

Lecciones de Álgebra y Geometría

Ruth Carballo Fidalgo
Dpto. de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria

Última revisión: 24 de Enero de 2009

Contenidos

1	Matrices y determinantes	1
1.1	Definición de matriz y algunos tipos de matrices	1
1.2	Operaciones con matrices y propiedades de las operaciones	2
1.2.1	Igualdad de matrices	2
1.2.2	Suma y diferencia de matrices	2
1.2.3	Propiedades de la suma de matrices	2
1.2.4	Producto de una matriz por un escalar α del mismo cuerpo	3
1.2.5	Propiedades del producto de una matriz por un escalar del mismo cuerpo	3
1.2.6	Producto de matrices	3
1.2.7	Propiedades del producto de matrices	4
1.3	Transformaciones de una matriz	5
1.3.1	Traspuesta de una matriz	5
1.3.2	Conjugada de una matriz	7
1.4	Matrices cuadradas	7
1.4.1	Definición	7
1.4.2	Tipos de matrices cuadradas	7
1.4.3	Matriz inversa	9
1.4.4	Potencia de una matriz cuadrada	9
1.5	Determinante	10
1.5.1	Definición	10
1.5.2	Cálculo de un determinante de orden n , por adjuntos	11
1.5.3	Propiedades de los determinantes	12
1.5.4	Cálculo de la inversa de una matriz, por adjuntos	14
1.6	Algunos teoremas sobre matrices inversibles	15
1.7	Matrices ortogonales	15
1.8	Operaciones elementales y matrices elementales	16
1.8.1	Definición y propiedades	16
1.9	Matrices equivalentes por filas	18
1.9.1	Aplicación para el cálculo de la inversa de una matriz	18
1.10	Formas escalonada y reducida de una matriz	21
1.10.1	Definiciones	21
1.10.2	Transformación mediante operaciones elementales por filas a las formas escalonada y reducida	21
1.11	Rango de una matriz	24
1.11.1	Aplicación para matrices cuadradas: relación equivalencia por filas a la identidad, determinante, existencia de inversa y rango	25
1.12	Ejercicios	27
1.13	Soluciones	31

2	Sistemas de ecuaciones lineales	39
2.1	Definiciones. Sistemas equivalentes	39
2.2	Resolución de SL con métodos de eliminación gaussiana	40
2.3	Representación de un SL por una ec. matricial $A\vec{x} = \vec{b}$	45
2.3.1	La ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$	45
2.3.2	Representación de un SL por una ec. vectorial	45
2.3.3	Conclusiones	45
2.3.4	El producto Matriz-Vector	46
2.4	Sistemas lineales homogéneos	47
2.4.1	Definición	47
2.4.2	Relación entre la solución de un SL no homogéneo y la del correspondiente homogéneo	47
2.5	Resolución de SL cuya matriz de coeficientes es inversible	50
2.5.1	Utilizando la inversa	50
2.5.2	Método de Cramer	50
2.6	Resolución de SL por métodos iterativos	51
2.6.1	Introducción	51
2.6.2	Marco general para la solución iterativa del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$	52
2.6.3	Método de Jabobi	52
2.6.4	Método Gauss-Seidel	53
2.6.5	Una condición suficiente para la convergencia por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel	54
2.6.6	Ejemplos	54
2.7	Ejercicios	57
2.8	Soluciones	63
3	Espacios vectoriales	68
3.1	Definición de espacio vectorial	68
3.2	Ejemplos	69
3.2.1	$(M_{m \times n}, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial	69
3.2.2	$(M_{m \times n}, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}$ no es espacio vectorial	69
3.2.3	$(M_{m \times n}, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial	69
3.2.4	$(M_{m \times n}, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ es espacio vectorial	69
3.2.5	$\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial	69
3.2.6	$\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial	71
3.2.7	$\mathbb{C}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$	71
3.3	El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$	71
3.3.1	Combinación lineal	72
3.3.2	Dependencia e independencia lineal	73
3.3.3	Sistema de generadores	77
3.3.4	Base	78
3.3.5	Coordenadas de un vector relativas a una base	79
3.3.6	Matriz de cambio de base/coordenadas en un espacio vectorial	80
3.4	Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$	82
3.4.1	Definición	82
3.4.2	Subespacio generado	82
3.4.3	Ejemplos de subespacios. Ecuaciones paramétricas e implícitas	83
3.4.4	Sistema generador, base y dimensión de un subespacio	87
3.4.5	Intersección, suma y suma directa de dos subespacios	90
3.4.6	Suma directa de p subespacios	93
3.5	Ejercicios	94
3.6	Soluciones	98

4	Aplicaciones lineales	111
4.1	Introducción	111
4.2	Aplicaciones lineales. Definición, propiedades y ejemplos	111
4.3	Aplicación lineal sobreyectiva, inyectiva, biyectiva	112
4.4	Matriz estándar asociada a una aplicación lineal	112
4.5	Núcleo e imagen de una aplicación lineal	116
4.6	Bases de $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$	116
4.7	Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales	120
4.8	Aplicaciones lineales inversibles	121
4.9	Matriz asociada a una aplicación lineal (bases cualesquiera)	121
4.10	Relación entre las matrices asociadas a una aplicación lineal, respecto a bases distintas	122
4.10.1	A de canónica a canónica, F de B a B'	122
4.10.2	El caso más general: F de B a B' , R de C a C'	122
4.11	Matrices equivalentes	125
4.12	Endomorfismos y matrices semejantes	126
4.13	Matriz diagonalizable	126
4.14	Geometría de algunas aplicaciones lineales en el plano	127
4.15	Ejercicios	131
4.16	Soluciones	136
5	Valores y vectores propios. Diagonalización	148
5.1	Endomorfismos	148
5.2	Valores y vectores propios	148
5.3	Obtención de los valores propios: polinomio característico	149
5.4	Subespacio propio	151
5.5	Dimensión del subespacio propio	151
5.6	Obtención de los subespacios propios	152
5.7	Los cuatro casos en $\mathbb{R}^2$	152
5.8	Ejemplos en $\mathbb{R}^3$	153
5.9	La independencia lineal de los subespacios propios	155
5.10	Existencia o no de base de vectores propios	156
5.11	Propiedades de autovalores y autovectores	158
5.12	Diagonalización	159
5.13	Aplicación de la diagonalización para obtener la potencia de una matriz	163
5.14	Valores propios complejos	165
5.15	Ejercicios	167
5.16	Soluciones	170
6	$\mathbb{R}^n$ como espacio euclídeo	177
6.1	Producto escalar euclídeo	177
6.2	Longitud o norma de un vector	177
6.3	Distancia en $\mathbb{R}^n$	179
6.4	Vectores ortogonales	180
6.5	Conjuntos ortogonales y base ortogonal	181
6.6	Coordenadas relativas a una base ortogonal	182
6.7	Ángulo entre dos vectores	184
6.8	Matriz ortogonal y base ortonormal	185
6.9	Subespacios vectoriales ortogonales	185
6.10	Complemento ortogonal de un subespacio	185
6.11	Descomposición ortogonal de un vector de $\mathbb{R}^n$. Proyección ortogonal	188
6.12	Proyección ortogonal sobre un subespacio del que conocemos una base ortogonal	190

6.13	Ortogonalización de Gram-Schmidt	192
6.14	Matriz de proyección ortogonal	196
6.15	Resolución de sistemas lineales incompatibles. Método de mínimos cuadrados	198
6.16	Ajuste de datos (x, y) mediante polinomios	200
6.17	Endomorfismos ortogonales	203
6.18	Los endomorfismos ortogonales del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$	204
6.19	Ejercicios	206
6.20	Soluciones	208
7	Geometría en el espacio afín	214
7.1	Espacio afín	214
7.2	Ecuaciones de rectas y planos	216
7.2.1	Ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuación continua de una recta	216
7.2.2	Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de un plano	218
7.2.3	Ecuación general del plano o ec. implícita del plano. Vector normal	218
7.2.4	Recta mediante ecuaciones implícitas	219
7.2.5	Haz de planos que tienen por arista la recta r	221
7.3	Posiciones relativas de rectas y planos	222
7.3.1	Resumen de las condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre rectas y planos	222
7.3.2	Posiciones relativas de dos planos en el espacio (implícitas)	224
7.3.3	Posiciones relativas de una recta y un plano (implícitas)	225
7.3.4	Posiciones relativas de dos rectas en el espacio (implícitas)	225
7.3.5	Posiciones relativas de dos rectas (paramétricas)	226
7.4	Distancia entre puntos, rectas y planos	227
7.4.1	Distancia de un punto a una recta	227
7.4.2	Distancia de un punto a un plano	229
7.4.3	Distancia entre dos rectas disjuntas	230
7.4.4	Distancia entre dos planos paralelos	231
7.4.5	Distancia entre una recta y un plano paralelos	231
7.5	Ángulos entre rectas y planos	231
7.6	Ejercicios	232
7.7	Soluciones	235
8	Variedades cuadráticas	248
8.1	Diagonalización ortogonal de matrices simétricas	248
8.2	Definición de forma cuadrática	250
8.3	Diagonalización de una forma cuadrática	250
8.4	Visión geométrica de los ejes principales	250
8.5	Clasificación de las formas cuadráticas	253
8.6	Aplicación: Ejes principales de una elipse	254
8.7	Ejercicios	255
8.8	Soluciones	256

CAPÍTULO 1

Matrices y determinantes

1.1 Definición de matriz y algunos tipos de matrices

Una matriz es una ordenación rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas encerrados entre corchetes, por ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2+i & 1-i & 0-3i \\ 3-2i & 2+6i & -2-i \\ 0-i & 1+i & 2+0i \end{bmatrix}$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas $A, B, C, \dots$ y sus elementos por minúsculas con dos subíndices, a_{ij} . Los subíndices indican, respectivamente, la fila y la columna en la que se sitúa el elemento.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{Se denota } A = \{a_{ij}\}$$

Una matriz de m filas y n columnas se dice que es una matriz de **orden** $m \times n$, y esto también se denota así: $A_{m \times n}$. El primer índice se refiere siempre al número de filas y el segundo al número de columnas.

Las matrices que trataremos serán matrices que tengan como elementos números reales ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) o números complejos ($a_{ij} \in \mathbb{C}$).

Tanto el conjunto $\mathbb{R}$ como el conjunto $\mathbb{C}$ tienen lo que se llama estructura de **cuerpo**. A un cuerpo se le denota genéricamente como $\mathbb{K}$, y por tanto se dirá de los elementos de una matriz que pertenecen a $\mathbb{K}$. Entenderemos que $\mathbb{K}$ es el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, o el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$. Ambos son **cuerpo conmutativo**.

La matriz ejemplo B se puede considerar como una matriz en el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, o también en el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$, sin más que tener en cuenta que todo real es un elemento de $\mathbb{C}$ con parte imaginaria nula.

La matriz ejemplo C es una matriz en el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$, pues aunque tenga algún elemento real, como el $a_{33} = 2+0i = 2$, contiene también elementos complejos.

Definimos a continuación algunos tipos de matrices.

1) **Matriz cuadrada** es aquella en que $m = n$

Una matriz cuadrada de n filas y n columnas se dice que es una matriz de orden n . Una matriz de este tipo se denota como $A_{n \times n}$ o A_n . En una matriz cuadrada la **diagonal principal** es la línea formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

2) **Matriz rectangular** es aquella en que $m \neq n$. Como casos particulares tenemos.

2.1) **Matriz fila** es una matriz de orden $1 \times n$, $A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]$

2.2) **Matriz columna** es una matriz de orden $m \times 1$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$

A una matriz columna se le denomina también **vector**.

3) **Matriz nula** es aquella que tiene todos los términos nulos. Se denota como $A = 0$. El elemento nulo de un cuerpo es el elemento neutro de la suma. El elemento nulo de los números reales es 0, y el elemento nulo de los números complejos es $0 + 0i$.

1.2 Operaciones con matrices y propiedades de las operaciones

Sea $(M_{m \times n}, \mathbb{K})$ el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con elementos del cuerpo $\mathbb{K}$.

1.2.1 Igualdad de matrices

Decimos que dos matrices $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ del mismo orden son iguales si $\{a_{ij}\} = \{b_{ij}\} \quad \forall \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$

1.2.2 Suma y diferencia de matrices

Dadas $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$, se define $A \pm B$ como la matriz $C = \{c_{ij}\}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Para poder sumar ó restar dos matrices deben tener el mismo orden, y el resultado es de ese mismo orden.

Ejemplo 1.1 Calcular $A + B$ y $A - B$ siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

El resultado es una matriz del mismo orden, en nuestro caso 3×2 .

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Propiedades de la suma de matrices

Tanto para las matrices en $\mathbb{R}$ como para las matrices en $\mathbb{C}$ (separadamente), se cumplen las siguientes propiedades.

- 1) Operación cerrada: $\forall A, B \in M, A + B \in M$
- 2) Asociativa: $\forall A, B, C \in M, A + (B + C) = A + (B + C)$
- 3) Elemento neutro: $\forall A \in M, \exists 0 \in M / A + 0 = A$
- 4) Conmutativa: $\forall A, B \in M, A + B = B + A$
- 5) Existencia de elemento opuesto:

$$\forall A \in M \quad \exists -A / A + (-A) = 0$$

A la matriz $-A$ se la denomina **matriz opuesta** de A .

Si $A = \{a_{ij}\}$, los elementos de $-A$ son: $-A = \{-a_{ij}\}$

El elemento opuesto de $a \in \mathbb{R}$ es $-a \in \mathbb{R}$

El elemento opuesto de $a + bi \in \mathbb{C}$ es $-a - bi \in \mathbb{C}$. (Signo opuesto en la parte real y en la parte imaginaria).

1.2.4 Producto de una matriz por un escalar α del mismo cuerpo

Dada $A = \{a_{ij}\}$ definida en el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se define

$$\alpha A = A\alpha = C \Leftrightarrow \alpha a_{ij} = c_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

$$\alpha, a_{ij} \text{ y } c_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Es decir, se define como otra matriz $C = \{c_{ij}\}$ cuyos elementos se forman multiplicando α por cada uno de los elementos de $A = \{a_{ij}\}$

La matriz C es del mismo orden que A .

Para matrices en el cuerpo $\mathbb{R}$, tomando los escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ se garantiza que la operación sea cerrada, es decir que la matriz producto resulte ser una matriz en el cuerpo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2 $5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & 5 & 15 \end{bmatrix}$

Ejemplo 1.3 $(5+i) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+i & -5-i & 0 \\ 10+2i & 5+i & 15+3i \end{bmatrix}$

Ejemplo 1.4 $5 \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 2-i & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (1+i) & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot (2-i) & 5 \cdot 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+5i & 0 \\ 10-5i & 15i \end{bmatrix}$

Ejemplo 1.5 $(5+i) \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 2-i & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5+i) \cdot (1+i) & (5+i) \cdot 0 \\ (5+i) \cdot (2-i) & (5+i) \cdot 3i \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} 4+6i & 0 \\ 11-3i & -3+15i \end{bmatrix}$

1.2.5 Propiedades del producto de una matriz por un escalar del mismo cuerpo

Se cumplen las siguientes propiedades para las matrices en el cuerpo $\mathbb{R}$ y en el cuerpo $\mathbb{C}$, separadamente.

- 1) Cerrada: $\forall A \in M$ en $\mathbb{K}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha A \in M$ en $\mathbb{K}$
- 2) Distributiva respecto a la suma de matrices: $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall A, B \in M, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- 3) Distributiva respecto a la suma de escalares:
 $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall A \in M, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- 4) Asociativa respecto del producto por escalares:
 $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A) \quad \forall A \in M, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- 5) $1 A = A$
 1 es el elemento neutro del producto en el cuerpo $\mathbb{K}$
 En $\mathbb{R}$ es el escalar 1, ejemplo 1. $-25 = -25$
 En $\mathbb{C}$ es el escalar $1+0i$, ejemplo $(1+0i) \cdot (2-6i) = (2-6i)$

1.2.6 Producto de matrices

Dadas dos matrices $A_{m \times n} = \{a_{ij}\}$ y $B_{n \times p} = \{b_{ij}\}$, compatibles para el producto, es decir, tales que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B , se define $A \cdot B = C$, como otra matriz $C_{m \times p}$ con tantas filas como A y tantas columnas como B , siendo su elemento c_{ij} el resultado de sumar los productos de los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B , en la forma dada en el siguiente sumatorio:

$$C = A \cdot B = \{c_{ij}\} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, p$$

El algoritmo puede entenderse facilmente observando el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & & \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} & & - \\ & & - \\ & & - \\ & & - \\ & & - \\ & & - \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & - \\ & & \end{array} \right] \\
 \text{fila } i & \text{columna } j & c_{ij} \\
 m \times n & n \times p & m \times p
 \end{array}$$

Ejemplo 1.6 Multiplicar las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot -1 + 1 \cdot -2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + -1 \cdot -1 + -2 \cdot -2 & 0 \cdot 0 + -1 \cdot 2 + -2 \cdot 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7 Multiplicar las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3] =$$

14

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

AC, CA, CB, BC no son operaciones posibles

1.2.7 Propiedades del producto de matrices

1) Asociativa: $\forall A, B, C \in M \quad A.(B.C) = (A.B).C$

2) Distributiva respecto a la suma de matrices:

$$\begin{aligned}
 \forall A, B, C \in M \quad A.(B + C) &= (A.B) + (A.C) \\
 (A + B).C &= A.C + B.C
 \end{aligned}$$

3) En general el producto de matrices no es conmutativo: $A.B \neq B.A$

Una condición necesaria, aunque no suficiente, para que se cumpla $A.B = B.A$ es que A y B sean matrices cuadradas del mismo orden.

$$\begin{aligned}
 A_{m \times n} B_{n \times p} &= C_{m \times p} \\
 B_{n \times p} A_{m \times n} &= C'_{n \times n}
 \end{aligned}$$

Tenemos por una parte que el producto es de orden $m \times p$, y por otra que $p = m$ (para poder multiplicar B por A) y que el producto es de orden $n \times n$. Para que C y C' sean del mismo orden se requiere $m = p = n$. Por tanto A y B han de ser matrices cuadradas de orden n .

