Capítulo 6

Espacios vectoriales: Parte 4

6.1 Intersección, suma y suma directa de dos subespacios

Intersección

Definición 6.1. *Sean H y F subespacios de V, se define intersección de H y F así :*
$H \bigcap F = \{v \in V / \ \ v \in H \ \text{ y } \ v \in F\}$

Obviamente, $H \bigcap F \subseteq H$, $H \bigcap F \subseteq F$, $H \bigcap F = H \Leftrightarrow H \subseteq F$.

Teorema 6.1. *La intersección de dos subespacios H y F de V es un subespacio vectorial de V.*

Teorema 6.2. $dim(H \bigcap F) \leq dim\ H$ *y* $dim(H \bigcap F) \leq dim\ F$

Teorema 6.3. *Los elementos de $H \bigcap F$ cumplen a la vez las ecuaciones implícitas de H y las ecuaciones implícitas de F, por tanto la forma implícita de $H \bigcap F$ se obtiene uniendo la forma implícita de H y la de F, y eliminando las ecuaciones que sean combinación lineal de otras.*

Ejemplo 6.1. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\}$ *Plano XY*
$F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0\}$ *Plano XZ*
$H \bigcap F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ *Eje X*

Ejemplo 6.2. $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ *Eje X*
$T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ x = 0 \ , \ z = 0\}$ *Eje Y*
$G \bigcap T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$

Ejemplo 6.3. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\}$ *Plano XY*
$S \subset \mathbb{R}^3 =< (1, 1, 1) >$ *Recta no incluida en el Plano XY*
Las ecs. implícitas de S son $x = y$, $x = z$
$H \bigcap S \subset \mathbb{R}^3 = \{(0, 0, 0)\}$ *; $x = y = z = 0$*

<u>**Suma**</u>

Definición 6.2. *Sean H y F subespacios de V, se define suma de H y F así :*
$H + F = \{v \in V \ / \ v = v_1 + v_2 \ \text{ con } \ v_1 \in H \ \text{ y } \ v_2 \in F\}$

OJO: $H + F \neq H \bigcup F$

(se puede analizar por ejemplo tomando H : eje X y F : eje Y en $\mathbb{R}^3$. La suma es el plano XY pero la unión no lo es.)

$H \subseteq H + F \ \ , \ \ F \subseteq H + F \ \ , \ \ H + F = H \Leftrightarrow F \subseteq H.$

Teorema 6.4. *La suma de dos subespacios H y F de V es subespacio vectorial de V.*

Teorema 6.5. *$dim(H + F) \geq dim\ H$ y $dim(H + F) \geq dim\ F$.*

Teorema 6.6. *Los sistemas generadores de $H+F$ se obtienen uniendo a un s.g de H un s.g. de F.*

Teorema 6.7. *Si se unen una base de H y una base de F, y se eliminan los elementos que resultan ser combinación lineal del resto, se obtendrá base de $H + F$.*

Ejemplo 6.4. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\} =< (1, 0, 0), (2, 1, 0) >$ *Plano XY*
$F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0\} =< (3, 0, 0), (0, 0, 7) >$ *Plano XZ*
Estudia $H + F$ y $H \bigcap F$.

Es inmediato comprobar que la unión de las bases de H y F genera $\mathbb{R}^3$.

El SL $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 7 & z \end{array}\right]$ *es en efecto compatible para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.*

$\underbrace{\qquad\qquad}_{s.g.\ de\ H+F}$

Observamos que en este caso el SL es compatible indeterminado, y por tanto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se podrá expresar de infinitas formas como suma de un vector de H y un vector de F. Por ejemplo

$$(6, 1, 7) = (3, 1, 0) + (3, 0, 7) \ \textit{con} \ (3, 1, 0) \in H \ \textit{y} \ (3, 0, 7) \in F$$
$$(6, 1, 7) = (5, 1, 0) + (1, 0, 7) \ \textit{con} \ (5, 1, 0) \in H \ \textit{y} \ (1, 0, 7) \in F$$

