Capítulo 7

Espacios vectoriales: Parte 5

7.1 Intersección, suma y suma directa de p subespacios

La definición y propiedades de la intersección de más de dos subespacios se extienden de forma natural de lo establecido para dos subespacios. Lo mismo sucede con la definición y propiedades de la suma de más de dos subespacios.

Respecto de la definición de la suma directa, también ésta se extiende de forma análoga a la establecida para dos subespacios, sin embargo sí difieren las propiedades inferidas en el Teorema 6.8. En efecto, para el caso de la suma de más de dos subespacios, las afirmaciones 1), 2) y 3) del teorema son equivalentes, pero no la 4), ya que si bien las afirmaciones 1), 2) y 3) implican que la intersección de los subespacios es el vector cero, los recíprocos no son ciertos. Por ejemplo las tres rectas generadas por (1,0,0), (1,1,0) y (0,1,0) en $\mathbb{R}^3$ tienen como intersección el vector $(0,0,0)$, sin embargo su suma no es directa, ya que los tres vectores no son linealmente independientes. En consecuencia se puede extender a más de dos subespacios el Teorema 6.9 pero no el Teorema 6.10.

Considerando en $\mathbb{R}^3$ la suma de los ejes X, Y, Z, ésta es suma directa (por tanto la dimensión de la suma es la suma de las dimensiones) y la intersección de los mismos es el vector $(0,0,0)$, por tanto:

$$\begin{array}{c} \text{suma de dimensiones de los subespacios individuales} = \dim(\text{suma}) + \dim(\text{intersección}) \\ 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad = \quad 3 \quad + \quad 0 \end{array}$$

Sin embargo la suma del eje X, el eje Y y la recta $r : (x, y, 0)$ no es directa (la dimensión de la suma no es igual a la suma de las dimensiones), a pesar de ser la dimensión de la intersección también cero. Por tanto:

$$\begin{array}{c} \text{suma de dimensiones de los subespacios individuales} = \dim(\text{suma}) + \dim(\text{intersección}) \\ 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad \neq \quad 3 \quad + \quad 0 \end{array}$$

7.1.1 Suma directa de p subespacios

Seguidamente presentamos explícitamente la definición de la suma directa de p subespacios y el desglose de sus propiedades:

Definición: Se dice que la suma de los subespacios V_1, V_2, ..., V_p de V es directa y se escribe $V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus .... \bigoplus V_p$ si cualquier vector de dicha suma puede expresarse de una única forma como suma de vectores de V_1, V_2, ... V_p, esto es, si:

$v_1 + v_2 + ... + v_p = v_1' + v_2' + ... + v_p'$ con v_i, $v_i' \in V_i$, $i = 1, ..., p$
$\Rightarrow v_i = v_i' \;\; i = 1, ..., p$

Teorema 7.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $V_1 + V_2 + ... + V_p$ *es suma directa*

2) $v_1 + ... + v_p = 0_V$, con $v_i \in V_i \Rightarrow v_i = 0_V$ *para* $i = 1, ..., p$

3) Cualquier conjunto $\{v_1, ..., v_p\}$ *con* $v_i \in V_i$ *y* $v_i \neq 0_V$ *para todo* i *(un vector de cada subespacio y en ningún caso el vector cero) es linealmente independiente.*

Teorema 7.2. *La suma de los subespacios* $V_1, V_2 \ldots V_p$ *es directa si y sólo si se verifica:*

- $dim\ (V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \ldots \bigoplus V_p) = dimV_1 + dimV_2 + \ldots + dimV_p$

  (Este teorema es la extensión del Teorema 6.9 a p subespacios)

7.2 Ejercicios

Ejercicio 7.1. *Sean* U, V *y* W *las rectas siguientes:*
$U =< (1, 0, -1) >$, $V =< (1, 2, 3) >$, $W =< (-1, 4, a) >$

a) Calcula una base de $U + V + W$ *y describe el lugar geométrico que representa, en función del parámetro* a
b) Argumenta si la suma anterior es o no suma directa, en función del parámetro a.