Se dice que dos matrices cuadradas de orden n conmutan o que son conmutativas o que son permutables si se cumple la igualdad $A.B = B.A$

En algunos casos se verifica que $A.B = -B.A$, entonces se dice que las matrices cuadradas de orden A y B son anticonmutativas o antipermutables.

4) El producto de matrices tiene divisores de cero: $A.B = 0$ no implica necesariamente que $A = 0$ ó $B = 0$

5) El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación:

Si $A.B = A.C$ no necesariamente $B = C$

Ejemplo 1.8 Ejemplo de dos matrices cuadradas del mismo orden que no son permutables.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.9 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq 0 \quad y \quad A.B = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.10 $A.B = A.C$, sin embargo $B \neq C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sin embargo, $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

1.3 Transformaciones de una matriz

1.3.1 Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A_{m \times n}$ se llama traspuesta de A y se denota A^t , a la matriz que resulta de cambiar ordenadamente sus filas por sus columnas.

A^t será entonces de orden $n \times m$. $a_{ij}^t = a_{ji} \quad \forall \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, m$

Ejemplo 1.11 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Propiedades:

- 1) $(A^t)^t = A$
- 2) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- 3) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
- 4) $(A \cdot B)^t = B^t A^t$

Demostración de la propiedad 4):

Sea $AB = C$

$$c_{ij}^t = c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{kj}^t b_{ik}^t = \sum_{k=1}^n b_{ik}^t a_{kj}^t$$

La penúltima igualdad se obtiene por cumplir la propiedad conmutativa el producto de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$.

El primer término de la igualdad es el elemento (i, j) de $(A.B)^t$ y el último término es el elemento (i, j) de la matriz $B^t A^t$. Concluyendo entonces que $(AB)^t = B^t A^t$

Cuando A es cuadrada tenemos:

Matriz simétrica: Una matriz A_n es simétrica si $A = A^t$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$ para todos los valores de i y de j .

Ejemplo 1.12 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica

Matriz antisimétrica o hemisimétrica: Una matriz A_n es antisimétrica si $A = -A^t$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos los valores de i y de j . Evidentemente, para los elementos de la diagonal principal se concluye $a_{ii} = -a_{ii}$, por tanto $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 1.13 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz antisimétrica

Teorema 1.1 Dada una matriz cuadrada A_n , $A + A^t$ es una matriz simétrica.

Demostración:

Definimos $C = A + A^t$

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^t = a_{ji}^t + a_{ji} = a_{ji} + a_{ji}^t = c_{ji}$$

(La tercera igualdad se cumple por la propiedad conmutativa de la suma de los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$). ■

Teorema 1.2 Dada una matriz cuadrada A_n , $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

Demostración:

Definimos $C = A - A^t$

$$c_{ij} = a_{ij} - a_{ij}^t = a_{ji}^t - a_{ji} = -a_{ji} + a_{ji}^t = -(a_{ji} - a_{ji}^t) = -c_{ji}$$

(La tercera igualdad se cumple por la propiedad conmutativa de la suma de los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$). ■

Teorema 1.3 Toda matriz cuadrada A_n , se puede expresar como suma de una matriz simétrica S y otra antisimétrica H : $A = S + H$

Demostración:

$$A = S + H \quad [1]$$

y tomando traspuestas $A^t = S^t + H^t$

Por otra parte $S^t = S$ y $H^t = -H$, por tanto $A^t = S - H$ [2]

Sumando [1] y [2] obtenemos $A + A^t = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}(A + A^t)$

Restando [1] y [2] obtenemos $A - A^t = 2H \Rightarrow H = \frac{1}{2}(A - A^t)$

Hemos demostrado cómo obtener S y H a partir de A ■

Ejemplo 1.14 Descomponer $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

1.3.2 Conjugada de una matriz

Dada una matriz $A_{m \times n}$ se llama conjugada de A y se denota $\overline{A}$, a una nueva matriz cuyos elementos son los conjugados de los elementos de A .

La parte real de los elementos no varía, mientras que la parte imaginaria cambia de signo.

Propiedades:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \overline{A}$$

$$\overline{A \pm B} = \overline{A} \pm \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$$

Si todos los elementos de A son reales $\overline{A} = A$

Si todos los elementos de A son imaginarios puros $\overline{A} = -A$

Cuando A es cuadrada tenemos:

A_n se dice hermítica o autoadjunta si $\overline{A^t} = A$, es decir, si $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos los valores de i y j . Obviamente, los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica han de ser números reales.

A_n se dice antihermítica o hemihermítica si $\overline{A^t} = -A$, es decir, si $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ para todos los valores de i y j . Se desprende que los elementos de la diagonal principal de una matriz antihermítica han de ser nulos o imaginarios puros.

1.4 Matrices cuadradas

1.4.1 Definición

Una matriz cuadrada es una matriz con igual número de filas que de columnas.

En una matriz cuadrada A_n se llama “diagonal principal” a la línea formada por los elementos cuyos subíndices de fila y columna coinciden: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Se llama “triángulo superior” al formado por los elementos a_{ij} situados por encima de la diagonal principal.

Se llama “triángulo inferior” al formado por los elementos a_{ij} situados por debajo de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} * & \diamond & \diamond & \diamond \\ \circ & * & \diamond & \diamond \\ \circ & \circ & * & \diamond \\ \circ & \circ & \circ & * \end{bmatrix}$$

* diagonal principal

$\diamond$ triángulo superior

$\circ$ triángulo inferior

1.4.2 Tipos de matrices cuadradas

Matriz triangular superior. Matriz cuadrada que tiene el triángulo inferior nulo. O lo que es lo mismo, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Matriz triangular inferior. Matriz cuadrada que tiene el triángulo superior nulo. O lo que es lo mismo, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Matriz diagonal. Es aquella que es triangular superior y triangular inferior a la vez. Entre éstas cabe destacar la **matriz escalar**, matriz cuya diagonal principal tiene todos los elementos iguales. La **matriz unidad** es una matriz escalar cuya diagonal principal está formada sólo por unos. La matriz unidad también se denomina **matriz identidad**. La matriz identidad de orden n se denota como I_n .

Se cumple:

$$I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$$

$$A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$$

$$I_m A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$$

Ejemplo 1.15 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Se cumple:

$$I_2.A = A$$

$$A.I_3 = A$$

$$I_2.A.I_3 = A$$

Ejemplo 1.16 $\begin{bmatrix} 2+i & 7-3i \\ 4i & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & 7-3i \\ 4i & 6 \end{bmatrix}$

Teorema 1.4 El producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

Teorema 1.5 El producto de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.

Ejemplo 1.17 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 29 & 12 \end{bmatrix}$

Teorema 1.6 El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. Además $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$

Ejemplo 1.18 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$

Teorema 1.7 Una matriz diagonal conmuta con todas las matrices diagonales. Es consecuencia de que el producto de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ sea conmutativo.

Ejemplo 1.19 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.20 En este ejemplo se observa como se obtiene el producto de una matriz dada por una matriz diagonal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

En el primer caso queda cada columna multiplicada por el elemento de la diagonal. En el segundo queda cada fila multiplicada por el elemento de la diagonal.

$$A.D$$

$$D.A$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}d_{kj} = a_{ij}d_{jj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik}a_{kj} = d_{ii}a_{ij}$$

1.4.3 Matriz inversa

Dada una matriz $A \in M_n$ decimos que F es la inversa de A si: $A \cdot F = F \cdot A = I$.

La inversa de A se denota como A^{-1} , es decir $F = A^{-1}$, y se tiene entonces $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A^{-1} \in M_n$$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una matriz A que posee inversa se denomina **matriz regular** o **matriz inversible**.

Propiedades

Dadas A y B inversibles y $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ se cumple:

- 1) A^{-1} es única
- 2) $(A^{-1})^{-1} = A$
- 3) $A \cdot B$ es inversible, y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 4) $(\alpha \cdot A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$

Dem.

- 1) Suponemos que A^{-1} es la inversa de A , y sea C otra matriz tal que $CA = I$ y $AC = I$ consideramos la igualdad $AC = I$ y multiplicamos por A^{-1} por la izquierda $A^{-1}AC = A^{-1}I = A^{-1} \Rightarrow C = A^{-1}$ (pues $A^{-1}AC = IC = C$). concluimos que C es la misma matriz que A^{-1} .

- 2) $AA^{-1} = I \quad A^{-1}A = I$
 $\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$, A es la matriz que multiplicada por la derecha o por la izquierda por A^{-1} produce la identidad.

- 3) Consideramos el producto $B^{-1}A^{-1}$
 $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$
 $ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$
 $\Rightarrow (B^{-1}A^{-1}) = (AB)^{-1}$

- 4) $\alpha^{-1}A^{-1}\alpha A = \alpha^{-1}\alpha A^{-1}A = 1I = I$
 $\alpha A\alpha^{-1}A^{-1} = \alpha\alpha^{-1}AA^{-1} = 1I = I$
 $\Rightarrow \alpha^{-1}A^{-1} = (\alpha A)^{-1}$

1.4.4 Potencia de una matriz cuadrada

Dada una matriz A_n y k un entero positivo, entonces A^k denota el producto de A k veces.

$$A^k = \overbrace{AA \dots A}^{k \text{ veces}}$$

Se define $A^{-k} = (A^{-1})^k$

Se define $A^0 = I$

Matriz periódica de período n es aquella que verifica que $A^n = A$, siendo $n \geq 2$.

Cuando $n = 2$, $A^2 = A$, se dice que A es idempotente

Matriz nilpotente de índice n es aquella matriz A que verifica $A^n = 0$, siendo n el menor entero para el que se cumple la igualdad.

Matriz involutiva es la matriz A que verifica $A^2 = I$,

Si A es involutiva $AA = I$, es decir, $A^{-1} = A$

1.5 Determinante

1.5.1 Definición

A toda matriz cuadrada A_n le asociamos un número denominado **determinante de A** , $\det A$ o $|A|$ simbolizado así :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Este número se calcula sumando todos los productos que se obtienen al multiplicar n elementos de la matriz de todas las formas posibles, con la condición de que en cada producto exista un único elemento de cada fila y un único elemento de cada columna; cada uno de estos productos llevará su signo o el contrario según la permutación formada por los subíndices fila de los n factores y la formada por los subíndices columna de los n factores, sean o no de la misma clase.

Cada sumando tiene esta forma:

$$a_{1i} a_{2j} \dots a_{n-1l} a_{nk}$$

siendo $i, j, \dots, l, k$ una permutación de $1, 2, \dots, n$. Por simplicidad hemos tomado para las filas el orden natural.

Como el número de permutaciones (ordenaciones) de n elementos distintos $1, 2, \dots, n-1, n$ es $n!$, el número de sumandos es $n!$

Dos permutaciones son de la misma clase (distinta clase) cuando para pasar de una otra se necesite un número par (impar) de intercambios (inversiones).

Cuando el determinante es de una matriz de orden 2 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \circ & \\ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \bullet \\ \bullet & \end{vmatrix}$$

Filas	Columnas	Signo
1 2	1 2	Misma clase +
1 2	2 1	Distinta clase -

Para un determinante de orden 3 resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Filas	Columnas	Signo	Inversiones
1 2 3	1 2 3	Misma clase +	0
1 2 3	1 3 2	Distinta clase -	1
1 2 3	2 1 3	Distinta clase -	1
1 2 3	2 3 1	Misma clase +	2
1 2 3	3 1 2	Misma clase +	2
1 2 3	3 2 1	Distinta clase -	1

La regla de Sarrus simplifica la obtención del determinante de orden 3.

con signo $+$ $\left| \begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right|$; con signo $-$ $\left| \begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right|$

Ejemplo 1.21 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 2 - 3 - 8 - 0 = -7$$

$$\begin{vmatrix} 2+i & 4-i \\ 6 & 5i \end{vmatrix} = (2+i)5i - 6(4-i) = 10i - 5 - 24 + 6i = 16i - 29$$

1.5.2 Cálculo de un determinante de orden n, por adjuntos

El desarrollo de determinantes de orden superior a 3 se complica enormemente. Vamos a describir un método en el que el cálculo del determinante de una matriz de orden n se reduce básicamente al cálculo de otros determinantes de orden inferior.

Sea la matriz $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, se llama **menor complementario** de un

elemento a_{ij} y se denota m_{ij} al determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j .

Se denomina **adjunto** de un elemento a_{ij} y se denota A_{ij} , al producto del menor complementario m_{ij} de a_{ij} por el signo que resulte de calcular $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

Se puede demostrar una propiedad interesante (la propiedad X en la lista que damos más adelante) que es la siguiente: el valor del determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) de A por sus respectivos adjuntos. Es decir

elegida una fila i $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$

ó

elegida una columna j $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$

Ejemplo 1.22 Calcular el valor del siguiente determinante por adjuntos de la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\ + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \dots
\end{aligned}$$

1.5.3 Propiedades de los determinantes

I) El valor de un determinante no varía cuando cambiamos ordenadamente sus filas por sus columnas. $|A| = |A^t|$.

II) Si se intercambian entre sí dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.

III) Si todos los elementos de una línea tienen un factor común, el determinante puede obtenerse como el producto de ese factor común por el determinante que resulta de eliminar ese factor común en la correspondiente línea (dividiendo los elementos de esa línea por el factor común).

$$\text{por ejemplo } \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

IV) Si los elementos de una línea (fila ó columna) son nulos, el determinante es nulo. (Consecuencia inmediata de la propiedad III).

V) Un determinante con dos líneas paralelas iguales es nulo. (Consecuencia inmediata de II).

VI) Si la matriz A tiene dos líneas paralelas proporcionales el determinante de A es nulo. Consecuencia de III y V, pues al sacar factor común quedarán dos líneas iguales.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{11} \\ a_{21} & \alpha a_{21} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0$$

VII) Si los elementos de una línea están formados por una suma de r sumandos, el determinante se puede descomponer en suma de r determinantes que tienen las restantes líneas iguales y en el lugar de aquella, otra formada por los primeros, segundos, terceros, etc, sumandos.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a+b+c & 5 & 0 \\ d+e+f & 1 & -1 \\ g+h+i & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5 & 0 \\ d & 1 & -1 \\ g & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ e & 1 & -1 \\ h & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 5 & 0 \\ f & 1 & -1 \\ i & 0 & 4 \end{vmatrix} \\
&\begin{vmatrix} 2+a & 1 \\ a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

VIII) Si a los elementos de una línea se le suman los correspondientes a otra paralela multiplicados por un número, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \alpha a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| + \alpha \cdot 0 = |A|$$

IX) Si los elementos de una línea resultan de sumar los correspondientes de otras paralelas multiplicadas por un número (combinación lineal), el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{12} + \beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22} + \beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32} + \beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

X) La suma de los elementos de una línea multiplicados por sus respectivos adjuntos es igual al valor del determinante.

XI) La suma de los elementos de una línea multiplicados por los adjuntos de otra paralela es nula.

XII) El determinante de las matrices triangulares y diagonales es el producto de los elementos de la diagonal principal.

XIII) Dadas A_n, B_n

$$1) |A.B| = |A|.|B|$$

$$2) |\lambda A| = \lambda^n |A|$$

3) Si A es inversible su determinante es distinto de cero, y

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

Demostración del apartado 3)

$$AA^{-1} = I$$

Obteniendo ahora los determinantes:

$$|AA^{-1}| = |I| = 1$$

$$\text{por el apartado 1) } |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

$$\text{por tanto } |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0, |A^{-1}| \neq 0 \text{ y}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Aplicando las propiedades anteriormente expuestas podemos simplificar enormemente el cálculo de determinantes.