- *Suma en forma paramétrica: $H + F = \{(x, y, 0) + (x', 0, z') = (x, y, z)\} = \mathbb{R}^3$*

- *La unión de la base de F y la base de H no es un conjunto l.i. La dimensión del subespacio suma es 3, frente a un valor de 4 para la suma de dimensiones de los dos subespacios.*

  Una base sencilla de $H + F$ se obtiene eliminando de la matriz A el vector de la columna no pivotal. La base resultante es $B = \{(2, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 7)\}$. Sin embargo, puesto que $H + F$ es $\mathbb{R}^3$, la base más sencilla es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

- *Descomposición $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_1 \in H$ y $\vec{v}_2 \in F$ no es única.*

- *Uniendo las ecs. implícitas obtenemos la forma implícita de $H \bigcap F$:* $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

  Resolviendo la forma implícita de $H \bigcap F$ obtenemos una base sencilla de $H \bigcap F$, que es $B = \{(1, 0, 0)\}$, y $dim\ H \bigcap F = 1$

Ejemplo 6.5. $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\} =< (1, 0, 0) >$ *Eje X*
$T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ x = 0 \ , \ z = 0\} =< (0, 1, 0) >$ *Eje Y*
Estudia $G + T$ *y* $G \bigcap T$

Es inmediato comprobar que $G+T=$ *Plano* XY *de* $\mathbb{R}^3$*. En efecto el SL* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid x \\ 0 & 1 & \mid y \\ 0 & 0 & \mid z \end{bmatrix}$ *es compatible si y sólo si* $z = 0$*, es decir, para los vectores* $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$

- *Suma en forma paramétrica:* $G + T = \{(x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x, y, 0) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \ \}$
- *La unión de las bases de* G *y* T *es un conjunto l.i. por tanto la dimensión del espacio suma es igual a la suma de las dimensiones. La base de* $G + T$ *es* $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.
- *Debido a que el SL es compatible determinado,* $(x, y, 0)$ *se expresa de* **forma única** *como suma de un vector de* G *y un vector de* T. $(x, 0, 0) + (0, y, 0)$.
- *Uniendo las ecs. implícitas tenemos* $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ *(la repetida la quitamos), por tanto* $G \bigcap T = \vec{0}$ *y* $dim G \bigcap T \ = 0$.

Ejemplo 6.6. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\} =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$ *Plano XY*
$S \subset \mathbb{R}^3 =< (1, 1, 1) >$ *Recta no incluida en el Plano XY*
Estudia $H + S$ *y* $H \bigcap S$

La unión de las bases de H *y* S *genera* $\mathbb{R}^3$*. En efecto el SL* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \mid x \\ 0 & 1 & 1 & \mid y \\ 0 & 0 & 1 & \mid z \end{bmatrix}$ *es compatible para todo* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

- *Suma en forma paramétrica:* $H + S = \{(x, y, 0) + (\lambda, \lambda, \lambda)\} = \{(x, y, z)\} = \mathbb{R}^3$
- *La unión de las bases de* H *y* S *es un conjunto l.i. por tanto la dimensión del espacio suma es igual a la suma de las dimensiones. La base más sencilla de* $H + S$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.
- *Debido a que el SL es compatible determinado,* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *se expresa de forma única como suma de un vector de* H *y un vector de* S.
- *Uniendo las ecs. implícitas tenemos* $\begin{cases} z = 0 \\ x = y = z \end{cases}$ *, por tanto* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

  $H \bigcap S = \vec{0}$ *y* $dim H \bigcap S \ = 0$.

Suma directa

Definición 6.3. *Se dice que la* **suma** $H+F$ **es directa** *si para cada* $v \in H+F$ *existen* $v_1 \in H$, $v_2 \in F$ *únicos, tales que* $v = v_1 + v_2$. *Se denota* $H \bigoplus F$.

Otra forma de expresar la definición es la siguiente. La suma de H y F es directa si:
$v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, con $v_1, v_1' \in H$, $v_2, v_2' \in F \;\Rightarrow\; v_1 = v_1'$ y $v_2 = v_2'$.

