1}\vec{x}$ *partiendo de que la matriz de cambio de base en el apartado a) era* P_B.

(si P_B *pasa de coord. relativas a base* B *a coord. canónicas,* P_B^{-1} *pasa de coord. canónicas a coord. relativas a la base* B*)*

$$P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar el resultado del apartado anterior: $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Nótese que $(1/3, -1/3)$ *son las coord. de* $\vec{e}_1$ *respecto de* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ *y* $(1/3, 2/3)$ *las coord. de* $\vec{e}_2$ *respecto de* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ *(ver [3]).*

Ejemplo 8.3. *Considera las bases* $B = \{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \}$ *y* $B' = \{ \begin{bmatrix}-7\\-3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\8\\10\end{bmatrix} \}$ *de un subespacio vectorial* H *de* $\mathbb{R}^3$.

a) Calcula las coordenadas del vector $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ *respecto de la base* B'.

b) Determina la matriz de cambio de base P *tal que* $P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}$, *para cualquier* $\vec{v} \in H$

Sol.

a) *A partir de* $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ *obtengamos* $\vec{x}$ *(es decir, las coordenadas del vector respecto de la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*):*

$$\vec{x} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\6\\8\end{bmatrix}$$

A continuación calculamos las coordenadas de $\vec{x}$ *en la base* B', *resolviendo el sistema siguiente:*

$$\begin{bmatrix}-7 & 3 & |\ 2\\ -3 & 8 & |\ 6\\ 8 & 10 & |\ 8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3/7 & |-2/7\\ -3 & 8 & |\ 6\\ 8 & 10 & |\ 8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3/7 & |-2/7\\ 0 & 47/7 & |\ 36/7\\ 0 & 94/7 & |\ 72/7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}7 & -3 & |-2\\ 0 & 47 & |\ 36\\ 0 & 0 & |\ 0\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}7 & -3 & |-2\\ 0 & 1 & |\ 36/47\\ 0 & 0 & |\ 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}7 & 0 & |\ 3*36/47-2\\ 0 & 1 & |\ 36/47\\ 0 & 0 & |\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 0 & |14/47\\ 0 & 1 & |36/47\\ 0 & 0 & |\ 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & |2/47\\ 0 & 1 & |36/47\\ 0 & 0 & |\ 0\end{bmatrix}$$

Por tanto: $x = 2/47$, $y = 36/47$

Comprobación: $2/47(-7,-3,8) + 36/47(3,8,10) = (2,6,8)$ $\qquad [\vec{x}]_{B'} = \begin{bmatrix}2/47\\36/47\end{bmatrix}$

b) *Nos piden determinar la matriz de transformación* $P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}$ *para cualquier vector* $\vec{v}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

$P = [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ ]$

Nótese que los dos sistemas que permiten obtener las coordenadas de $\vec{b}_1$ *y* $\vec{b}_2$ *respecto de la base* B' *se pueden resolver conjuntamente del siguiente modo:*

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\quad \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \\ \begin{bmatrix}-7 & 3 & |\ 1 & |\ 0\\ -3 & 8 & |\ 1 & |\ 1\\ 8 & 10 & |\ 0 & |\ 2\end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix}1 & -3/7 & |-1/7 & |\ 0\\ -3 & 8 & |\ 1 & |\ 1\\ 8 & 10 & |\ 0 & |\ 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3/7 & |-1/7 & |\ 0\\ 0 & 47/7 & |\ 4/7 & |\ 1\\ 0 & 94/7 & |\ 8/7 & |\ 2\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & -3/7 & |-1/7 & |\ 0\\ 0 & 47/7 & |\ 4/7 & |\ 1\\ 0 & 0 & |\ 0 & |\ 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3/7 & |-1/7 & |\ 0\\ 0 & 1 & |\ 4/47 & |\ 7/47\\ 0 & 0 & |\ 0 & |\ 0\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & |\ 4/47*3/7-1/7 & |\ 7/47*3/7+0\\ 0 & 1 & |\ 4/47 & |\ 7/47\\ 0 & 0 & |\ 0 & |\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & |\ (4/47*3-1)*1/7 & |\ 3/47\\ 0 & 1 & |\ 4/47 & |\ 7/47\\ 0 & 0 & |\ 0 & |\ 0\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & |-35/47*1/7 & |\ 3/47\\ 0 & 1 & |\ 4/47 & |\ 7/47\\ 0 & 0 & |\ 0 & |\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & |-5/47 & |\ 3/47\\ 0 & 1 & |\ 4/47 & |\ 7/47\\ 0 & 0 & |\ 0 & |\ 0\end{bmatrix}$$

$$[\vec{b}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -5/47 \\ 4/47 \end{bmatrix} \qquad [\vec{b}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 3/47 \\ 7/47 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -5/47 & 3/47 \\ 4/47 & 7/47 \end{bmatrix}$$

Comprobación del resultado del apartado a): $\begin{bmatrix} -5/47 & 3/47 \\ 4/47 & 7/47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/47 \\ 36/47 \end{bmatrix}$

16-17 Primer Parcial Matlab GIM, Junio Matlab GIQ

Ejemplo 8.4. *Sean las siguientes bases de* $\mathbb{R}^3$*:* $B = \{(2,0,0),(0,3,0),(0,0,2)\}$ *y* $B' = \{(-1,0,0),(0,4,0),(0,1,2)\}$.

a) Sabiendo que un vector $\vec{v}$ *tiene coordenadas* $(1,6,2)$ *respecto a la base* B*, determina sus coordenadas respecto a la base* B'.

b) Obtén la matriz de paso P *tal que* $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$*, para cualquier* $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

c) Obtén la matriz de paso Q *tal que* $Q[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$*, para cualquier* $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

<u>Sol.:</u>

a) En este apartado se consideran las dos bases B *y* B' *de* $\mathbb{R}^3$ *y a partir de las coordenadas de un vector, relativas a* B*, se pide obtener las coordenadas del mismo vector, respecto a* B'.