Ejemplo 1.23 *Calcula el valor del siguiente determinante.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos por ejemplo por adjuntos de la 1ª columna. En primer lugar realizaremos las operaciones (VIII) necesarias para hacer ceros todos los elementos de esta columna excepto el primero. Llamaremos a la fila 1 la fila auxiliar, porque es la fila que utilizamos para transformar los elementos de las filas 3 y 5.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F_{31}(-1) \\ F_{51}(-1) \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+(-1) & 1+(-2) & 0+(-1) & 2+(-2) & 0+(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1+(-1) & 2+(-2) & 2+(-1) & 1+(-2) & 1+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por adjuntos de la 1ª columna:

$$|A| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Y desarrollando el determinante de orden 4 por adjuntos de la 1ª columna.

$$|A| = (-1)(-1)^2(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1 + 2 - 1 + 2) = 2$$

1.5.4 Cálculo de la inversa de una matriz, por adjuntos

Dada una matriz cuadrada A_n , se llama **matriz adjunta de A** a la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto. A la matriz adjunta de A se la denota como $\text{adj}A$

$$\text{adj}A = \{A_{ij}\}$$

Consideremos la matriz $A \cdot \text{adj}(A^t)$,

$$A \cdot \text{adj}(A^t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

(se prueba fácilmente que $\text{adj}(A^t) = (\text{adj}A)^t$)

Recordando que el producto de los elementos de una línea de A por sus adjuntos respectivos es el determinante de A , y que el producto de los elementos de una línea por los adjuntos de otra paralela es nulo, tenemos:

$$\Rightarrow A \cdot \text{adj}(A^t) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|I$$

Igualmente llegaríamos a que

$$\Rightarrow \text{adj}(A^t) \cdot A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|I$$

Si $|A| \neq 0$, podemos pasar $|A|$ al primer miembro, dividiendo, y obtenemos:

$$A \cdot \frac{\text{adj}(A^t)}{|A|} = I \quad \frac{\text{adj}(A^t)}{|A|} \cdot A = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{\text{adj}(A^t)}{|A|}$$

Ejemplo 1.24 Calcular la inversa de la matriz A por adjuntos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{adj}(A^t) = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad |A| = -10$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

1.6 Algunos teoremas sobre matrices inversibles

Teorema 1.8 Una matriz A_n tiene inversa (es regular) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Demostración:

- Si A tiene inversa $AA^{-1} = I$
tomando determinantes: $|A||A^{-1}| = 1$, por tanto $|A| \neq 0$ (ver Propiedad XIII)
- Si $|A| \neq 0$ está garantizado que existe A^{-1} . En efecto A^{-1} se obtiene como hemos visto en la sección anterior, es decir,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A^t}{|A|}$$

■

Teorema 1.9 El producto de matrices inversibles de orden n es inversible, y la inversa es el producto de las inversas en el orden contrario.

$$(A.B \dots F)^{-1} = F^{-1} \dots B^{-1}.A^{-1}$$

Teorema 1.10 Si A_n es inversible también lo es A^t , y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demostración:

- $|A^t| = |A|$, por tanto si $|A| \neq 0 \Rightarrow |A^t| \neq 0$, luego A^t es inversible

$$\bullet (A^t)^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A^t|} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{(\text{adj}A^t)^t}{|A|} = (A^{-1})^t$$

(se prueba fácilmente que $\text{adj}A^t = (\text{adj}A)^t$)

■

1.7 Matrices ortogonales

Definición 1.1 Una matriz cuadrada se dice **ortogonal** si $A^tA = I$

Propiedades

- El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1
- $A^{-1} = A^t$
- La inversa y la traspuesta de una matriz ortogonal es ortogonal
- El producto de dos o más matrices ortogonales es ortogonal

Demostración:

- $A^tA = I$; tomando determinantes y teniendo en cuenta que $|A^t| = |A|$, obtenemos $|A||A| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$

- De la definición tenemos que $A^tA = I$, falta demostrar que $AA^t = I$

$AA^tA = AI = A$, multiplicando ahora por A^{-1} por la derecha, que existe por ser $|A| \neq 0$, $AA^t = I$

Otra posible demostración: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ existe A^{-1} ; multiplicando por A^{-1} por la derecha la ec. $A^tA = I$ obtenemos $A^t = A^{-1}$

- sea A ortogonal,

$$\begin{aligned} (A^{-1})^t(A^{-1}) &= (A^t)^tA^t = AA^t = I \\ (A^t)^tA^t &= AA^t = I \end{aligned}$$

- Lo demostramos para el producto de dos matrices. Sean A y B ortogonales

$$(AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^tIB = B^tB = I$$

■

1.8 Operaciones elementales y matrices elementales

1.8.1 Definición y propiedades

Definición 1.2 Sea la matriz $A_{m \times n}$, efectuamos una **operación elemental** sobre una línea (fila o columna) de A cuando realizamos una de estas tres operaciones:

- Intercambiar entre sí las líneas i y j .
- Multiplicar la línea i por un escalar $k \neq 0$.
- Sumar a la línea i la j multiplicada por un escalar cualquiera.

Definición 1.3 Se define **matriz elemental** como aquella matriz cuadrada de orden n , que se obtiene al efectuar una operación elemental sobre una línea (fila o columna) de la matriz identidad de orden n .

EN ADELANTE AL REFERIRNOS A OPERACIONES ELEMENTALES Y A MATRICES ELEMENTALES CONSIDERAREMOS UNICAMENTE LAS OBTENIDAS MEDIANTE OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE LAS **FILAS**.

Ejemplo 1.25

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{F_{23}} \quad \text{Se intercambia fila } 2^{\text{a}} \text{ con fila } 3^{\text{a}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{1(3)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{F_{1(3)}} \quad \text{Se multiplica la } 1^{\text{a}} \text{ fila por } 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{F_{31(-2)}} \quad \text{Se suma a la } 3^{\text{a}} \text{ la } 1^{\text{a}} \text{ por } -2$$

Veamos a continuación una serie de resultados.

Teorema 1.11 Sea la matriz elemental E_m que resulta de efectuar una determinada operación elemental sobre las filas en la matriz identidad I_m , y una matriz $A_{m \times n}$; entonces el producto $E_m A_{m \times n}$ es la matriz que resulta de efectuar la misma operación elemental sobre las filas de $A_{m \times n}$.

Ejemplo 1.26 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E_{F_{21(-2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es la matriz elemental que resulta de sumarle a la fila } 2^{\text{a}} \text{ de } I_3, \text{ la } 1^{\text{a}} \text{ multiplicada por } (-2).$$

$$E_{F_{21(-2)}} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es igual resultado que si le sumamos a la 2^{a} fila de A la 1^{a} multiplicada por (-2) . Es decir, es lo mismo que efectuar $F_{21(-2)}$ sobre A .

Las operaciones elementales mencionadas anteriormente, F_{23} , $F_{1(3)}$, $F_{31(-2)}$, tienen inversas que son también operaciones elementales, y que son F_{23} , $F_{1(1/3)}$ y $F_{31(2)}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{1(1/3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.12 *Toda matriz elemental tiene inversa y la inversa de una matriz elemental es elemental.*

Para el ejemplo anterior: $E_{F_{23}}E_{F_{23}} = I$, $E_{F_{1(1/3)}}E_{F_{1(3)}} = I$ y $E_{F_{31(2)}}E_{F_{31(-2)}} = I$

Obviamente $E_{F_{23}}E_{F_{23}}A = A$, $E_{F_{1(1/3)}}E_{F_{1(3)}}A = A$ y $E_{F_{31(2)}}E_{F_{31(-2)}}A = A$

Comprobación:

$$E_{F_{23}}E_{F_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{1(1/3)}}E_{F_{1(3)}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{31(2)}}E_{F_{31(-2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentario

Habíamos enunciado que A_n es inversible si y sólo si $|A_n| \neq 0$. La matriz identidad tiene determinante 1 y por tanto es inversible. Las matrices elementales se obtienen a partir de la matriz identidad mediante operaciones que pueden cambiar el determinante en módulo o signo pero no anularlo. Las matrices elementales tienen por tanto determinante no nulo y por ello son inversibles.

Ejemplo 1.27 A partir de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ queremos obtener la matriz C

que tiene intercambiadas las filas 2 y 4. Determina la matriz elemental B tal que $B.A = C$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.9 Matrices equivalentes por filas

Teorema 1.13 Si partiendo de una matriz $A_{m \times n}$ podemos llegar a otra $B_{m \times n}$ efectuando una serie finita de operaciones elementales sobre las filas de A , entonces de igual forma podemos volver a A , realizando las operaciones inversas y en orden inverso sobre las filas de B . Se dice de A y B que son matrices **equivalentes respecto a las filas** o **equivalentes por filas**.

$$E_p \dots E_2 E_1 A = B \iff A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_p^{-1} B$$

Demostración:

Probamos la implicación de izquierda a derecha. La demostración recíproca es similar.

$$E_p \dots E_2 E_1 A = B$$

$$E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_p^{-1} E_p \dots E_2 E_1 A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_p^{-1} B$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_p^{-1} B$$

■

Para expresar que A y B son matrices **equivalentes por filas** utilizamos la notación: $A \sim B$

Teorema 1.14 Si A_n y B_n son matrices cuadradas equivalentes por filas entonces:

$$|A| = 0 \iff |B| = 0$$

Demostración:

$$E_p \dots E_2 E_1 A = B \Rightarrow |B| = |E_p| \dots |E_2| |E_1| |A|$$

y es obvio por tanto que $|A| = 0 \Rightarrow |B| = 0$, y recíprocamente, pues los determinantes de las matrices elementales son todos ellos nulos.

■

Este teorema significa que si A y B son cuadradas y equivalentes por filas, o son ambas inversibles o ninguna de las dos, o lo que es lo mismo, o ambas son de determinante no nulo, o ambas de determinante nulo.

1.9.1 Aplicación para el cálculo de la inversa de una matriz

Teorema 1.15 Si A_n es equivalente respecto a las filas a la matriz I_n , entonces A tiene inversa

Demostración:

Es consecuencia inmediata del teorema anterior. $|I| \neq 0$, por tanto $|A| \neq 0$

■

Una aplicación de este resultado es la de proporcionar un método para calcular la inversa de una matriz. Si $A \sim I$, está garantizado que A es inversible, ahora veremos como calcular esta inversa.

Partiendo de $E_p \dots E_2 E_1 A = I$ [1], y multiplicando la ecuación por A^{-1} por la derecha obtenemos:

$$E_p \dots E_2 E_1 A A^{-1} = I A^{-1} = A^{-1}$$

$$E_p \dots E_2 E_1 I = A^{-1} \quad [2]$$

De las ecuaciones [1] y [2] concluimos que efectuando las mismas operaciones elementales (y con el mismo orden) sobre A e I , cuando A llegue a I , I habrá llegado a A^{-1} .

Este método de determinación de la inversa de una matriz se conoce como método de Gauss-Jordan. El esquema es el siguiente:

$$[A \mid I] \longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow \longrightarrow [I \mid A^{-1}]$$

operaciones elementales por filas

Ejemplo 1.28 Determina el valor de c para que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ sea inversible, analizando si A es equivalente por filas a la matriz identidad.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & c-4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2(c-4) \end{bmatrix}$$

$$\text{fila2} = \text{fila2} - 2 * \text{fila1}$$

$$\text{fila3} = \text{fila3} - 2 * \text{fila1}$$

Se intercambian las filas 2 y 3

$$\text{fila3} = \text{fila3} + \text{fila2} (c-4) \quad (\text{Esta operación se puede realizar aunque } c \text{ sea } 4)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2(c-4) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2(c-4) \end{bmatrix} = B$$

$$\text{fila 2} = \text{fila 2} * (-1)$$

- Si $c = 4$ queda la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que no puede transformarse mediante operaciones elementales por filas en I_3

- Si $c \neq 4$

$$\text{fila3} = \text{fila3} / [2(c-4)]$$

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz es triangular superior y todos los elementos de la diagonal principal son 1. Para llegar a la matriz identidad haremos ceros los elementos del triangulo superior, sobre la diagonal principal, yendo de derecha a izda.

$$\text{fila2} = \text{fila2} - 2 * \text{fila3}$$

$$\text{fila1} = \text{fila1} - \text{fila3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{fila1} = \text{fila1} - 2 * \text{fila2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

La matriz A es equivalente por filas a la matriz identidad por tanto es inversible.

Resultado: La matriz es inversible si y sólo si $c \neq 4$

Ejemplo 1.29 Determina la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan. (Es la matriz del ejemplo anterior con $c = 0$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{fila2} = \text{fila2} - 2 * \text{fila1}$$

$$\text{fila3} = \text{fila3} - 2 * \text{fila1}$$

Se intercambian las filas 2 y 3

$$\text{fila 2} = \text{fila 2} * (-1)$$

$$\text{fila3} = \text{fila3} + 4 * \text{fila2}$$

En este momento tenemos ya una matriz triangular superior y con los elementos de la diagonal principal 1. Ahora debemos hacer ceros los elementos por encima de la diagonal principal para conseguir la matriz identidad.

$$\text{fila2} = \text{fila2} - 2 * \text{fila3}$$

$$\text{fila1} = \text{fila1} - \text{fila 3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 - 3/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 - 3/2 & 0 - 1/4 & -1 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{fila1} = \text{fila1} - 2 * \text{fila2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 - 1 & -1/8 + 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Resultado: La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$

1.10 Formas escalonada y reducida de una matriz

1.10.1 Definiciones

Definición 1.4 Se denomina **forma escalonada por filas de una matriz** $A_{m \times n}$ a aquella que se obtiene a partir de A mediante operaciones elementales por filas, y que verifica:

- a) Si tiene filas cuyos elementos son todos ceros, aparecen en la parte inferior de la matriz.
- b) El primer elemento distinto de cero de una fila, empezando por la izquierda, se llama **elemento pivote**, y su columna, **columna pivotal**. Dadas dos filas sucesivas, el elemento pivote de la 2ª fila está más a la derecha que el elemento pivote de la 1ª fila.

Ejemplo 1.30 Matrices en una forma escalonada por filas.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{5} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{4} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se indican en negrita los elementos pivote.

A continuación damos dos ejemplos de matrices que no están en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Toda matriz cuadrada en forma escalonada es triangular superior

Definición 1.5 Se denomina **forma reducida por filas** de una matriz $A_{m \times n}$ a la forma escalonada por filas con pivotes unidad y tal que en las columnas pivotaes todos los elementos salvo el pivote son nulos.

Ejemplo 1.31 Matrices en la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Obsérvese la diferencia con las matrices escalonadas.

1.10.2 Transformación mediante operaciones elementales por filas a las formas escalonada y reducida

Obtención de una matriz equivalente por filas en la forma escalonada

El algoritmo de **Eliminación Gaussiana Simple** consta de los siguientes pasos:

- 1) Partiendo de la izquierda, buscamos la 1ª columna con un elemento distinto de cero, llamémosla j_1 . Esta columna j_1 es la primera columna pivotal. Si el primer elemento no nulo de j_1 (el de la fila más alta) no está en la 1ª fila se intercambian la primera fila y ésta. Este elemento no nulo, en la posición $(1, j_1)$ es el primer elemento pivote. Recordamos que la permutación de filas es en efecto una operación elemental. Mediante operaciones elementales por filas convertimos los elementos de la primera columna pivotal que están debajo del elemento pivote, en ceros. La fila auxiliar utilizada es la 1ª fila. La operación elemental que elimina el elemento b es la de sumar a la fila que contiene el elemento b la fila auxiliar multiplicada por $(-b / \text{primer pivote})$.

2) Moviéndonos hacia la derecha, a partir de la 1ª columna pivotal, buscamos la siguiente columna que tenga un elemento no nulo en la 2ª fila o siguientes. Esa columna j_2 será la segunda columna pivotal. Se realizará una permutación de filas si este primer elemento no nulo no estuviera en la 2ª fila, para colocarlo precisamente en ésta. Este es el segundo elemento pivote. Además de esta operación elemental de permutación a fin de que el elemento pivote se encuentre en la 2ª fila (posición $(2, j_2)$), se realizarán las operaciones elementales necesarias para que todos los elementos de la columna pivotal, por debajo del pivote, sean ceros, utilizando como fila auxiliar la fila 2ª. Estas operaciones elementales no afectan a los elementos de las columnas situadas a la izquierda de j_2 , ya que los elementos de la fila 2 a la izquierda de j_2 son todos nulos.

3) Seguimos moviéndonos hacia la derecha. Sea j_3 la siguiente columna que tiene un elemento no nulo, ahora en la 3ª fila o más abajo. Si es necesario permutaremos las filas para que, en la nueva matriz, la columna j_3 tenga en la fila 3 el primer elemento no nulo encontrado (tercer elemento pivote), y a continuación realizaremos las operaciones para transformar a ceros los elementos por debajo de él, utilizando la fila 3 como auxiliar.

4) Seguimos repitiendo el proceso hasta conseguir r columnas pivotaes, $j_1, j_2, \dots, j_r$ y solamente ceros en las filas $r + 1, r + 2, \dots, m$.

Al final de estos cuatro pasos habremos conseguido transformar la matriz, a través de operaciones elementales por filas, en una matriz escalonada.

Dada una matriz, mediante el método de eliminación gaussiana simple se obtiene una única matriz en la forma escalonada por filas. Esto es debido a que las operaciones elementales que se realizan y el orden en que se realizan están fijadas por el método.

Notamos como si multiplicamos alguna de las filas de la matriz escalonada resultante, por un factor no nulo, seguimos obteniendo una matriz equivalente por filas y en la forma escalonada. Por tanto, dada una matriz se pueden obtener infinitas matrices equivalentes por filas en la forma escalonada. De hecho, en cálculos a mano a veces se normaliza a 1 el elemento pivote de alguna fila para simplificar los cálculos de conversión a ceros de los elementos por debajo del pivote. Al proceso de obtener una matriz equivalente por filas en la forma escalonada, en el que se permiten realizar de forma arbitraria las operaciones elementales de escalamiento, permutaciones de filas y suma a una fila de un múltiplo de otra, se le denomina **eliminación gaussiana**.

Ejemplo 1.32 *Eliminación gaussiana simple*

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_{13}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{41(-1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4-3 & 0-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_{42(-1/2)} \\ F_{52(-1/2)} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2-3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2-3/2 \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\begin{matrix} F_{43(7/2)} \\ F_{53(-1/2)} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \quad A \sim U
 \end{aligned}$$

3 columnas pivotaes. Pivotes 2,2,1

Eliminación gaussiana (permitiendo cualquier operación elemental por filas, y en cualquier orden).

Ahora tendremos infinitas posibilidades. Presentamos un ejemplo.

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_{13}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{escala-}]{F_{1(1/2)} \text{ miento}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{41}(-1)} \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_{24}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_{32}(-2) \\ F_{42}(-1) \end{smallmatrix}]{F_{32}(-2)} \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_{43}(-1/7) \\ F_{53}(-4/7) \end{smallmatrix}]{F_{43}(-1/7)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U' \quad A \sim U' \\
 &\quad \text{3 columnas pivotaes.} \\
 &\quad \text{Quedan como pivotes } 1, 1, 7
 \end{aligned}$$

Obtención de la matriz equivalente por filas en la forma reducida

En primer lugar obtenemos una matriz equivalente por filas escalonada. La segunda parte del proceso consiste en hacer “unos” los elementos pivote y “ceros” los elementos de las columnas pivotaes situados por encima del elemento pivote.

Un procedimiento posible es realizar los pasos del 1 al 4 del algoritmo de Eliminación Gaussiana Simple y continuar con los pasos siguientes:

- 5) Escalamos las filas no nulas para que todos los pivotes tomen el valor 1.
- 6) Consideramos la fila r como auxiliar, y con las correspondientes operaciones elementales sobre las filas, consigamos que la columna j_r tenga ceros en las filas $1, 2, \dots, r-1$. Ninguna columna a la izquierda de j_r se verá afectada por estas operaciones, ya que los elementos de la fila r a la izquierda de la columna pivotal j_r son todos nulos.
- 7) Continuamos hacia arriba, en la fila $r-1$, donde a través de operaciones elementales haremos cero los elementos de esa columna pivotal en las filas $1, 2, \dots, r-2$. La fila $r-1$ es la fila auxiliar. Continuamos con estas transformaciones para que cada columna pivotal j_i tenga ceros en las $i-1$ primeras filas, siempre disminuyendo i , hasta $i=2$.