Teorema 6.8. *Sean* H *y* F *dos subespacios vectoriales de* V. *Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) La suma $H+F$ *es directa*

2) Si $v_1 + v_2 = 0_V$, *con* $v_1 \in H$ *y* $v_2 \in F$, *entonces* $v_1 = v_2 = 0_V$

3) Cualquier conjunto $\{v_1, v_2\}$ *con* $v_1 \neq 0_V \in H$ *y* $v_2 \neq 0_V \in F$ *es linealmente independiente. Se dice también que los subespacios* H *y* F *son linealmente independientes.*

4) $H \bigcap F = \{0_V\}$

Demostración:

- $1 \Rightarrow 2$ obvia, pues $O_V + O_V = O_V$ y al ser la descomposición única $v_1 = 0_V$ y $v_2 = 0_V$
- $2 \Rightarrow 1$ Consideremos $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, con $v_1, v_1' \in H$ y $v_2, v_2' \in F$. Entonces $(v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') = 0_V$, perteneciendo el primer sumando a H y el segundo a F. Por la propiedad 2) $v_1 - v_1' = 0_V$ y $v_2 - v_2' = 0_V$, y por tanto $v_1 = v_1'$ y $v_2 = v_2'$, es decir, la suma es directa.
- $2 \Rightarrow 3$ Consideramos el par de vectores no nulos $v_1 \in H$ y $v_2 \in F$. En la combinación lineal $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_V$ el primer sumando pertenece a H y el segundo a F, y de acuerdo con 2) esto implica que $\alpha v_1 = 0_V$ y $\beta v_2 = 0_V$. Por hipótesis ni v_1 ni v_2 son nulos, por tanto se concluye que $\alpha = \beta = 0$, y por tanto que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.
- $3 \Rightarrow 2$ La afirmación 3) establece que en cualquier par de vectores v_1, v_2, con el primero en H y el segundo en F, o bien el par es l.i. o bien alguno de los vectores es el cero. De la suma $v_1 + v_2 = 0_V$ se deduce $v_1 = -v_2$, por tanto los dos vectores no cumplen ser l.i., y por tanto uno de ellos ha de ser el cero, y como $v_1 = -v_2$ ambos son el vector cero.
- $2 \Rightarrow 4$ $v \in H \bigcap F$ implica $v \in H$ y $v \in F$. $v \in F \Rightarrow -v \in F$ y $v + -v = 0_V$ es la suma de un vector de H y un vector de F. Por 2), al ser la suma O_V cada uno de ellos es O_V, por tanto $v = 0_V$
- $4 \Rightarrow 2$ Sean dos vectores $v_1 \in H$ y $v_2 \in F$ tales que $v_1 + v_2 = 0_V$. Reordenando la ecuación obtenemos $v_1 = -v_2$, es decir, uno es el opuesto de otro y por tanto ambos, v_1 y v_2 pertenecen al subespacio intersección. Como este subespacio es el subespacio cero, $v_1 = v_2 = 0_V$.

□

<u>Relación entre la dimensión del subespacio suma y las dimensiones de los sumandos</u>

<u>Para la suma directa</u>

Teorema 6.9. *La suma es directa si y sólo si* $\boxed{dimH + dimF = dim(H \bigoplus F)}$ *(La suma es directa si al unir una base de H y una base de F obtenemos una base de $H \bigoplus F$)*

Demostración: Uniendo una base de H, B_H, y una base de F, B_F, obtendríamos un sistema generaror de $H + F$. Para pasar de s.g. a base habría que extraer los vectores linealmente dependientes, si estos existieran. La suma de H y F es directa si y sólo si todo vector de B_F es l.i. de todos los vectores de H, es decir, si no hay que eliminar ningún vector. Al no tener que eliminar ningún vector la dimensión del subespacio suma es igual al número de vectores en la base B_H más el número de vectores de la base B_F, y en consecuencia $\dim(H \bigoplus F) = \dim H + \dim F$. $\square$

<u>Caso general, incluyendo la suma directa</u>

Teorema 6.10. $\boxed{dimH + dimF = dim(H + F) + dim\ (H \bigcap F)}$

El teorema indica que el número de vectores a eliminar al pasar del s.g. de $H+F$ a la base de $H+F$, después de unir las bases de ambos, es igual a la dimensión del subespacio intersección. En el caso de la suma directa la dimensión de la intersección es nula, y la fórmula encuadrada se simplifica a la encuadrada en el Teorema 6.9.