Primero calculamos las coordenadas de ese vector respecto de la base canónica:

$$\underset{P_B}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{[\vec{v}]_B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

Y a continuación resolvemos, para calcular las coordenadas de $\vec{v}$ *respecto de la base* B'

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad \text{, obteniendo } [v]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{B'} \qquad \vec{v}$$

b) En este apartado se pide determinar la matriz P *tal que* $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$

P *es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base* B *respecto a la base* B'*. Para obtener las 3 columnas habría que resolver los 3 sistemas lineales correspondientes, cuyas matrices ampliadas son:*

$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3 \mid \vec{b}_1\ ]$ *para despejar* $[\vec{b}_1]_{B'}$

$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3 \mid \vec{b}_2\ ]$ *para despejar* $[\vec{b}_2]_{B'}$

$[\ \vec{b'}_1\ \vec{b'}_2\ \vec{b'}_3 \mid \vec{b}_3\ ]$ *para despejar* $[\vec{b}_3]_{B'}$

La solución obtenida es la siguiente: $P = [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ [\vec{b}_3]_{B'}\ ] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se muestra el planteamiento para la primera columna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{, obteniendo la solución: } \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{B'} \qquad \vec{b}_1$$

Se podrían resolver los tres sistemas a la vez mediante eliminación gaussiana hasta llegar a la forma escalonada reducida de la siguiente matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \ldots.$$

$$P_{B'} \qquad P_B$$

A la izquierda quedará la matriz identidad de orden 3 y a la derecha P.

Por estar considerando un espacio vectorial completo, en el que por tanto una posible base es la canónica, resulta más sencillo conceptualmente determinar la matriz de cambio de base tratando la transformación de coordenadas de B a B' como la composición de dos transformaciones: de B a la canónica y de la canónica a B'. Hemos visto que las matrices de transformación entre una base y la canónica son muy sencillas de obtener.

$\vec{x} = P_B[\vec{x}]_B$ *con* $P_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{x} = P_{B'}[\vec{x}]_{B'}$ *con* $P_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

De donde: $P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'}$ *y , como la matriz* $P_{B'}$ *es invertible se tiene* $P_{B'}^{-1}P_B[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$.

Por tanto la matriz de paso es $P = P_{B'}^{-1}P_B = (\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se puede comprobar que $P \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Nótese que la ecuación $P_{B'}^{-1}P_B[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$ *se ha aplicado en efecto en el apartado a), ya que con* $P_B[\vec{v}]_B$ *obtuvimos las coordenadas canónicas de* $\vec{v}$ *y premultiplicando ese resultado por* $P_{B'}^{-1}$ *(o resolviendo el correspondiente sistema* $[\ P_{B'} \mid \vec{v}\ ]$*) obtuvimos* $[\vec{v}]'_B$.

d) La matriz que se pide es $Q = P^{-1}$. *Por tanto no hay más que calcular la inversa de la matriz* P *obtenida en el apartado anterior.*

La inversa se obtiene fácilmente por el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También podría haberse calculado haciendo uso de la igualdad $P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'}$, *pues al ser* P_B *invertible se puede reescribir la ecuación cómo* $P_B^{-1}P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$, *y obtener* $Q = P_B^{-1}P_{B'}$.

Apartado b) 16-17 1er parcial GIQ, con las siguientes bases: $B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $B' = \{(1,2,0),(0,1,2),(1,1,-1)$,

8.2 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Manualmente y con MATLAB. *Encuentra el vector $\vec{x}$ correspondiente a las coordenadas dadas y la base dada:*

a) $B = \{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ *16-17 1er parcial GIQ*

Ejercicio 8.2. MATLAB. *Encuentra el vector de coordenadas $[\vec{x}]_B$ de $\vec{x}$ respecto a la base dada. Obtén la matriz de paso P_1 de la base canónica a la base B. Obtén la matriz de paso P_2 de la base B a la base canónica.*

a) $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8.3. *15-16 1er parcial GIM, 16-17 1er parcial GIQ*

Considera la matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & -4/3 \\ * & 1 \end{bmatrix}$ *y las bases de* $\mathbb{R}^2$ *siguientes:*

$B1 = \{(1,2),(0,1)\}$, $B2 = \{(3,0),(4,1)\}$, $B3 = \{(5,2),(0,1)\}$.

Señala cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) P *es la matriz de cambio de coordenadas tal que* $P[\vec{x}]_{B1} = [\vec{x}]_{B2}$

b) P *es la matriz de cambio de coordenadas tal que* $P[\vec{x}]_{B3} = [\vec{x}]_{B2}$

c) P *es la matriz de cambio de coordenadas tal que* $P[\vec{x}]_{B3} = [\vec{x}]_{B1}$

d) Las tres afirmaciones anteriores son falsas.

Ejercicio 8.4. *Considérese la base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por los vectores* $B = \{(1,0,2),(0,1,0),(0,3,1)\}$. *Sabiendo que la matriz P de paso de la base B a la base B' es* $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, *obtén los vectores de la base B'.*