Hemos descrito un procedimiento sistemático, en el que las operaciones y el orden vienen fijadas. No obstante, independientemente de las operaciones y del orden, *la forma escalonada reducida de una matriz es única*.

Ejemplo 1.33 Mediante operaciones elementales transforma la matriz del ejemplo anterior a la forma escalonada reducida.

Partimos por ejemplo de la forma escalonada obtenida por Eliminación gaussiana simple:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{2(1/2)}]{F_{1(1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{13(-2)}]{F_{23(-3/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{F_{12}(-3)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con los procesos descritos en esta sección podemos obtener a partir de una matriz $A_{m \times n}$, una matriz equivalente por filas $U_{m \times n}$, denominada *La Forma Escalonada Reducida de A* con:

- r filas con sus elementos no todos nulos, que son además las r primeras filas de la matriz. El único elemento no nulo en cada fila es el 1.
- r columnas pivotaes, no necesariamente las r primeras, con todos los elementos nulos salvo un 1.

1.11 Rango de una matriz

Definición 1.6 Se denomina *rango* de una matriz al número de columnas pivotaes o número de filas no nulas en cualquier forma escalonada por filas de la matriz.

El rango de una matriz es único: Todas las formas escalonadas por filas de una matriz tienen el mismo número de columnas pivotaes, incluida la forma reducida, que es un caso de forma escalonada. Expresado de una forma más general: Todas las matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.

Dada una matriz $A_{m \times n}$ el rango ha de ser menor o igual que m y menor o igual que n .

Ejemplo 1.34

$$\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2, \text{ rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \text{ rg} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 3$$

Ejemplo 1.35

I_n tiene rango n , pues la matriz I_n ya está en la forma escalonada reducida, y tiene n columnas pivotaes.

Ejemplo 1.36 Determina el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{rg} A = 3$$

UN RESULTADO MUY IMPORTANTE QUE NO VAMOS A DEMOSTRAR ES EL SIGUIENTE:

$$\text{rg} A = \text{rg} A^t$$

1.11.1 Aplicación para matrices cuadradas: relación equivalencia por filas a la identidad, determinante, existencia de inversa y rango

Consideremos una matriz cuadrada A y analicemos como cambia su determinante al realizar operaciones elementales por filas, es decir, veamos como se relaciona el determinante de una matriz con el determinante de una matriz equivalente por filas a ella.

- la permutación o intercambio de filas cambia el signo del determinante
- reemplazar una fila por ella más un múltiplo de otra no hace variar el determinante
- un escalamiento de una fila (por un factor no nulo) escala el determinante por el mismo factor

Por tanto, si $A \sim B$, $|B| = |A| \times (-1)^s \times \alpha_1 \times \dots \times \alpha_p$ siendo s el número de intercambios de filas y $\alpha_i \neq 0$ los factores de los escalamientos realizados.

Supongamos que realizamos operaciones elementales hasta llegar a una forma escalonada de A , que denotamos como U . Por ser U cuadrada y escalonada por filas es triangular superior y $|U|$ es igual al producto de los términos de la diagonal principal. Por tanto:

$$|U| = \text{producto de las entradas de la diagonal de } U = u_{11} \times u_{22} \times \dots \times u_{nn}$$

Si algún elemento $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$ es nulo, entonces $|U| = 0$, y por tanto $|A| = 0$. Además el número de pivotes es menor que n , y por tanto $\text{rg}A < n$.

Si todos los elementos $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$ son no nulos, entonces $|U| \neq 0$, $|A| \neq 0$, y además todos pivotes y por tanto $\text{rg}A = n$.

(ver las matrices cuadradas en el Ejemplo 1.30)

Supongamos que realizamos operaciones elementales sobre A hasta llegar a la forma escalonada reducida: $A \sim \dots \sim U_{red}$

$$U_{red} = I \Leftrightarrow \text{rg}U_{red} = \text{rg}A = n \quad n \text{ pivotes} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible}$$

$$U_{red} \neq I \Leftrightarrow \text{rg}U_{red} = \text{rg}A < n \quad \text{menos de } n \text{ pivotes} \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A \text{ no inversible}$$

Ejemplo 1.37 *Determina si las siguientes matrices son o no regulares.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -2 \quad A \text{ es regular}$$

o $\text{rg } A = 3$ pues en la EG quedan 3 pivotes, por tanto A regular

Por tener tres columnas pivotaes A es equivalente por filas a I_3 (sólo hace falta escalar las filas para hacer “unos” los pivotes y realizar la eliminación de Gauss-Jordan).

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad B \text{ no es regular}$$

o $\text{rg } B=2$ pues en la EG quedan 2 pivotes, por tanto B no es regular

$|B| = 0 \Rightarrow B$ no es equivalente a I_3 ($|I| = 1$).

1.12 Ejercicios

Matrices

Ejercicio 1.1 Obtén AB siendo A y B las siguientes matrices en el cuerpo $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.2 Obtén AC y B^2+B , siendo A, B y C las siguientes matrices en el cuerpo $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.3 Dada la matriz A en $\mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, comprobar que se puede verificar una relación de la forma $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ejercicio 1.4 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$, calcula, en función de λ , las matrices B de orden 2 tales que $AB=0$

Ejercicio 1.5 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$, hallar todas las matrices permutables con ella.

Ejercicio 1.6 Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:

Punto	Masa
$\vec{x}_1 = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2g$
$\vec{x}_2 = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5g$
$\vec{x}_3 = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2g$
$\vec{x}_4 = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1g$

Calcula el centro de gravedad $\vec{x}$ del sistema, sabiendo que:

$$\vec{x} = \frac{m_1\vec{x}_1 + \dots + m_k\vec{x}_k}{m_1 + \dots + m_k}$$

Traspuestas, simétricas, antisimétricas, descomposición sim + antisim

Ejercicio 1.7 Dadas las matrices en $\mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Determina AB , AC , CA
- las traspuestas de estos productos

Ejercicio 1.8 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$. Calcula $A^2 - 3AA^t + (A^t)^2$

Ejercicio 1.9 Descomponer la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Ejercicio 1.10 Sean las matrices cuadradas de orden 2, simétricas y en $\mathbf{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

determinar los posibles valores de a , b y c para que AB sea simétrica.

Ejercicio 1.11 Si P es una matriz antisimétrica, que se puede decir de P^2 .

Potencias

Ejercicio 1.12 Calcula las tres primeras potencias de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, y la expresión general de A^k

Determinantes

Ejercicio 1.13 Calcula el siguiente determinante, desarrollándolo por adjuntos de la tercera fila.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.14 Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Ejercicio 1.15 Demostrar que,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0, \text{ sin efectuar el desarrollo correspondiente.}$$

Ejercicio 1.16 Hallar el valor de los siguientes determinantes de orden n

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.17 Calcula el valor de los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

Inversas por adjuntos, existencia en función de determinante no nulo**Ejercicio 1.18** *Obtén la inversa de la matriz A , por adjuntos.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.19 *Calcula la inversa de la matriz compleja:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.20 *Determina si la matriz A es inversible, en función de los valores de a y b . (Pista: utiliza el determinante, si $\det = 0$ no inversible, si $\det \neq 0$ inversible).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & b \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrices equivalentes por filas: Inversas por Gauss-Jordan, formas escalonada y reducida, rango**Ejercicio 1.21** *Calcula, si existen, las inversas de las siguientes matrices, aplicando el método de Gauss-Jordan.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.22 *Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, señala cual de las expresiones siguientes corresponde a la forma general de la matriz $(A^k)^{-1}$, $k \geq 1$:*

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{1-k} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

*(Calcula la matriz inversa mediante Gauss-Jordan)***Ejercicio 1.23** *Calcula el rango de las siguientes matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 11 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.24 Dada las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, deter-

mina para cada una de ellas:

- a) Una forma escalonada
- b) La forma escalonada reducida
- c) El rango
- d) El determinante
- e) La inversa si existe

Ejercicio 1.25 Determina el rango de la matriz A en función del parámetro a .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.26 Determina el rango de las siguientes matrices, en función del parámetro que contienen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & s \\ 1 & 2 & s \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & s & -1 \\ 1 & 3 & s & 0 & -3 \\ 0 & 1 & s & 2 & s \\ 0 & -1 & -1 & s & s \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.13 Soluciones

1.1

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ -9 & 7 \\ 19 & -1 \end{bmatrix}$$

1.2

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -10 \end{bmatrix} \quad B^2 + B = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$$

1.3

Se verifica la ecuación para $\lambda = -4$ y $\mu = 3$

1.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + \lambda c & 3b + \lambda d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos un sistema con 4 ecuaciones y 4 incógnitas cuya solución depende del parámetro λ .

Si $\lambda = 6$ la solución es cualquier matriz B de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{bmatrix} \text{ con } c, d \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda \neq 6$ la única solución es la trivial:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5

Planteamos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y obtenemos cuatro ecuaciones con las incógnitas a, b, c, d . La solución del sistema es

$a = d, b = 0$. Por tanto las matrices permutables con A son de la forma: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$ con

$a, c \in \mathbb{R}$

1.6 (1.3, 0.9, 0)

1.7

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

AC no se puede

$$CA = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Las traspuestas son:

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(CA)^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

1.8

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

1.9

$$A = S + H$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ -3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

1.10

$a = b$ y c cualquier valor, por tanto la matriz B debe tener la forma:

$$B = \begin{bmatrix} a & c \\ c & a \end{bmatrix} \text{ con } a, c \in \mathbb{R}$$

1.11

$(P.P)^t = P^t.P^t = -P.-P = P.P$, por tanto P^2 es simétrica.

1.12

$$A^n = 3^{n-1}A$$

1.13

$$1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

1.14

Sumando a la fila 1 las filas 2 y 3 obtenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Sumando a la columna 2 la columna 1*-1 y sumando a la columna 3 la columna 1*-1 obtenemos:

$$|A| = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

La última matriz es triangular y por tanto su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

1.15

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0, \text{ sumando a la columna 3 la columna 2, y sacando el factor}$$

$(a+b+c)$ fuera, tendremos dos columnas iguales $(1,1,1)$, y por tanto el determinante es 0.

1.16

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} =$$

Haciendo las operaciones $F_{i1}(-1)$ para $i = 2, \dots, n$ obtenemos:

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = n!$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda \end{vmatrix} =$$

Haciendo las operaciones $F_{i1}(1)$ $i = 2, \dots, n$ obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Haciendo las operaciones $F_{i1}(-1)$ $i = 2, \dots, n$ obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Haciendo las operaciones $F_{1i}(1)$ $i = 2, \dots, n$ obtenemos:

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

1.17

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 116$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 63$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 4 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 108 - 36a$$

1.18

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{adj} A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -10 & -4 & -2 \\ -7 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -14 \quad A^{-1} = 1/14 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

1.19

$$|A| = 2 - i^2 = 3 \quad \text{adj} A^t = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -i/3 \\ -i/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

1.20

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & b \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Las operaciones de sumar a una línea un múltiplo de otra no modifican el determinante

f2=f2-2*f1

f4=f4+f1

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & b \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & b \\ 0 & 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} a-4 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & b \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

La operación c2=c2-c3 (columna2 = columna2 - columna3) no modifica el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a-4 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & b \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-4 & -5 & 0 \\ 4 & 1-b & b \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (a-4)(1-b)3 - 30b + 60$$

$$|A| = (a - ab - 4 + 4b)3 - 30b + 60 = 3(a - ab - 4 + 4b - 10b + 20) = 3(a - ab - 6b + 16)$$

• A es no inversible $\iff a - ab - 6b + 16 = 0$

$$a - ab - 6b + 16 = 16 + a - (a+6)b = 10 + (6+a) - (6+a)b = 10 + (6+a)(1-b) =$$

$$10 + (6+a)(1-b) = 0$$

A no inversible si y sólo si $(6+a)(b-1) = 10$

no inversible	$(6+a)(b-1) = 10$	$a \neq -6$ y $b \neq 1$ y $b = 10/(6+a) + 1$
inversible	$(6+a)(b-1) \neq 10$	$a = -6$ ó $b = 1$ ó $b \neq 10/(6+a) + 1$

Otra forma de resolver el problema partiendo de •

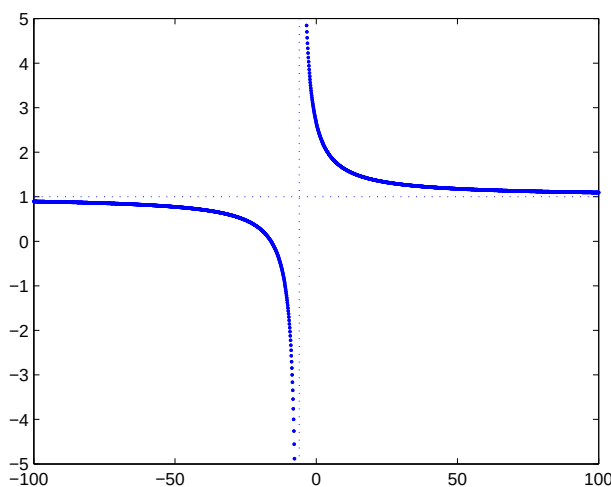
$$\begin{aligned} \text{Despejamos } b: \quad a + b(-a - 6) + 16 = 0 &\Rightarrow (-a - 6) b = -16 - a \\ &(a + 6) b = a + 16 \end{aligned}$$

Ahora hay que distinguir dos casos. Si $a = -6$ entonces la ecuación anterior queda: $0 = 10$, absurda, por tanto la hipótesis A no inversible no se cumple, y por tanto A tiene inversa.

Si $a \neq -6$, entonces podemos despejar b en la ecuación, obteniendo:

$$b = \frac{16 + a}{6 + a} = \frac{10 + 6 + a}{6 + a} = \frac{10}{6 + a} + 1$$

Para los valores de b anteriores, la matriz A no es inversible. Observamos que la función tiene la asíntota $b = 1$.



1.21

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 7/4 & 1/4 & -1/2 \\ -1/4 & 5/4 & -1/2 \\ -1/4 & -3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -11/12 & 7/12 & -5/12 \\ -5/12 & 1/12 & 1/12 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolución completa para E

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

En primer lugar haremos cero los elementos a_{21} y a_{31} mediante las operaciones elementales $F_{21}(-1/2)$ y $F_{31}(-2)$. La fila 1 es la fila auxiliar. La forma de proceder es la siguiente.

$$fila2 = fila2 + (-1) \cdot (1/2) \cdot fila1$$

$$fila3 = fila3 + (-4) \cdot (1/2) \cdot fila1$$

Lo que llamamos ahora *fila* engloba toda la matriz $[A \mid I]$. Nótese como las operaciones realizadas afectan a todos los elementos de la fila, no sólo a los que queríamos hacer cero.

$$\xrightarrow[F_{31}(-2)]{F_{21}(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Ahora para hacer cero el elemento a_{32} la fila auxiliar es la segunda y la operación elemental es: $f3 = f3 + (1) \cdot (-2/3) \cdot f2$ o lo que es lo mismo $F_{32}(-2/3)$

$$\xrightarrow{F_{32}(-2/3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11/3 & -5/3 & -2/3 & 1 \end{array} \right]$$

La matriz ya es triangular. Ahora hay que convertir en 1 los elementos de la diagonal, con las siguientes operaciones: $f1 = f1 \cdot 1/2$, $f2 = f2 \cdot -2/3$ y $f3 = f3 \cdot 3/11$

$$\begin{array}{l} F_{1(1/2)} \\ F_{2(-2/3)} \\ F_{3(3/11)} \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/11 & -2/11 & 3/11 \end{array} \right]$$

Tenemos que hacer ceros los elementos del triangulo superior, y en vez de ir de izquierda a derecha, vamos de derecha a izquierda.

$$\xrightarrow{F_{23}(-2/3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/11 & -6/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -5/11 & -2/11 & 3/11 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{F_{12}(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/11 & 3/11 & 1/11 \\ 0 & 1 & 0 & 7/11 & -6/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -5/11 & -2/11 & 3/11 \end{array} \right]$$

$$E^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 2/11 & 3/11 & 1/11 \\ 7/11 & -6/11 & -2/11 \\ -5/11 & -2/11 & 3/11 \end{array} \right] = 1/11 \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 7 & -6 & -2 \\ -5 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

1.22

Obtenemos la inversa por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Por tanto la inversa es:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Las tres opciones son compatibles con A^{-1} . Veamos que sucede para $k = 2$.

$$(A.A)^{-1} = A^{-1}.A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

La única opción compatible con $(A^2)^{-1}$ es la (a).

1.23

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{array} \right] \quad \text{rango 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 11 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{rango 4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{rango 2}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{rango 3}$$

1.24

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí sacamos cuatro respuestas: La última matriz es una forma escalonada de A , el rango de A es 3, el determinante de A es nulo y A no tiene inversa.

Pasamos ahora a calcular la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 - 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/12 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 - 7/6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/12 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/12 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La última matriz calculada es la forma escalonada reducida de A

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = B_e$$

De aquí sacamos dos respuestas: La última matriz es una forma escalonada de B y el rango de B es 3. Por ser el rango igual al orden de la matriz sabemos además que el determinante de B será distinto de 0 y que B es inversible.

Al pasar de B a B_e sólo hemos realizado la operación de sumar a una fila un múltiplo de otra (dos veces). Como esta operación no varía el determinante, $|B| = |B_e| = 2 \times 2 \times 2 = 8$

A continuación obtenemos la inversa de B por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

39

Ejemplo 2.3
$$\begin{cases} 2x_1 + 3(x_2)^2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

No es un sistema de ecuaciones lineales, porque la primera ecuación no es lineal.

Definición 2.3 Dos sistemas de ecuaciones lineales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, de igual número de incógnitas, se dice que son **sistemas equivalentes** cuando toda solución de uno de ellos lo es también del otro.

Se puede demostrar de forma sencilla que efectuando transformaciones del sistema [1] de los tipos siguientes, se obtiene un sistema equivalente al primero. Estas transformaciones son:

1. Permutar dos ecuaciones
2. Multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero
3. Sumar a una ecuación otra multiplicada por una constante

Para determinar si un sistema de ecuaciones tiene solución y obtener ésta, si existe, se sustituirá el sistema dado por otro equivalente de resolución más sencilla.