6.2 Subespacio complementario

Definición 6.4. *Sea H un subespacio vectorial de V. Se dice que G es un subespacio vectorial complementario de H si $V = H \bigoplus G$*

Teorema 6.11. *Todo subespacio vectorial H de un espacio vectorial de dimensión finita V, admite complementario.*

Definición 6.5. *Si V_1 y V_2 son dos subespacios complementarios ($V_1 \bigoplus V_2 = V$), entonces, dado $v \in V$ con $v = v_1 + v_2$ siendo $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, se dice que v_1 es la proyección de v paralelamente a V_2 y que que v_2 es la proyección de v paralelamente a V_1.*

Ejemplo 6.7. *Obtén una base de un subespacio G complementario de $F =< (1,1,1,1),(1,2,3,4) >$.*

Sol.:
F tiene dimensión 2 y es subespacio de $\mathbb{R}^4$, por tanto los subespacios complementarios de F tienen dimensión $4-2=2$.
Para obtener una base de G buscamos un primer vector que no pertenezca a F. Para ello determinamos la forma implícita de F, que constará de dos ecuaciones, y bastará encontar un vector que no cumpla alguna de ellas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | \; x \\ 1 & 2 & | \; y \\ 1 & 3 & | \; z \\ 1 & 4 & | \; t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | \; x \\ 0 & 1 & | \; y-x \\ 0 & 1 & | \; z-y \\ 0 & 1 & | \; t-z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | \; x \\ 0 & 1 & | \; y-x \\ 0 & 0 & | \; z-2y+x \\ 0 & 0 & | \; t-2z+y \end{bmatrix} \quad \text{Forma implícita: } \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-2z+t=0 \end{cases}$$

Un vector sencillo que no cumple el SL es $\vec{b}_3 = (1,0,0,0)$. Este vector forma con los otros dos un conjunto l.i., porque no es c.l. de los anteriores.

Tomando los vectores $\vec{b}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{b}_2 = (1,2,3,4)$ y $\vec{b}_3$, buscamos la forma implícita de su subespacio generado, que tendrá una única ecuación. Cualquier vector $\vec{b}_4$ que no cumpla esa ecuación formará con los tres anteriores una base de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | \; x \\ 1 & 2 & 0 & | \; y \\ 1 & 3 & 0 & | \; z \\ 1 & 4 & 0 & | \; t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | \; x \\ 0 & 1 & -1 & | \; y-x \\ 0 & 1 & 0 & | \; z-y \\ 0 & 1 & 0 & | \; t-z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | \; x \\ 0 & 1 & -1 & | \; y-x \\ 0 & 0 & 1 & | \; z-2y+x \\ 0 & 0 & 1 & | \; t-z-y+x \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | \; x \\ 0 & 1 & -1 & | \; y-x \\ 0 & 0 & 1 & | \; z-2y+x \\ 0 & 0 & 0 & | \; t-2z+y \end{bmatrix} \quad \text{Forma implícita: } y-2z+t=0$$

Podemos tomar $\vec{b}_4 = (0,1,0,0)$, que no es c.l. de los otros tres y por tanto forma con ellos un conjunto l.i.

Una posible base de G es $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

6.3 Ejemplos adicionales de suma e intersección de dos subespacios

Ejemplo 6.8. *Determina los subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^2$ $A+B$ *y* $A\bigcap B$*, siendo* A *y* B *los subespacios de* $\mathbb{R}^2$ *siguientes:*

$A = \{\ (x_1, 0)\ /\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ *es el eje* X *de* $\mathbb{R}^2$
$B = \{\ (0, x_2)\ /\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ *es el eje* Y *de* $\mathbb{R}^2$

$A+B = \{\ (x_1, x_2)\ /\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$
En efecto $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$ *con* $(x_1, 0) \in A$ *y* $(0, x_2) \in B$
Por tanto $A+B = \mathbb{R}^2$

Ejemplo de vector de $A+B = (7,6) = (7,0) + (0,6)$
Ejemplo de vectores de A*:* $(7,0), (-4,0), (1/3,0)$
Ejemplo de vectores de B*:* $(0,4), (0,-200.2), (0,-4/7)$

$A\bigcap B$*:* *La forma implícita de los elementos de* A *es* $x_2 = 0$
La forma implícita de los elementos de B *es* $x_1 = 0$

Por tanto la forma implícita de los vectores comunes es: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ *, y* $A\bigcap B = \{(0,0)\}$

Ejemplo 6.9. *Considera en* $\mathbb{R}^4$ *los subespacios* $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+2y+z-t = 0 \ ; \ z-t = 0\}$ *y* $T =< (1, 1, 1, 1) >$. *a) Obtén una base de* $S + T$, *b) Justifica si la suma es o no directa y c) si los subespacios son o no uno complementario del otro.*

16-17 Primer parcial GIM. Apartados a) y c).

<u>*Solución:*</u>

a) En primer lugar obtenemos una base de S, *resolviendo sus ecuaciones implícitas:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | \ 0 \end{bmatrix}. \text{ La solución tiene la forma paramétrica } \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = t \\ t = t \end{cases},$$

que también puede escribirse como $(-2y, y, t, t)$. *Una base sencilla es:* $\{(-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

Disponemos los vectores base de T *y* S *por columnas y hacemos la eliminación gaussiana para determinar las columnas pivotales.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las tres columnas son pivotales, por lo tanto una posible base de $S + T$ *es la formada por los tres vectores de partida:* $B = \{(1, 1, 1, 1), (-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

b) La suma es directa porque el conjunto formado uniendo las bases de los dos subespacios es linealmente independiente. Eso garantiza que un vector de la suma se escribirá de forma única como suma de un vector de S *y un vector de* T *(sistema compatible determinado).*

c) Los subespacios no son complementarios entre sí porque, aunque su suma es directa, la suma no es igual al espacio completo $\mathbb{R}^4$.

<u>*Observación:*</u> *Podríamos haber adelantado que la dimensión de la suma es 3, sin más que comprobar que* $(1, 1, 1, 1)$ *no está incluido en* S, *ya que no cumple las ecuaciones de* S, *y que por tanto* $(1, 1, 1, 1)$ *forma con la base de* S *un conjunto de tres vectores linealmente independientes.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.10. *Dados en* $\mathbb{R}^4$ *los subespacios* $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+2y+z-t=0\}$ *y* $T =< (1,1,1,1),(2,1,0,0) >$, *obtén:*

a) Una base de $S \bigcap T$

b) Una base de $S+T$

Solución:

a) Intersección:

La forma implícita del subespacio intersección está constituida por las ecuaciones implícitas de los dos subespacios, eliminando del conjunto de ecuaciones aquellas que desaparezcan en la eliminación gaussiana a fin de tener el mínimo número posible de ecuaciones.

- *La forma implícita de* S *la conocemos del enunciado.*
- *A continuación obtenemos la forma implícita de* T, *imponiendo que sea compatible el siguiente SL:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ 1 & 1 & | \ y \\ 1 & 0 & | \ z \\ 1 & 0 & | \ t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ 0 & -1 & | \ y-x \\ 0 & -1 & | \ z-y \\ 0 & 0 & | \ t-z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ 0 & -1 & | \ y-x \\ 0 & 0 & | \ x-2y+z \\ 0 & 0 & | \ t-z \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones implícitas de T *son:* $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ z-t=0 \end{cases}$

Para obtener una base de la intersección hay que resolver el SL formado por las tres ecuaciones (una que aporta S *y las dos que aporta* T*):* $\begin{cases} x+2y+z-t=0 \\ x-2y+z=0 \\ z-t=0 \end{cases}$