Ejemplo 2.4 Consideremos el sistema
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Son ejemplos de sistemas equivalentes al anterior:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_2 = 14 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_2 = 7 \end{cases}$$

Notamos como en los dos últimos sistemas podemos despejar fácilmente x_2 en la segunda ecuación, y a continuación despejar x_1 en la 1ª sustituyendo el valor de x_2 .

2.2 Resolución de SL con métodos de eliminación gaussiana

La información de un sistema de ecuaciones puede ser almacenada de forma compacta como una matriz. Dado el sistema [1], podemos construir una matriz disponiendo los coeficientes de cada incógnita por columnas. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{se denomina } \mathbf{matriz \ de \ coeficientes}$$

$$\text{y la matriz } A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{matriz \ ampliada}$$

El orden de la matriz de coeficientes A es $m \times n$, siendo m el número de ecuaciones y n el número de incógnitas. El orden de la matriz ampliada A^* es $m \times (n + 1)$.

$A^* = [A \mid B]$, siendo B la columna de los términos independientes. Al ser B una matriz columna, corresponde a un vector, llamado **vector de términos independientes** y denotado como $\vec{b}$.

Cada una de las filas de la matriz ampliada representa una ecuación del sistema.

Queda pues establecida una correspondencia, de forma que a cada sistema de ecuaciones le corresponde una matriz ampliada y recíprocamente.

Ejemplo 2.5 Escribe el sistema de ecuaciones representado por las matrices

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La respuesta será: $M : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad N : x_1 + 2x_2 = 0$

En la sección anterior hemos visto como, partiendo de un sistema de ecuaciones dado, el sistema que se obtiene realizando transformaciones como permutar dos ecuaciones, multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero y sumar a una ecuación otra multiplicada por una constante, es equivalente al primero.

Utilizando la notación matricial para los sistemas de ecuaciones, estas transformaciones se corresponden con operaciones elementales por filas, como las descritas en el Tema anterior (permutación de filas, multiplicación de una fila por un factor no nulo, y suma a una fila de un múltiplo de otra), realizadas sobre la matriz ampliada del sistema. Se concluye entonces que **a dos matrices equivalentes por filas les corresponden sistemas de ecuaciones equivalentes**.

A continuación estudiaremos la resolución de sistemas basada en la transformación de la matriz ampliada. Los métodos basados en la transformación de A^* a una forma escalonada por filas se denominan métodos de Eliminación Gaussiana. Los que usan la transformación a la forma escalonada reducida se denominan métodos de Gauss-Jordan.

Con varios ejemplos estudiaremos ambos métodos, analizando los tres casos de sistemas incompatible, compatible indeterminado y compatible determinado.

Ejemplo 2.6 Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \quad A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar los ceros de la primera columna tenemos que hacer primero una permutación. Hacemos por ejemplo la permutación de la fila 1 con la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa el sistema
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 0 = -15 \end{cases}$$

La última ecuación expresa $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -15$. Esta ecuación nunca será cierta. No hay valores de x_1, x_2, x_3 que satisfagan la ecuación. Por tanto el sistema es incompatible.

Podemos decir, de forma general, que un sistema de ecuaciones es compatible si y sólo si al obtener una forma escalonada de la matriz ampliada, no existe ninguna fila de la forma

$$[0 \quad \dots \quad 0 \quad b] \quad \text{con } b \neq 0$$

O expresado de otra forma, un sistema es incompatible si y sólo si $\text{rg } A^* = \text{rg } A + 1$

Ejemplo 2.7 Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

El nuevo sistema es:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 1/3x_5 = 4/3 \end{cases}$$

Las incógnitas x_1 , x_2 y x_5 , que corresponden a columnas pivotaes, las consideraremos como incógnitas principales. Las otras dos incógnitas, x_3 y x_4 , las consideraremos como parámetros libres.

Se dará la solución expresando las incógnitas principales como función de los parámetros libres. Decir que x_3 y x_4 son parámetros libres significa que podremos escoger cualquier valor para x_3 y x_4 . Una vez que lo hagamos, quedará fijado el valor de las incógnitas principales.

$$\frac{1}{3}x_5 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_5 = 4$$

$$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \Rightarrow x_2 = \frac{-5+6x_3-6x_4-4 \cdot 4}{3} = \frac{-5+6x_3-6x_4-16}{3} = -7 + 2x_3 - 2x_4$$

$$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \Rightarrow$$

$$3x_1 = 9 + 7x_2 - 8x_3 + 5x_4 - 8 \cdot 4 = 9 + 7(-7 + 2x_3 - 2x_4) - 8x_3 + 5x_4 - 32 = -23 - 49 +$$

$$14x_3 - 14x_4 - 8x_3 + 5x_4 = -72 + 6x_3 - 9x_4 \Rightarrow$$

$$x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4$$

La solución general del sistema, que incluye todas las soluciones es:

$$\begin{cases} x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

La solución en forma vectorial es la siguiente:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Debido a que la solución queda “indeterminada”, en función de parámetros, a la forma vectorial solución la llamamos forma vectorial paramétrica. Podríamos haber considerado otras dos incógnitas, por ejemplo x_1 y x_3 , como parámetros libres. Lo importante es que cualquier solución general tendrá siempre el mismo número de parámetros libres.

Es un sistema compatible indeterminado ya que tenemos menos columnas pivotaes que incógnitas.

$$3 = \text{rg } A^* = \text{rg } A < n = 5$$

$$\text{número de parámetros libres } n - \text{rg } A = 2.$$

$$\text{Denotando } \vec{p} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{p} + x_3 \vec{u} + x_4 \vec{v}$$

$\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ son vectores con elementos del cuerpo $\mathbb{R}$ y x_3, x_4 son elementos cualesquiera de $\mathbb{R}$

La solución $\vec{x}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{p}, \vec{u}$ y $\vec{v}$. El coeficiente que multiplica a $\vec{p}$ es 1.

Ejemplo 2.8 Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} [1] & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} [2] & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} [3] & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} [4] & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ya tenemos la matriz ampliada en una forma escalonada y el sistema de ecuaciones correspondiente. Ahora podremos determinar la solución, yendo de la última ecuación de este sistema, hacia atrás.

De la tercera ecuación: $x_3 = 3$

Sustituyendo x_3 en la segunda ecuación: $x_2 = 4 + 4x_3 = 4 + 12 = 16$

Sustituyendo x_3 y x_2 en la primera ecuación: $x_1 = 0 + 2x_2 - x_3 = 32 - 3 = 29$

Hemos obtenido la solución mediante Eliminación Gaussiana. La solución es $x_1 = 29$, $x_2 = 16$ y $x_3 = 3$, que podemos escribir en la forma $\vec{x} = (29, 16, 3)$ o

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 29 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Podríamos también haber continuado obteniendo sistemas equivalentes (matrices equivalentes por filas) hasta llegar a la forma escalonada reducida. Realicemos este proceso, partiendo de la matriz ampliada [4].

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} [5] \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} [6] \quad \begin{cases} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Ya tenemos la matriz ampliada en la forma escalonada reducida, y podemos determinar directamente la solución. La solución es $x_1 = 29$, $x_2 = 16$ y $x_3 = 3$. Este es el método de Gauss-Jordan.

Se trata de un sistema compatible determinado.

$$\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A = n$$

Número de incógnitas = Número de columnas pivotaes de A

Ejemplo 2.9 Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7/5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -5x_2 + 2x_3 = -2 \\ 7/5 x_3 = 18/5 \end{cases}$$

$$7x_3 = 18, \quad x_3 = \frac{18}{7}$$

$$-5x_2 + 2x_3 = -2, \quad -5x_2 = -2 - 2 \cdot \frac{18}{7} = \frac{-14-36}{7} = \frac{-50}{7}, \quad x_2 = \frac{-50}{-35} = \frac{10}{7}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \quad 2x_1 = 3 - 3x_2 - x_3 = 3 - \frac{30}{7} - \frac{18}{7} = \frac{21-30-18}{7} = -\frac{27}{7},$$

$$x_1 = -\frac{27}{14}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{27}{14} \\ x_2 = \frac{10}{7} \\ x_3 = \frac{18}{7} \end{cases} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -27/14 \\ 10/7 \\ 18/7 \end{bmatrix}$$

Es un sistema compatible determinado. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = n$

RESUMEN

Sist. compat. determinado $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A = n$ n =número de incógnitas

Sist. compat. indeterminado $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A < n$

$\operatorname{rg} A$ = número de incógnitas principales

$n - \operatorname{rg} A$ = número de parámetros libres

Sist. incompat. $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A + 1$

2.3.1 La ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

[illegible]

Demostración:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\vec{x}$ es solución del SL $\Leftrightarrow \vec{x}$ es solución de la ecuación vectorial $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b},$$

que a su vez tiene la misma solución que el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es $[A \mid \vec{b}]$.

Teorema 2.2 La ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si $\vec{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A .

Ejemplo 2.10 El sistema
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

se puede expresar de la forma:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. vectorial o comb. lineal})$$

o como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. matricial o prod. matriz-vector})$$

En la ecuación vectorial vemos como $\vec{b}$ es combinación lineal de las columnas de A

2.3.4 El producto Matriz-Vector

Sea A una matriz $m \times n$, con columnas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, y sea $\vec{x}$ un vector de n entradas, $\vec{x}_{n \times 1} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces el producto $A\vec{x}$, es la suma de las columnas de A , pesando cada una de ellas con las entradas de $\vec{x}$.

$$A\vec{x} = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

Expresado de otra forma, el producto $A\vec{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A usando como pesos (o coeficientes) las entradas de $\vec{x}$.

Ejemplo 2.11 Calcula el siguiente producto matriz-vector:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando las reglas del producto de matrices lo habríamos calculado así :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 1 \qquad \qquad \qquad 3 \times 1$

Propiedades del producto matriz-vector

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$

2) $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$

El producto matriz-vector es un caso particular de producto matriz-matriz. En el Capítulo 1 habíamos visto que para toda terna de matrices A, B, C y para todo escalar α del cuerpo $\mathbb{K}$, se cumplían las propiedades:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$$

Demostraremos las propiedades 1 y 2 arriba mencionadas para el caso particular de una matriz A de tres columnas: $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3]$

Para multiplicar A por $\vec{u}$ el número de entradas de $\vec{u}$ debe ser igual al número de columnas de A , y por tanto 3.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha \vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{bmatrix}$$

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = (u_1 + v_1)\vec{a}_1 + (u_2 + v_2)\vec{a}_2 + (u_3 + v_3)\vec{a}_3 = \\ (u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3) + (v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

$$A(\alpha \vec{u}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{bmatrix} = (\alpha u_1)\vec{a}_1 + (\alpha u_2)\vec{a}_2 + (\alpha u_3)\vec{a}_3 = \\ \alpha(u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3) = \alpha(A\vec{u})$$

Ejemplo 2.12 Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ escribe el vector $3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3$ como producto de una matriz por un vector.

$$3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = A\vec{x} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2.4 Sistemas lineales homogéneos

2.4.1 Definición

Un sistema lineal es homogéneo si tiene la forma $A_{m \times n} \vec{x}_{n \times 1} = \vec{0}_{m \times 1}$.

Un sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ siempre tiene al menos la solución $\vec{x} = \vec{0}$, que se conoce como solución nula o **solución trivial**.

Para un SL de la forma $A\vec{x} = \vec{0}$, la cuestión es saber si el SL es determinado (sólo la solución nula) o indeterminado. El sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado si y sólo si $\text{rg } A < n$.

2.4.2 Relación entre la solución de un SL no homogéneo y la del correspondiente homogéneo

Teorema 2.3 Sea un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ compatible con una solución particular $\vec{p}$. Entonces la solución general de $A\vec{x} = \vec{b}$ es $\vec{x} = \vec{p} + \vec{x}_h$ donde $\vec{x}_h$ es la solución general del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

Demostración:

$$A\vec{p} = \vec{b} \\ A\vec{x}_h = \vec{0}$$

Sumando las dos ecuaciones: $A\vec{p} + A\vec{x}_h = \vec{b} \Rightarrow A(\vec{p} + \vec{x}_h) = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \vec{p} + \vec{x}_h$ es la solución general de $A\vec{x} = \vec{b}$, pues es solución y tiene, a través de $\vec{x}_h$, $n - \text{rango } A$ parámetros libres. ■

Ejemplo 2.13 Determinar las soluciones generales de los siguientes sistemas:

$$I: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \quad II: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4 \end{cases}$$

I:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rg } A = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}$, por tanto $A\vec{x}$ tiene soluciones distintas de la trivial. Podemos simplificar un poco más la forma escalonada, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 & - & 4x_3 = 0 \\ & x_2 & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{array}$$

Resolvemos para las incógnitas principales y obtenemos:

$x_1 = 4/3 x_3$, $x_2 = 0$ y $x_3 = x_3$. En notación vectorial, la solución general de $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene la forma:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 \vec{v} \quad \text{con } \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Todas las soluciones del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ son múltiplos del vector $\vec{v}$. La solución trivial se obtiene para $x_3 = 0$. Geométricamente el conjunto de soluciones es una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\vec{0}$ y que contiene a $\vec{v}$.

La ecuación $\vec{x} = x_3 \vec{v}$ o $\vec{x} = t \vec{v}$ (con $t \in \mathbb{R}$), es la ecuación vectorial paramétrica de una recta pasando por el origen.

II:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rcl} 3x_1 - 4x_3 & = & -3 \\ & x_2 & = 2 \\ & 0 & = 0 \end{array}$$

Resolvemos para las incógnitas principales y obtenemos:

$x_1 = -1 + 4/3 x_3$, $x_2 = 2$ y x_3 parámetro libre. En notación vectorial, la solución general de $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene la forma:

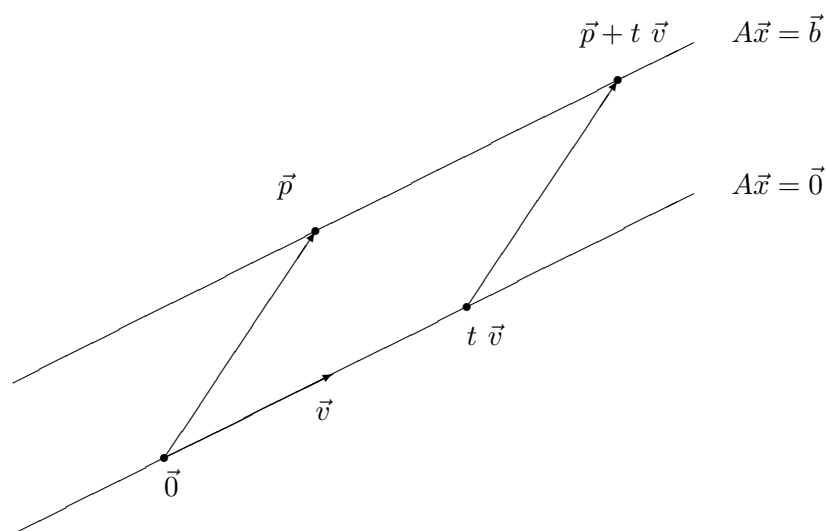
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{p}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

La solución general es $\vec{x} = \vec{p} + x_3 \vec{v}$ o $\vec{x} = \vec{p} + t \vec{v}$ ($t \in \mathbb{R}$)

La solución general del correspondiente sistema homogéneo ($A\vec{x} = \vec{0}$ con la misma matriz de coeficientes A) era $\vec{x} = t \vec{v}$ ($t \in \mathbb{R}$) con el mismo vector $\vec{v}$.

Por tanto la solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ se obtiene añadiendo a la solución de $A\vec{x} = \vec{0}$ el vector $\vec{p}$, que es una solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$ (por ejemplo la correspondiente a tomar el valor $t = 0$ en la solución general $\vec{x} = \vec{p} + t \vec{v}$).

En la figura siguiente se describen geométricamente los lugares ocupados por las soluciones de los sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$ y $A\vec{x} = \vec{0}$. No hay ninguna solución común a ambos. La solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es igual a la recta solución de $A\vec{x} = \vec{0}$, trasladada por el vector $\vec{p}$, siendo $\vec{p}$ cualquier solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$.



Ejemplo 2.14 Determina y describe geométicamente la solución de los sistemas:

$$[I]: 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$[II]: 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = a$$

[I] Es un sistema con una sola ecuación y tres incógnitas. No hace falta utilizar la notación matricial. Tomando x_1 como incógnita principal, y x_2, x_3 como parámetros libres

$$x_1 = \frac{0 + 3x_2 + 2x_3}{10}$$

por tanto, $x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$, y x_2, x_3 parámetros libres.

La solución general expresada como vector es:

$$\begin{aligned} \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= x_2 \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{con } x_2 \text{ y } x_3 \text{ parámetros libres}) \quad [Ib] \\ &\quad \vec{u} \quad \quad \vec{v} \end{aligned}$$

Cualquier solución del sistema se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales el conjunto de soluciones es un plano. El plano contiene el origen.

La ecuación [I], que es la ecuación de un plano que contiene el origen, es lo que llamamos ecuación del plano en forma implícita. La ecuación [Ib] es la ecuación del plano en forma vectorial paramétrica. La forma general de la ec. vectorial paramétrica de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pase por el origen se escribe así :

$$\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad (s, t \in \mathbb{R} \quad \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ no proporcionales})$$

[II] Despejando x_1 :

$$x_1 = \frac{a + 3x_2 + 2x_3}{10}$$

por tanto, $x_1 = 0.1a + 0.3x_2 + 0.2x_3$, y x_2, x_3 parámetros libres.

La solución general expresada como vector es:

$$\begin{aligned} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0.1a + 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.1a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.1a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{con } x_2 \text{ y } x_3 \text{ parámetros libres}) \quad [IIb] \\ &\quad \vec{p} \quad \quad \vec{u} \quad \quad \vec{v} \end{aligned}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ son los mismos vectores que en el sistema [I]. El vector $\vec{p}$ es una solución particular [II], que se obtiene cuando $x_2 = x_3 = 0$.

La ecuación [II] es la ecuación en forma implícita de un plano. El plano pasa por el origen si y sólo si $a = 0$. La ecuación [IIb] es la ecuación del plano en forma vectorial paramétrica.

2.5 Resolución de SL cuya matriz de coeficientes es inversible

2.5.1 Utilizando la inversa

Si A inversible estamos hablando de A cuadrada, es decir, de un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Sea el sistema $A_n \vec{x}_{n \times 1} = \vec{b}_{n \times 1}$, con A inversible, entonces

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}, \quad \text{por tanto} \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Tenemos una única solución, que vendrá dada por la expresión anterior.

Se cumple el siguiente resultado general:

Teorema 2.4 Sea A_n una matriz cuadrada de orden n , entonces A tiene inversa $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado.

$$A_n \vec{x} = \vec{b} \text{ es comp. determ. } \Leftrightarrow \text{rg } A_n = n \Leftrightarrow (\text{Capítulo 1}) A \text{ tiene inversa}$$

2.5.2 Método de Cramer

Consideremos el mismo sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con A inversible de orden n .

$$\text{Dados } A \text{ y } \vec{b} \text{ denotamos} \quad A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{b} & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

Col. i

$A_i(\vec{b})$ es la matriz que tiene en la columna i el vector $\vec{b}$ y las demás columnas como en A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A_i(\vec{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Col. i

La solución única $\vec{x}$ del sistema compatible $A\vec{x} = \vec{b}$ puede obtenerse como:

$$x_i = \frac{|A_i(\vec{b})|}{|A|}$$

Demostración:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \vec{x} = \frac{\text{adj}(A^t)\vec{b}}{|A|}$$

Desarrollándolo tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{|A|} (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n)$$

$x_i = \frac{1}{|A|} \times$ desarrollo del determinante de $A_i(\vec{b})$ por adjuntos de la columna i .

$$x_i = \frac{|A_i(\vec{b})|}{|A|}$$

Ejemplo 2.15 Resolver el siguiente sistema por el método de Cramer.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad |A_{x1}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_{x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \quad |A_{x3}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_{x1}|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29$$

$$x_2 = \frac{|A_{x2}|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16$$

$$x_3 = \frac{|A_{x3}|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

2.6 Resolución de SL por métodos iterativos

2.6.1 Introducción

Los sistemas de ecuaciones compatibles determinados se pueden resolver de dos maneras: por cálculo directo (por ejemplo por el método de eliminación gaussiana, Gauss-Jordan, haciendo uso de la inversa o por Cramer) o por un proceso iterativo que genera una secuencia de vectores que se aproxima a la solución exacta. Cuando la matriz de coeficientes es grande y con muchos ceros los algoritmos iterativos son más rápidos que los métodos

directos y requieren menos memoria del ordenador. El proceso iterativo puede detenerse tan pronto como la solución aproximada sea lo suficientemente buena para el trabajo práctico. Sin embargo, los métodos iterativos también pueden fallar o ser muy lentos para determinados problemas.

2.6.2 Marco general para la solución iterativa del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$

A lo largo de esta sección A es una matriz inversible, garantizando que la solución es única. El objetivo de un algoritmo iterativo es producir una secuencia de vectores,

$$\vec{x}^0, \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k, \dots$$

que converja a la solución única de $A\vec{x} = \vec{b}$. En otras palabras, las entradas de $\vec{x}^k$ serán tan próximas como se requiera a la solución de $A\vec{x} = \vec{b}$, con tal de que los valores de k sean suficientemente altos.

Para describir un algoritmo recurrente que produzca $\vec{x}^{k+1}$ a partir de $\vec{x}^k$, podemos escribir $A = M - N$ para matrices M y N adecuadas, y reescribir la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ como $(M - N)\vec{x} = \vec{b}$, es decir, $M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}$

Si una secuencia $\{\vec{x}^k\}$ verifica

$$M\vec{x}^{k+1} = N\vec{x}^k + \vec{b} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad [1]$$

y la secuencia converge a algún vector $\vec{x}^*$, entonces se puede demostrar que $\vec{x}^*$ es la solución de $A\vec{x} = \vec{b}$. (El vector de la izquierda de [1] tiende a $M\vec{x}^*$, mientras que el vector de la derecha de [1] tiende a $N\vec{x}^* + \vec{b}$. Esto implica que $M\vec{x}^* = N\vec{x}^* + \vec{b}$, y por tanto $(M - N)\vec{x}^* = \vec{b}$ y $A\vec{x}^* = \vec{b}$).

Para que la secuencia quede unívocamente especificada en [1], M debe ser inversible. Además debe escogerse M de forma que $\vec{x}^{k+1}$ sea fácil de calcular.

A continuación presentamos dos métodos iterativos con dos elecciones simples de la matriz M (N viene determinada por la ecuación $N = M - A$).

2.6.3 Método de Jacobi

Sea D la matriz diagonal formada por los elementos de la diagonal de A , es decir $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $d_{ii} = a_{ii}$. El método de Jacobi toma $M = D$ y $N = D - A$. Ya que M tiene que ser inversible, $d_{ii} \neq 0$ para todo i , por tanto el método exige que ninguno de los elementos de la diagonal de A sea nulo.

$$[1] \text{ queda: } D\vec{x}^{k+1} = (D - A)\vec{x}^k + \vec{b} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad [1a]$$

Para un SL de 3 ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad [2]$$

del desarrollo de [1a] se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}a_{11}x_1^{k+1} &= b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k \\a_{22}x_2^{k+1} &= b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k \\a_{33}x_3^{k+1} &= b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k\end{aligned}$$

y despejando las x_i^{k+1} :

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k}{a_{11}} \\x_2^{k+1} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k}{a_{22}} \\x_3^{k+1} &= \frac{b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k}{a_{33}}\end{aligned} \quad [2a]$$

La fórmula de recurrencia [2a] se puede describir mediante la siguiente ecuación general:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^k \right]$$

Una manera más sencilla de recordar la ley de recurrencia [2a] es despejar de la primera ecuación del sistema [2] la variable x_1 , de la segunda la variable x_2 y de la tercera la variable x_3 , y tener en cuenta que las variables de la izquierda (las que se calculan) corresponden a la iteración nueva, $k+1$, mientras que las de la derecha corresponden a la iteración antigua, k .

Con frecuencia, la información sobre el problema real nos puede sugerir un valor para $\vec{x}^0$. Si carecemos de información, por simplicidad tomamos $\vec{x}^0 = \vec{0}$.

2.6.4 Método Gauss-Seidel

Este método utiliza la fórmula de recurrencia [1] siendo M la parte triangular inferior de A . M tiene las mismas entradas que A en la diagonal y debajo de ella, y ceros sobre la diagonal. Al igual que en el método de Jacobi, *las entradas de la diagonal de A deben ser todas no nulas*, a fin de que M sea inversible.

Desarrollando el método para un SL de 3 ecuaciones y tres incógnitas obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}a_{11}x_1^{k+1} &= b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k \\a_{22}x_2^{k+1} &= b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k \\a_{33}x_3^{k+1} &= b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}\end{aligned}$$

y despejando las x_i^{k+1} :

$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k}{a_{11}} \\
x_2^{k+1} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k}{a_{22}} \\
x_3^{k+1} &= \frac{b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}}{a_{33}}
\end{aligned} \tag{2b}$$

La fórmula de recurrencia [2b] se puede describir mediante la siguiente ecuación general:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right]$$

Al igual que en el método de Jacobi, la ley de recurrencia [2b] se puede obtener sin más que despejar la variable x_1 de la primera ecuación del sistema [2], la variable x_2 , de la segunda y la variable x_3 de la tercera. La diferencia respecto a Jacobi es que al obtener la variable x_i , las variables x_j del segundo miembro con $j < i$ se toman de la iteración en curso. Dicho de otra forma, en el método de Jacobi se utilizan para cada iteración los valores de x_j de la iteración anterior, mientras que en el método de Gauss-Seidel se utilizan los últimos valores calculados, ya sea en la iteración en curso o en la iteración anterior.

Si carecemos de información que nos permita hacer una estimación de $\vec{x}^0$ tomamos por simplicidad $\vec{x}^0 = \vec{0}$.

2.6.5 Una condición suficiente para la convergencia por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

No se puede garantizar que la secuencia de soluciones dadas por las expresiones [2a] (Jacobi) y [2b] (Gauss-Seidel) sea convergente para cualquier sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ con A inversible y $a_{ii} \neq 0$. No obstante existe una condición simple (no necesaria) que garantiza la convergencia por los dos métodos.

Se dice que una matriz es **estrictamente diagonalmente dominante** si el valor absoluto de cada entrada de la diagonal principal es superior a la suma de los valores absolutos de las restantes entradas de la misma fila. Se puede demostrar que una matriz A estrictamente diagonalmente dominante tiene inversa y que las secuencias de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a la solución única de $A\vec{x} = \vec{b}$, para cualquier valor $\vec{x}^0$.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

2.6.6 Ejemplos

Ejemplo 2.16 Aplicar el método de Jacobi para el sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 18 \\ x_1 + 15x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + x_2 + 20x_3 = 17 \end{cases}$$

Toma $\vec{x}(0) = (0, 0, 0)$ como aproximación inicial de la solución y realiza iteraciones hasta que las diferencias en todas las entradas entre dos soluciones consecutivas sean menores que 0.001.

La matriz de coeficientes es estrictamente diagonalmente dominante, por tanto el SL converge tanto por Jacobi como por Gauss-Seidel.

El algoritmo recursivo se escribe en la forma:

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= \frac{18 - x_2^k + x_3^k}{10} \\x_2^{k+1} &= \frac{-12 - x_1^k - x_3^k}{15} \\x_3^{k+1} &= \frac{17 + x_1^k - x_2^k}{20}\end{aligned}$$

Para $k = 0$ tomamos $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$

y calculamos:

$$\begin{aligned}x_1^1 &= (18 - 0 + 0)/10 = 18/10 = 1.8 \\x_2^1 &= (-12 - 0 - 0)/15 = -12/15 = -0.8 \\x_3^1 &= (17 + 0 - 0)/20 = 17/20 = 0.85 \\&\Rightarrow \vec{x}^1 = (1.8, -0.8, 0.85)\end{aligned}$$

A continuación:

$$\begin{aligned}x_1^2 &= (18 - -0.8 + 0.85)/10 = 1.965 \\x_2^2 &= (-12 - 1.8 - 0.85)/15 = -0.976667 \\x_3^2 &= (17 + 1.8 - -0.8)/20 = 0.98 \\&\Rightarrow \vec{x}^2 = (1.965, -0.976667, 0.98) \\&\text{Y así sucesivamente para } \vec{x}^3, \vec{x}^4, \dots\end{aligned}$$

k	x_1	x_2	x_3	Δx_1	Δx_2	Δx_3
0	0	0	0			
1	1.8	-0.8	0.85			
2	1.965	-0.976667	0.98			
3	1.99567	-0.996333	0.997083			
4	1.99934	-0.999517	0.9996			
5	1.99991	-0.999929	0.999943	0.00057	-0.0004127	0.000342917

$$(x_1^5, x_2^5, x_3^5) = (1.99991, -0.999929, 0.999943)$$

Ejemplo 2.17 Aplicar el método de Gauss-Seidel al sistema anterior. Toma $\vec{x}^0 = (0, 0, 0)$ como aproximación inicial de la solución y realiza iteraciones hasta que las diferencias en todas las entradas entre dos soluciones consecutivas sean menores que 0.001.

El algoritmo recursivo tiene la forma:

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= \frac{18 - x_2^k + x_3^k}{10} \\x_2^{k+1} &= \frac{-12 - x_1^{k+1} - x_3^k}{15} \\x_3^{k+1} &= \frac{17 + x_1^{k+1} - x_2^{k+1}}{20}\end{aligned}$$

Para $k = 0$ tomamos $\vec{x}^0 = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

y calculamos:

$$x_1^1 = (18 - 0 + 0)/10 = 18/10 = 1.8$$

$$x_2^1 = (-12 - 1.8 - 0)/15 = -13.8/15 = -0.92$$

$$x_3^1 = (17 + 1.8 - -0.92)/20 = 19.72/20 = 0.986$$

$$\Rightarrow \vec{x}^1 = (1.8, -0.92, 0.986)$$

A continuación:

$$x_1^2 = (18 - -0.92 + 0.986)/10 = 19.906/10 = 1.9906$$

$$x_2^2 = (-12 - 1.9906 - 0.986)/15 = -14.9766/15 = -0.99844$$

$$x_3^2 = (17 + 1.9906 - -0.99844)/20 = 19.98904/20 = 0.999452$$

$$\Rightarrow \vec{x}^2 = (1.9906, -0.99844, 0.999452)$$

Y así sucesivamente para $\vec{x}^3, \vec{x}^4, \dots$

k	x_1	x_2	x_3	Δx_1	Δx_2	Δx_3
0	0	0	0			
1	1.8	-0.92	0.986			
2	1.9906	-0.99844	0.999452			
3	1.99979	-0.999949	0.999987			
4	1.99999	-0.999999	1.0	0.0002044	-0.00004929	0.0000126863

$$(x_1^4, x_2^4, x_3^4) = (1.99999, -0.999999, 1.0)$$

2.7 Ejercicios

Ejercicio 2.1 Discutir y resolver si es posible los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned}
 a) \begin{cases} x + 2y - 3z + t = 2 \\ 2x - y - z - t = 1 \\ -x + y + 2z - t = 0 \\ 3x + 2y - 4z - 3t = 1 \end{cases} & \quad b) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases} \\
 c) \begin{cases} x + 2y - 3z - 16t = 4 \\ + y + 2z - 3t = 6 \\ -x - y + z + 9t = -2 \end{cases} & \quad d) \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3y - 4z + 2t = 0 \\ 3x + z - t = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2 Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema, según los distintos valores del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -ax + y + z + t = 2 \\ x - ay + z + t = 3 \\ x + y - az + t = 4 \\ x + y + z - at = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 2.3 Estudiar según los valores de m el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 6x + 18y - 2mz = 0 \\ 7x - 2y - 4z = 0 \\ 4x + 10y - 6z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.4 Discutir y resolver si es posible, el siguiente sistema, según los valores de k .

$$\begin{cases} (k+5)x + (2k-1)y - z = 0 \\ x + (k-2)y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.5 Calcular los valores de m y k para que el sistema sea compatible e indeterminado.

$$\begin{cases} 3x + y + kz = 0 \\ x - y - z = 0 \\ mx + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.6 Calcular a para que sea compatible el siguiente sistema y resolverlo.

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 5 \\ 2x - y = 8 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.7 Calcular a para que el siguiente sistema admita solución distinta de la trivial y resolverlo.

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y - az = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.8 Resolver por el método de eliminación gaussiana el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3.5y + z = 22.35 \\ -5x + 3y + 3.3z = -9.08 \\ 12x + 7.8y + 4.6z = 21.38 \end{cases}$$

Ejercicio 2.9 Resolver por el método de eliminación gaussiana los siguientes sistemas. Nótese como los tres sistemas tienen la misma matriz de coeficientes A .

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases} & b) \begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ x + y + 2t = 8 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases} \\ c) \begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ x + y + 2t = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases} & \end{array}$$

Ejercicio 2.10 Determinar a y b para que el vector $(1, 0, a, b)$ pueda expresarse como combinación lineal de $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.

Ejercicio 2.11 Explica si las siguientes rectas tienen un punto de intersección común: $2x_1 + 3x_2 = -1$, $6x_1 + 5x_2 = 0$ y $2x_1 - 5x_2 = 7$. En caso afirmativo determina las coordenadas del punto intersección.

Ejercicio 2.12 Explica si las siguientes rectas tienen un punto de intersección común: $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_1 = -3$ y $-x_1 - 3x_2 = 4$. En caso afirmativo determina las coordenadas del punto intersección.

Ejercicio 2.13 En R^3 se consideran los planos $\Pi_1 : 2x - 2y + az = 0$ y $\Pi_2 : -3x + 3y + 3z = 0$, donde a es un parámetro. Determina el lugar geométrico de la intersección de los mismos en función del parámetro a .

Ejercicio 2.14 Se desea construir modularmente un edificio. El reparto de viviendas en cada planta se escogerá de uno de los tres planes posibles. Cada planta del Plan A tiene 3 viviendas de 3 habitaciones, 7 de dos habitaciones y 8 de una habitación. Cada planta del Plan B tiene 4 viviendas de 3 habitaciones, 4 de 2 habitaciones y 8 de una habitación. Cada planta del Plan C tiene 5 viviendas de 3 habitaciones, 3 de 2 habitaciones y 9 de una habitación.

a) ¿ Que interpretación darías al vector $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$?

b) Escribe una combinación lineal de vectores que exprese el total de viviendas de 3, 2 y 1 habitaciones del edificio.

c) ¿ Es posible diseñar un edificio con exactamente 66 viviendas de 3 habitaciones, 74 de dos habitaciones y 136 de una habitación?. En caso afirmativo, ¿ hay más de una forma?. Explica la respuesta.

Ejercicio 2.15 Resuelve por el método de Gauss-Jordan y por el método de Cramer.

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 2.16 Resolver el siguiente sistema por los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.17 Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de Jacobi con $\vec{x} = \vec{0}$. Realiza iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas sean consistentes con una tolerancia de 0.001 en cada entrada. Compara el número de iteraciones necesarias en los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para que dos aproximaciones sucesivas sean consistentes con esa tolerancia.

$$\begin{array}{ll} a) \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ -x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases} & b) \quad \begin{cases} 10x_1 - x_2 = 25 \\ x_1 + 8x_2 = 43 \end{cases} \\ c) \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 11 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 15 \\ 3x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases} & \end{array}$$

En el apartado a), teniendo en cuenta que la solución exacta es $\vec{x}^* = (2, 1)$, calcula el error relativo de x_1 y x_2 , en tanto por ciento, en las soluciones correspondientes a la segunda y tercera iteración.