Lo resolvemos mediante eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{21(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{13(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{2(-1/4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{F_{12(-2)}}{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$x=-t/2,\ y=t/4\ ,\ z=t,\ t=t$

Forma paramétrica $(-t/2, t/4, t, t)$ *Base más sencilla posible:* $\{(-2,1,4,4)\}$

b) Suma:

Para calcular una base de la suma el procedimiento general consiste en unir las bases de los dos subespacios y eliminar del conjunto los vectores linealmente dependientes. No obstante, es recomendable utilizar la fórmula de las dimensiones de antemano para saber qué dimensión esperamos para el subespacio suma.

dim S *= 3 (una ecuación en* $\mathbb{R}^4$*), dim* T *= 2 (dos vectores que no son uno múltiplo del otro son linealmente independientes), y hemos obtenido que dim* $S \bigcap T$ *= 1.*

Por tanto dim $(S+T)=3+2-1=4$.

Como $(S+T)$ *es subespacio de* $\mathbb{R}^4$ *y tiene dimensión 4, tenemos que* $S+T=\mathbb{R}^4$. *No haría falta calcular una base. Como respuesta podemos dar la base más sencilla de* $\mathbb{R}^4$ *que es la base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *:* $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Con el propósito de confirmar el resultado anterior, y sobre todo a fin de presentar un ejemplo más de suma de subespacios, vamos a calcular la base de la suma a partir de la unión de las dos bases. La base de T *es clara, puesto que los dos vectores son linealmente independientes. La base de* S *se obtiene sin más que resolver la ecuación implícita de* S*:*

$x=-2y-z+t \Rightarrow (-2y-z+t,y,z,t) \Rightarrow$

Una base sencilla es: $B=\{(1,0,-1,0),(1,0,0,1),(-2,1,0,0)\}$. *Al disponer de cinco vectores en* $\mathbb{R}^4$ *(tres por* S *y dos por* T*), ya podríamos deducir, trabajando sólo con la suma, que la intersección no es el subespacio cero. En efecto dimS + dimT = 5 es mayor que la máxima dimensión que puede tener* $S+T$*, que sería 4 por ser sus vectores de* $\mathbb{R}^4$ *(la dimensión máxima corresponde lógicamente a cuando* $S+T$ *es todo* $\mathbb{R}^4$*). De aquí inferimos que la dimensión del subespacio intersección es como mínimo 1.*

Disponemos en columnas los vectores de las dos bases a fin de seleccionar los correspondientes a columnas pivotales, efectuando la eliminación gaussiana.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{S}\!\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{T} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Hay cuatro columnas pivotales, por tanto confirmamos que $S+T$ *es* $\mathbb{R}^4$ *y damos como base más sencilla la base canónica de* $\mathbb{R}^4$.

También se podría haber dado como respuesta la base $B=\{(1,0,-1,0),(1,0,0,1),(-2,1,0,0),(1,1,1,1)\}$ *que son los vectores correspondientes a las columnas pivotales.*

6.4 Ejercicios

Ejercicio 6.1. Manualmente y con MATLAB. *Halla los vectores comunes a los subespacios generados por los conjuntos*
$\{(1,2,3),(3,2,1)\}$ *y* $\{(1,0,1),(3,4,3)\}$. *(Pista: Es lo mismo que pedir el subespacio intersección.)*

Ejercicio 6.2. *Sea el conjunto de vectores* $\{(4,-5,7),(3,-3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)\}$. *Halla un sistema mínimo de generadores del subespacio generado por ellos. Estudia si dicho subespacio es el mismo que el generado por los vectores* $\{(1,-2,3),(3,0,-1)\}$.

Ejercicio 6.3. MATLAB. *Halla para qué valores de α y β los vectores* $\vec{u}_1=(-1,5,4)$ *y* $\vec{u}_2=(\alpha,-2,-2)$ *generan el mismo subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *que los vectores* $\vec{v}_1=(\beta,3,2)$ *y* $\vec{v}_2=(5,1,0)$.