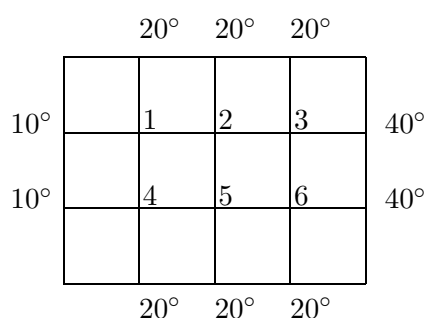
Ejercicio 2.18 Ninguno de los dos métodos iterativos estudiados funciona para el sistema que presentamos en este ejercicio. Compruébalo calculando las 3 primeras iteraciones para Gauss-Seidel, tomando como solución inicial el vector nulo. A continuación reordena las ecuaciones para que Gauss-Seidel funcione y calcula la solución con este método. Comprueba que la solución obtenida es correcta, calculando la solución mediante un método directo.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ 5x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

Ejercicio 2.19 Un problema importante en el estudio de la transferencia de calor es el de determinar la distribución de temperatura en estado estacionario de una placa delgada cuando se conoce la temperatura en el borde. Supóngase que la placa de la figura representa una sección transversal de una barra metálica, con flujo de calor despreciable en la dirección perpendicular a la placa. Denotemos $T_1, T_2, \dots, T_6$ las temperaturas de los 6 nodos interiores de la red de la figura. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual a la media de la temperatura de los 4 nodos más cercanos, a la izda, encima, a la derecha y por debajo. Por ejemplo:

$$T_1 = \frac{(10 + 20 + T_2 + T_4)}{4} \quad \text{o} \quad 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$$

- a) Escribe el sistema cuya solución nos da estimaciones de las temperaturas $T_1, T_2, \dots, T_6$.
b) Resuelve el sistema por eliminación gaussiana y usando un método iterativo.



Ejercicio 2.20 Encuentra una relación entre b_1 , b_2 y b_3 que haga compatible el sistema con la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & b_1 \\ 4 & 7 & -4 & b_2 \\ -6 & -3 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.21 Supón que la matriz de coeficientes de un SL es de orden 3×5 y tiene 3 columnas pivotaes. Explica por qué el sistema es compatible.

Ejercicio 2.22 Continúa la frase: "Si un sistema lineal es compatible, entonces la solución es única si y sólo si"

Ejercicio 2.23 Supón un conjunto de datos experimentales que puedan representarse como puntos en un plano. Un **polinomio interpolador** de los datos es un polinomio cuyo gráfico pasa por todos los puntos. En trabajos científicos un polinomio de este tipo puede usarse, por ejemplo, para estimar valores entre puntos conocidos. Otro uso es para crear curvas para gráficos de ordenador. Un método para encontrar un polinomio interpolador es resolver un sistema lineal.

Encuentra el polinomio interpolador $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ para los datos $(1,12)$, $(2,15)$, $(3,16)$. Es decir, encuentra a_0 , a_1 , a_2 , tales que:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 12 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 15 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 16 \end{cases}$$

Demuestra que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}, \text{ con } x_1 \neq x_2 \neq x_3 \text{ tiene rango 3.}$$

Ejercicio 2.24 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, encuentra a simple vista una solución de

$A\vec{x} = \vec{0}$ que no sea la solución $\vec{0}$. (Pista: Que una combinación lineal de las dos columnas produzca el vector nulo).

Ejercicio 2.25 Estudiar el tipo de solución en función del parámetro a

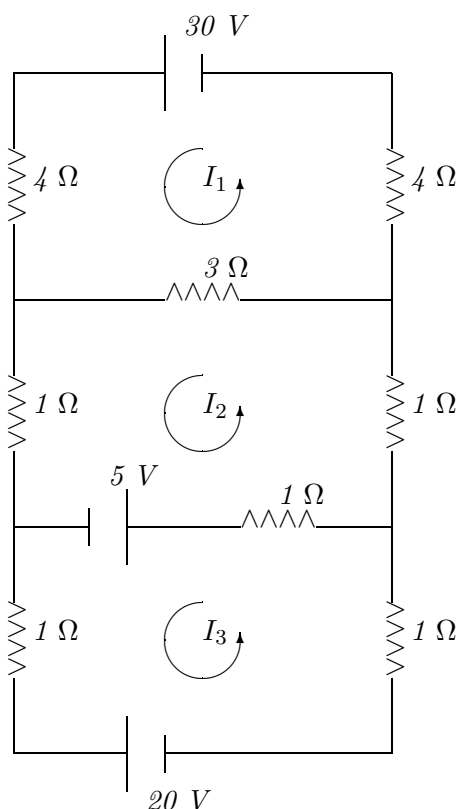
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + a x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.26 Estudiar el tipo de solución en función del parámetro λ

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + 2\lambda x_3 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.27 Determina la corriente en las mallas de la red de la Figura, sabiendo que el sistema lineal correspondiente es:

$$\begin{cases} 11I_1 - 3I_2 = 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5 \\ -I_2 + 3I_3 = -25 \end{cases}$$



Ejercicio 2.28 Ejercicio tipo test. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + 10z = 3 \\ x + 6y + z = 4 \\ 5x + y + z = -4 \end{cases}$$

La solución correspondiente a la primera iteración de Gauss-Seidel del sistema diagonalmente dominante equivalente al dado, tomando como solución inicial $(0, 0, 0)$ y redondeando a 3 cifras significativas (3 cifras contadas a partir del primer dígito no nulo) es:

a) $(-1.02, 0.783, 0.324)$

b) $(-0.800, 0.800, 0.300)$

c) $(-0.800, 0.667, 0.300)$

Ejercicio 2.29 Clasifica los sistemas lineales con las matrices ampliadas siguientes como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, en función de los parámetros a y b . Cuando un caso no se pueda dar escribe “nunca”. Cuando un caso se dé siempre, independientemente del valor de a y b escribe “siempre”. Para los casos en los que obtengas varios valores de parámetros, únelos explícitamente utilizando la conjugación pertinente “y” u “o” (las comas no valen).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2b & b-1 \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a & b \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatible determinado.....} \\ \text{Compatible indeterminado.....} \\ \text{Incompatible.....} \end{array} \right.$$

2.8 Soluciones

2.1

a) $(x, y, z, t) = (2, 1, 1, 1)$

b) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

c)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 16t = 4 \\ y + 2z - 3t = 6 \\ -x - y + z + 9t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -16 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 9 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -16 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -16 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -16 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 16t = 4 \\ y + 2z - 3t = 6 \\ z + t = 1 \end{cases}$$

$$z = 1 - t$$

$$y = 6 + 3t - 2z = 6 + 3t - 2(1 - t) = 4 + 5t$$

$$x = 4 + 16t + 3z - 2y = 4 + 16t + 3(1 - t) - 2(4 + 5t) =$$

$$4 + 16t + 3 - 3t - 8 - 10t = -1 + 3t$$

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ y &= 4 + 5t \\ z &= 1 - t \\ t &= t \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

La solución también se puede expresar así :

$$\{ (-1 + 3t, 4 + 5t, 1 - t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Sistema compatible e indeterminado.

Rango A = Rango A* = 3 < 4 = número de incógnitas

Realizar la comprobación sustituyendo la solución en el sistema inicial.

d)

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3y - 4z + 2t = 0 \\ 3x + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 24 & -12 & 0 \\ 0 & 15 & -25 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 24 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 5y - 8z + 4t = 0 \\ -z - 2t = 0 \end{cases} \quad z = -2t$$

$$y = \frac{-4t + 8z}{5} = \frac{-4t - 16t}{5} = \frac{-20t}{5} = -4t \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = t - 2z + y = t + 4t - 4t = t$$

La solución también se puede expresar así: $\{ (t, -4t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Sistema compatible e indeterminado.

Rango A = Rango A* = 3 < 4 = número de incógnitas

Realizar la comprobación sustituyendo la solución en el sistema inicial.

2.2 $a = -11$ compatible determinado, solución: $(1/10, 1/5, 3/10, 2/5)$; $a \neq -11$ incompatible

2.3 $m = 5$ compatible indeterminado, $m \neq 5$ compatible determinado.

2.4 $k = 2$ comp. indeterminado; $k = -2$ comp. indeterminado; $k \neq 2$ y $k \neq -2$ comp. determinado. Para $k = 2$ la solución es $\vec{x} = \lambda(1, -2, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Para $k = -2$ la solución es $\vec{x} = \lambda(-1, -2, 7)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.5 Comp. indeterminado $\Leftrightarrow m = -1$.

2.6 El sistema es compatible $\Leftrightarrow a = 1$. La solución es $(3, -2)$.

2.7 $a = 1$ comp. indeterminado; $a = 0$ comp. indeterminado; $a \neq 0$ y $a \neq 1$ comp. determinado. Falta resolver.

2.8 $(x, y, z) = (2.5, -3.7, 4.4)$

2.9

a) Compatible indeterminado. La solución es $\vec{x} = \alpha(-1, 1, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Compatible indeterminado. La solución es $\vec{x} = (2, 0, 2, 3) + \alpha(-1, 1, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}$.

c) Incompatible.

2.10 $a = 11, b = -4$

2.11 No existe ningún punto común

2.12 El punto común es $(-13/7, -5/7)$

2.15 $(x_1, x_2, x_3) = (6.95, 2.5, -0.15)$

2.16

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 4x_4 &= 1 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1+x_2}{4}, \quad x_2 = \frac{1+x_1+x_3}{4}, \quad x_3 = \frac{1+x_2+x_4}{4}, \quad x_4 = \frac{1+x_3}{4}$$

Método de Jacobi

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.25	0.25	0.25	0.25
2	0.3125	0.375	0.375	0.3125
3	0.3438	0.4219	0.4219	0.3438
4	0.3555	0.4414	0.4414	0.3555
5	0.3604	0.4492	0.4492	0.3604
6	0.3623	0.4524	0.4524	0.3623
7	0.3631	0.4537	0.4537	0.3631
8	0.3634	0.4542	0.4542	0.3634
9	0.3636	0.4544	0.4544	0.3636
10	0.3636	0.4545	0.4545	0.3636

Solución: (0.3636, 0.4545, 0.4545, 0.3636) en 10ª iteración. Las siguientes iteraciones dan el mismo valor utilizando 4 cifras significativas.

Método de Gauss-Seidel

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.25	0.3125	0.3281	0.3320
2	0.3281	0.4140	0.4365	0.3591
3	0.3535	0.4475	0.4516	0.3629
4	0.3619	0.4534	0.4541	0.3635
5	0.3634	0.4544	0.4545	0.3636
6	0.3636	0.4545	0.4545	0.3636

Solución: (0.3636, 0.4545, 0.4545, 0.3636) en 6ª iteración. Las siguientes iteraciones dan el mismo valor utilizando 4 cifras significativas.

2.17a

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ -x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases} \quad x_1 = \frac{7-x_2}{4}, \quad x_2 = \frac{-7+x_1}{5}$$

Método de Jacobi

k	x_1	x_2	Δx_1	Δx_2
0	0	0		
1	1.75	-1.4		
2	2.1	-1.05		
3	2.0125	-0.98	0.0875	0.07
4	1.995	-0.9975	0.0175	0.0175
5	1.9994	-1.001	0.004375	0.0035
6	2.0002	-1.0001	0.000875	0.000875

$$(x_1^6, x_2^6) = (2.0002, -1.0001)$$

Método de Gauss-Seidel

k	x_1	x_2	Δx_1	Δx_2
0	0	0		
1	1.75	-1.05		
2	2.0125	-0.9975		
3	1.9994	-1.0001	0.013125	0.002625
4	2.0000	-0.99999	0.00065625	0.00013125

$$(x_1^4, x_2^4) = (2.0000, -0.9999)$$

2.19

a) Escribir el sistema de ecuaciones

$$T_1 = \frac{20 + 10 + T_2 + T_4}{4}$$

$$T_2 = \frac{20 + T_1 + T_3 + T_5}{4}$$

$$T_3 = \frac{20 + 40 + T_2 + T_6}{4}$$

$$T_4 = T_1; \quad T_5 = T_2; \quad T_6 = T_3$$

$$T_1 = \frac{20 + 10 + T_2 + T_1}{4}$$

$$T_2 = \frac{20 + T_1 + T_3 + T_2}{4}$$

$$T_3 = \frac{20 + 40 + T_2 + T_3}{4}$$

$$\begin{cases} 3T_1 - T_2 = 30 \\ -T_1 + 3T_2 - T_3 = 20 \\ -T_2 + 3T_3 = 60 \end{cases}$$

b) Eliminación gaussiana

$$T_1 = 17.1429^\circ$$

$$T_2 = 21.4286^\circ$$

$$T_3 = 27.1429^\circ$$

b) Gauss-Seidel

k	T_1	T_2	T_3	ΔT_1	ΔT_2	ΔT_3
1	10	10	23.333			
2	13.333	18.889	26.296	3.33	8.89	2.96
3	16.296	20.864	26.955	2.96	1.98	0.66
4	16.955	21.303	27.101	0.66	0.44	0.15
5	17.101	21.401	27.134	0.15	0.097	0.032
6	17.134	21.422	27.141	0.03	0.02	0.007

Para una tolerancia de por ejemplo 1° C , la última iteración necesaria sería la 4^a .

2.20 $5b_1 - 4b_2 - b_3 = 0$

2.21

$$A = \begin{bmatrix} \text{Pivote1} & * & * & * & * \\ 0 & \text{Pivote2} & * & * & * \\ 0 & 0 & \text{Pivote3} & * & * \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

Si A tiene 3 pivotes, hay un elemento pivote en la tercera fila, y por tanto no hay ninguna fila del tipo $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ b]$ con $b \neq 0$ en A^* .

2.22 “Si un sistema lineal es compatible, entonces la solución es única si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas.”

2.23

$$\begin{cases} a_0 + a_1 1 + a_2 1 = 12 \\ a_0 + a_1 2 + a_2 4 = 15 \\ a_0 + a_1 3 + a_2 9 = 16 \end{cases}$$

La solución del sistema es $(a_0, a_1, a_2) = (7, 6, -1)$. El polinomio interpolador es $p(t) = 7 + 6t - t^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.24 $(-3, 1)$

$$-3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.27

$$\begin{cases} 11I_1 - 3I_2 & = 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 & = 5 \\ -I_2 + 3I_3 & = -25 \end{cases}$$

$(I_1, I_2, I_3) = (3, 1, -8)$ Amperios

2.28

$$\begin{cases} x + y + 10z = 3 \\ x + 6y + z = 4 \\ 5x + y + z = -4 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + y + z = -4 \\ x + 6y + z = 4 \\ x + y + 10z = 3 \end{cases}$$

$$x = -4/5 = -0.8$$

$$y = (4 - x - z)/6 = (4 + 0.8)/6 = 4.8/6 = 0.8$$

$$z = (3 - x - y)/10 = (3 + 0.8 - 0.8)/10 = 3/10 = 0.3$$

La solución es $(-0.8, 0.8, 0.3)$, por tanto la respuesta b es la correcta.

La respuesta a es incorrecta, y corresponde a la solución exacta redondeada a 3 cifras significativas.

La respuesta c es incorrecta, y nos da la solución de la primera iteración con el método de Jacobi ($x = -4/5 = -0.8$, $y = 4/6 = 2/3 = 0.667$, $z = 3/10 = 0.3$).

CAPÍTULO 3

Espacios vectoriales

3.1 Definición de espacio vectorial

Definición 3.1 *Un conjunto no vacío de elementos V en el que están definidas las operaciones de suma (op. interna) y multiplicación por escalares de un cuerpo $\mathbb{K}$ (op. externa), cumpliendo las 10 propiedades siguientes, es un **espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$** .*

Propiedades de la suma

- 1) Operación cerrada: $\forall u, v \in V, u + v \in V$
- 2) Asociativa: $\forall u, v, w \in V, u + (v + w) = (u + v) + w$
- 3) Elemento neutro: $\exists 0 \in V / u + 0 = u \quad \forall u \in V$
- 4) Conmutativa: $\forall u, v \in V, u + v = v + u$
- 5) Existencia de elemento opuesto:
$$\forall u \in V \quad \exists -u / u + (-u) = 0$$

Propiedades de la multiplicación por escalares del cuerpo $\mathbb{K}$

- 6) Cerrada: $\forall u \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha u \in V$
- 7) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- 8) Distributiva respecto de la suma de escalares:
$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$
- 9) Asociativa respecto del producto por escalares:
$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$
- 10) $1u = u$
1 es el elemento neutro del producto en el cuerpo $\mathbb{K}$ o elemento unidad del cuerpo. También se denota como 1_K

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

- a) $\forall u \in V \quad 0 u = 0_V$
 0 = elemento neutro de la suma de escalares = elemento nulo de $\mathbb{K}$
 0_V = elemento neutro de la suma de elementos de V = elemento nulo de V
- b) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda 0_V = 0_V$
- c) $\lambda u = 0_V \Rightarrow \lambda = 0 \text{ o } u = 0_V$
- d) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ y } \forall u \in V$
$$(-\lambda) u = -(\lambda u) = \lambda(-u)$$

3.2 Ejemplos

3.2.1 $(M_{m \times n}, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

El conjunto es el formado por matrices $m \times n$ con elementos reales. La operación interna es la suma de matrices reales, y la operación externa es el producto de una matriz real por un real. El conjunto y las operaciones fueron definidas en el Capítulo 1. El conjunto formado por todas las matrices reales de orden $m \times n$, con estas operaciones, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Por ejemplo $(M_{2 \times 2}, \mathbb{R})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Ilustramos 3 de las propiedades (suma cerrada, elemento neutro de la suma y producto por escalar cerrado).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ con } a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}, \in (M_{2 \times 2}, \mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ es el elemento neutro de la suma en } (M_{2 \times 2}, \mathbb{R})$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} \in (M_{2 \times 2}, \mathbb{R})$$

3.2.2 $(M_{m \times n}, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}$ no es espacio vectorial

En efecto, el producto de una matriz real por un escalar complejo con la parte imaginaria no nula, no da como resultado una matriz real.

3.2.3 $(M_{m \times n}, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos de $\mathbb{C}$, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

3.2.4 $(M_{m \times n}, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos de $\mathbb{C}$, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

3.2.5 $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

Recordemos la definición que habíamos dado de **vectores** como matrices columna.