Ejercicio 6.4. *Considera el subconjunto F de $\mathbb{R}^4$ siguiente:*
$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x-y+2z+t=0\}$.
a) Demuestra que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$
b) Halla una base y la dimensión de F
c) Halla la dimensión y una base de un subespacio complementario de F, denotándolo F'
d) Descompón $\vec{v}=(2,1,3,0)\in\mathbb{R}^4$ *como suma de un vector de F y un vector de F'.*

Ejercicio 6.5. Manualmente y con MATLAB. *Argumenta si es posible expresar el vector* $\vec{v}=(3,8,40)$ *como suma de un vector $\vec{z}_1$ del plano Π: $3x-7y-z=0$ y un vector $\vec{z}_2$ de la recta* $r:\{(2,4,7)\lambda \ / \ \lambda\in\mathbb{R}\}$. *En caso de que sea posible calcula $\vec{z}_1$ y $\vec{z}_2$.*
Con otros números: 15-16 Primer parcial GIQ, Septiembre GIM y GIQ.
16-17 Primer parcial GIQ

Ejercicio 6.6. *Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y su base estándar* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. *Sea L_1 el subespacio vectorial generado por $\vec{a}_1=\vec{e}_1$ y $\vec{a}_2=\vec{e}_2$. a) Determina si L_2 es un subespacio complementario de L_1, siendo L_2 el subespacio generado por $\vec{a}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$. b) Descompón $\vec{z}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$ de modo que $\vec{z}=\vec{z}_1+\vec{z}_2$ con $\vec{z}_1\in L_1$ y $\vec{z}_2\in L_2$.*

Ejercicio 6.7. *Sean U y V las rectas siguientes:*
$U=<(1,0,-1)>$, $V=<(1,2,3)>$
a) Calcula una base de $U+V$ y describe qué lugar geométrico representa
b) Argumenta si la suma anterior es o no suma directa

Ejercicio 6.8. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios* $U=\{(a+b,0,a,b) \ / \ a,b\in\mathbb{R}\}$ *y* $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \ / \ x_1-x_4=0 \ ; \ x_3=0\}$. *Se pide:*
a) Encontrar una base de U y las ecuaciones implícitas de U.
b) Encontrar una base de V.
c) Obtener dimensión y una base tanto de $U\bigcap V$ como de $U+V$.
d) En caso de que $U+V\neq\mathbb{R}^4$, hallar un posible subespacio complementario de $U+V$.

Ejercicio 6.9. *Considerados en $\mathbb{R}^4$ los subespacios* $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+2y+z-t=0 \ ; \ z-t=0\}$ *y* $T=<(1,1,1,1)>$.
a) Obtén una base de $S+T$.
b) Justifica si S y T son o no complementarios entre sí .
16-17 1er parcial GIM

Ejercicio 6.10. *Dados los subespacios* $U=<(5,0,-5,10),(0,11,11,0)>$ *y* $V=\begin{cases}2x-2y+z+t=0\\ 2x-t=0\end{cases}$,
obtén una base de $U\bigcap V$.
16-17 1er parcial GIM
16-17 Junio GIQ

Ejercicio 6.11. *Considera los siguientes subespacios de* $\mathbb{R}^5$*:*
$U :< (1,2,1,1,1),(2,0,0,0,-1) >$ $V :< (3,2,1,a+2,0) >$
Señala cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) $U+V$ *no es suma directa para ningún* $a \in \mathbb{R}$ *b)* $U+V$ *es suma directa si y sólo si* $a \neq -1$
c) La suma es directa si y sólo si $a = -1$ *d) Ninguna de las anteriores*

15-16 Primer parcial GIQ, Septiembre GIQ.
16-17 Junio GIQ

Ejercicio 6.12. *Considera el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2,* $M_{2\times 2}$*, y en él los subespacios* D *formado por las matrices diagonales y* S *formado por las matrices simétricas.*

a) Obtén una base y la dimensión de $D+S$*.*

b) Determina si la suma es o no suma directa.

c) Interpreta el resultado obtenido para el conjunto subespacio suma $D+S$*, en relación con los conjuntos subespacio* D *y subespacio* S*.*
16-17 1er parcial GIQ
16-17 Junio GIM Apartados a) y b)