Denotamos $(M_{n \times 1}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Por ser $(M_{m \times n}, \mathbb{R})$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ para todo m y n , lo será en particular para las matrices columna o vectores. Es decir, $\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se expresa: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot \mathbb{R})$ espacio vectorial. La primera operación es la suma de elementos de $\mathbb{R}^n$ y la segunda el producto de un elemento de $\mathbb{R}^n$ por un elemento de $\mathbb{R}$.

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan vectores y en general se denotan con una letra minúscula latina y con una flecha encima.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Los elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ se denominan primera, segunda, ..., enésima **componente** de $\vec{x}$.

También se admite la notación $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{con } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad \text{con } x'_1, x'_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suma: } \vec{x} + \vec{x}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Producto por un escalar: } \lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2$ también se puede expresar así: $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

$$\text{Suma: } (x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$$

$$\text{Multiplicación por un escalar: } \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

El elemento neutro, también llamado vector nulo de $\mathbb{R}^2$, es el vector $(0,0)$.

El opuesto de un vector dado $\vec{x} = (x_1, x_2)$ es el vector $-\vec{x} = (-x_1, -x_2)$.

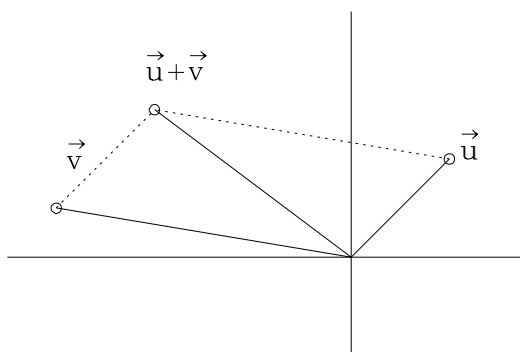
Descripción geométrica de $\mathbb{R}^2$

Consideremos un sistema de coordenadas rectangulares en el plano. Entonces cada vector de $\mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, se puede identificar con un punto (x_1, x_2) en el plano. Por tanto podemos interpretar $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de todos los puntos en el plano.

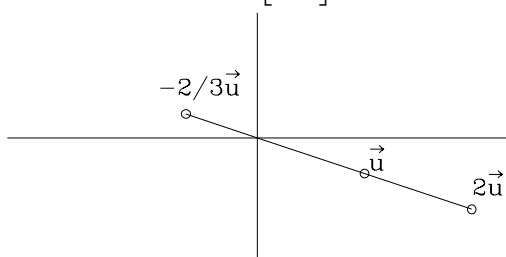
La suma de dos vectores tiene una representación geométrica interesante, verificándose el siguiente resultado:

REGLA DEL PARALELOGRAMO: Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ se representan por puntos en el plano, entonces a $\vec{u} + \vec{v}$ le corresponde el cuarto vértice del paralelogramo cuyos otros vértices son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{0}$.

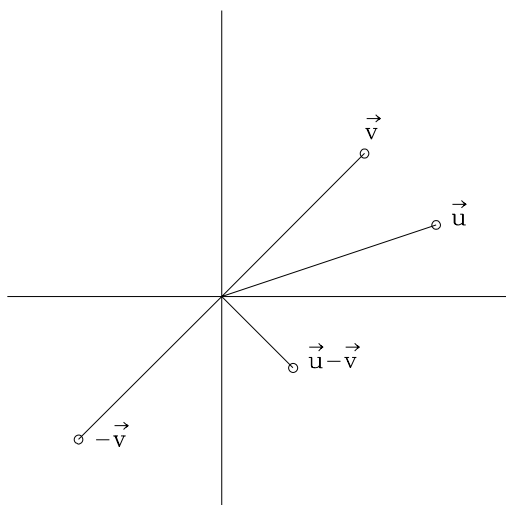
Ejemplo 3.1 Representar en un plano $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$



Ejemplo 3.2 Sea $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Representa graficamente los vectores $\vec{u}$, $2\vec{u}$, y $-\frac{2}{3}\vec{u}$.



Para simplificar la notación, también utilizamos la resta de vectores, y escribimos $\vec{u} - \vec{v}$ en lugar de $\vec{u} + -\vec{v}$. La figura muestra $\vec{u} - \vec{v}$ como suma de $\vec{u}$ y $-\vec{v}$.



$\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$

Los vectores de $\mathbb{R}^3$ son matrices columna 3×1 con tres entradas reales. Se representan geoméricamente por puntos en el espacio de coordenadas tridimensional.

Ejemplo 3.3 Sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Calcula $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

3.2.6 $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

$$(M_{n \times 1}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

El vector nulo es ahora $(0 + 0i, \dots, 0 + 0i)$ (con n entradas)

El elemento unidad es $1 \in \mathbb{R}$ (recordemos que el producto por escalar es op. externa)

3.2.7 $\mathbb{C}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

El vector nulo es $(0 + 0i, \dots, 0 + 0i)$ (con n entradas)

El elemento unidad es $(1 + 0i) \in \mathbb{C}$

3.3 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$

En esta sección estudiaremos varios conceptos y teoremas relacionados, aplicados al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, que incluyen: combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal, sistema de generadores, base, coordenadas respecto a una base dada, y ecuaciones de transformación de coordenadas por cambio de base.

Para simplificar la notación, designaremos este esp. vect. simplemente como $\mathbb{R}^n$, entendiendo que el cuerpo para la op. externa es $\mathbb{R}$. Todas las definiciones y resultados que veremos a continuación (dependencia lineal, base, dimensión, etc) se podrían extender fácilmente a cualquier espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

3.3.1 Combinación lineal

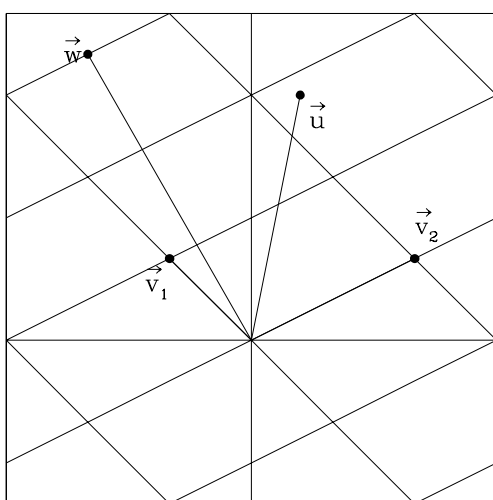
Definición 3.2 Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$, llamamos *combinación lineal* de estos vectores a cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que se pueda escribir en la forma $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_p\vec{v}_p$, con $c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R}$.

A los escalares $c_1, c_2, \dots, c_p$ se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden ser cualquier real, incluyendo el cero.

Son por ejemplo combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ los siguientes vectores:

$$\sqrt{3}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 \quad , \quad \vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$$

Ejemplo 3.4 En la figura se muestran combinaciones lineales seleccionadas de los vectores $\vec{v}_1 = (-1, 1)$ y $\vec{v}_2 = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Estima las combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que generan a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.



$$\begin{aligned}\vec{u} &\simeq 1.8\vec{v}_1 + 1.2\vec{v}_2 \\ \vec{w} &\simeq 3\vec{v}_1 + 0.5\vec{v}_2\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5 Sean $\vec{a}_1 = (1, -2, -5)$, $\vec{a}_2 = (2, 5, 6)$ y $\vec{b} = (7, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$. Determina si $\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. Es decir, determina si existen coeficientes x_1, x_2 tales que $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$.

Comenzamos escribiendo la ec. vect.
$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\vec{a}_1 \qquad \qquad \vec{a}_2 \qquad \qquad \vec{b}$

, que es lo mismo que:
$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por tanto hemos de resolver el SL:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 = -3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema transformando la matriz ampliada a la forma escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Por tanto $\vec{b}$ es una combinación lineal de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$, con coeficientes $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Es decir,

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Recordemos del Cap. 2 que una ec. vect. de la forma: $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{b}$ tiene la misma solución que el SL cuya matriz ampliada es $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \mid \vec{b}]$. Por tanto $\vec{b}$ es c.l. de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \Leftrightarrow [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \mid \vec{b}]$ es compatible.

3.3.2 Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es **linealmente dependiente** (también llamado “ligado”) si existen unos escalares $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \quad [1]$$

Expresado de otra forma, un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es **linealmente dependiente** si la ecuación vectorial

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \quad \text{tiene solución distinta de la trivial.}$$

Una ecuación como [1], en la que no todos los coeficientes son nulos, se denomina **relación de dependencia lineal** entre los vectores $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p$.

Un conjunto es **linealmente independiente** (también llamado “libre”) si y sólo si no es linealmente dependiente. Expresado de otra forma, un conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \quad \text{tiene únicamente la solución trivial.}$$

Decimos que los vectores de un conjunto son linealmente independientes cuando el conjunto es linealmente independiente, y decimos que los vectores de un conjunto son linealmente dependientes cuando el conjunto es linealmente dependiente.

Una ecuación vectorial de la forma: $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_p = \vec{0}$ tiene la misma solución que el SL cuya matriz ampliada es $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \mid \vec{0}]$. El conjunto de vectores es libre si el SL homogéneo es comp. det. (rango de la matriz $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p] = p$) y ligado si el SL homogéneo es comp. indeterminado (rango de la matriz $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p] < p$).

Algunos resultados sobre dependencia e independencia lineal

Obtención de subconjuntos l.i. a partir de un conjunto l.d.

- En los conjuntos l.d. los vectores que hacen el SL indeterminado son los correspondientes a columnas no pivotaes. Si las elimináramos dejando sólo las columnas pivotaes el SL pasaría a ser determinado, y los vectores originales de esas columnas formarían un subconjunto l.i.
- El máximo número de vectores linealmente independientes dentro del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es igual al $\text{rg}[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$, es decir al número de columnas pivotaes de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$.

Otras propiedades

Teorema 3.1 Si un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ contiene el vector $\vec{0}$, entonces el conjunto es linealmente dependiente.

Demostración: Supongamos que el vector nulo es $\vec{v}_1$, entonces, $1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_p = \vec{0}$ y por tanto existe una combinación lineal nula sin que todos los coeficientes sean nulos.

Otra forma de demostrarlo es que si el conjunto incluye el vector $\vec{0}$ el rango de la matriz cuyas columnas sean los vectores será menor que el número de vectores, pues $\vec{0}$ corresponde a una columna nula ■

Teorema 3.2 Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{v}$ es un conjunto libre.

Demostración: $c\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow c = 0$ ■

Teorema 3.3 Si un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es ligado, un conjunto que se forme añadiendo vectores a éste será también ligado.

Demostración:

Como el rango era menor que el número de vectores, al añadir un vector el rango seguirá siendo inferior al número total de vectores. ■

Teorema 3.4 Si un conjunto contiene más vectores que componentes tiene cada vector, entonces el conjunto es linealmente dependiente.

Demostración: Llamemos p al número de vectores y n al número de componentes. Además $p > n$

La matriz $[\vec{v}_1 \vec{v}_2 \dots \vec{v}_p]$ es una matriz $n \times p$. Como $n < p$, el rango será como máximo $n < p$, luego el conjunto es ligado. ■

Teorema 3.5 Si un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente, todo subconjunto de éste es también linealmente independiente.

Demostración: Hay tantas columnas pivotaes como vectores, y si reducimos un vector reducimos una columna pivotal. ■

Teorema 3.6 Si un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es libre, mientras que el conjunto que se obtiene añadiéndole un vector $\vec{v}_{p+1}$ es ya ligado, entonces $\vec{v}_{p+1}$ se puede expresar como combinación lineal del resto.

Demostración: Consideremos el sistema lineal con matriz ampliada $[\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p \mid \vec{v}_{p+1}]$. El rango de la matriz de coeficientes es p , pues los p vectores son l.i., y el rango de la matriz ampliada es p , puesto que el sistema pasa a ser ligado, luego el vector $\vec{v}_{p+1}$ no produce columna pivotal adicional. Por tanto el sistema es compatible, y el vector de la última columna es c.l. de los anteriores. ■

Teorema 3.7 Un conjunto formado por dos vectores es linealmente dependiente si y sólo si uno de ellos es múltiplo del otro.

Ejemplo 3.6 Determina mediante inspección si los siguientes conjuntos son linealmente dependientes.

$$a. \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad b. \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c. \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad d. \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

El primer conjunto es l.d. porque tiene más vectores que entradas tienen éstos. El segundo conjunto es l.d. porque contiene el vector nulo. El tercer conjunto es l.i. porque los dos vectores no son uno múltiplo del otro. El último conjunto es l.i. porque está formado por un sólo vector y no es el vector nulo.

Caracterización de conjuntos linealmente dependientes

Teorema 3.8 *Un conjunto $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ de dos o más vectores es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores de S es una combinación lineal del resto y recíprocamente.*

Demostración:

“ $\Rightarrow$ ” Si el conjunto es l.d., entonces existe una relación de dependencia lineal. En la relación de dependencia lineal podré despejar al menos un vector.

“ $\Leftarrow$ ” Si $\vec{v}_3 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$, entonces $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$, y ya tenemos una relación de dependencia lineal, y por tanto el conjunto es ligado.

■

En un conjunto ligado los vectores de las columnas no pivotaes se pueden expresar como c.l. de los vectores de las columnas pivotaes. En efecto, colocando una columna no pivotal en el segundo miembro, tendríamos que matriz de coeficientes (con sólo columnas pivotaes) y matriz ampliada tendrían el mismo rango, luego el SL sería compatible, y el vector del segundo miembro c.l. de los vectores del primer miembro.

El teorema anterior no nos dice que todo vector de un conjunto linealmente dependiente pueda expresarse como combinación lineal del resto.

Ejemplo: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 0, 1)\}$

El conjunto es linealmente dependiente:

$$2(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) - 1(2, 2, 0) + 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$(2, 2, 0)$ puede expresarse como combinación lineal del resto:

$$(2, 2, 0) = 2(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0)$$

pero $(0, 0, 1)$ no puede expresarse como combinación lineal del resto.

Ejemplo 3.7 *Determinar si los vectores $(1,0)$, $(0,1)$ y $(3,1)$ forman un conjunto libre o ligado.*

Observamos que $(3,1) = 3(1,0) + (0,1)$ por tanto concluimos directamente que el conjunto es ligado.

También podemos ver que existe c.l. nula sin que los coeficientes sean todos nulos, sin más que colocar todos los vectores en el mismo lado de la igualdad:

$$3(1, 0) + (0, 1) - (3, 1) = (0, 0)$$

Los coeficientes son $3, 1, -1$, por tanto no todos nulos.

Ejemplo 3.8 *Demostrar que los vectores $(1, 2)$, $(3, 1)$ forman un conjunto libre.*

Tenemos que demostrar que la ec. $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ tiene sólo solución trivial, es decir el SL es comp. det.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$|A| \neq 0$ por tanto comp. det.

Ejemplo 3.9 *Demostrar que los vectores $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ forman un conjunto libre.*

Tenemos que demostrar que la ec. $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ tiene sólo solución trivial, es decir que el SL es comp. det.

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{rg}A = 2 = \text{número de incógnitas, por tanto comp. det.}$ Los únicos coeficientes que permiten obtener la c.l. $\vec{0}$ son $0, 0$

Ejemplo 3.10 Comprueba que el conjunto S de vectores de $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente. Encuentra una relación de dependencia lineal entre los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, y obtén un subconjunto de S con el máximo número posible de vectores linealmente independientes.

$$S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \} \quad \text{con } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que ver si existe solución no trivial de la ecuación:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [2] \quad \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomemos la matriz ampliada del sistema y resolvámoslo por eliminación gaussiana:

$$A^* = \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

El SL es comp. indeterminado. Por tanto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son linealmente dependientes.

Para encontrar una relación de dependencia lineal, resolvemos el sistema, tomando x_1 y x_2 como incógnitas principales y x_3 como parámetro libre, obteniendo:

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -4x_2 - 2x_3 = 4x_3 - 2x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Una solución no nula posible es $(2, -1, 1)$ y la relación de dependencia lineal correspondiente es (ver [2]): $\boxed{2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}}$.

Por ser el sistema indeterminado hay infinitas relaciones de dependencia lineal posibles. Otra sería por ejemplo: $4\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 = \vec{0}$

De la relación encuadrada deducimos que en este ejemplo cualquier vector puede expresarse como c.l. de los otros dos. La razón es que en la relación de dependencia lineal todos los vectores aparecen multiplicados por números distintos de cero, y por tanto podemos despejar cualquiera de ellos.

Se puede comprobar que eliminando cualquiera de los tres vectores se obtiene un subconjunto independiente.

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$: Ver las dos columnas pivotaes en la eliminación gaussiana realizada. Con dos columnas pivotaes y 2 incógnitas el sist. es comp. det.
- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$: Si hubiésemos eliminado $\vec{v}_2$, el tercer vector formaría columna pivotal.
- $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$: Sabemos que este conjunto es l.i. porque un vector no es múltiplo del otro. Para que $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_2$, $\alpha = 2$ para la primera componente y $\alpha = 5$ para la segunda, luego no existe α que cumpla la ec. vectorial. Para demostrarlo con el sistema homogéneo:

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ es comp. det.}$$

3.3.3 Sistema de generadores

Definición 3.3 Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$, si $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S , es decir, existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ / $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{v}$ [1]

Expresado de otra forma: $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es s.g. de $\mathbb{R}^n$ si $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ el sistema lineal $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \mid \vec{v}]$ es compatible.

Teorema 3.9 Sea un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ que es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un subconjunto de S linealmente independiente y con número de vectores igual al rango de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$ que también genera $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

- Si el conjunto inicial es linealmente independiente, entonces el subconjunto l.i. es el propio conjunto inicial y el número de vectores l.i. es p .
- Si el conjunto es l.d., entonces al menos un vector será combinación lineal del resto.

Supongamos que $\vec{v}_1$ sea c.l. del resto.

$$\vec{v}_1 = c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 + \dots + c_p \vec{v}_p$$

Sustituyendo $\vec{v}_1$ en [1] obtenemos:

$$\vec{v} = \lambda_1 (c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 + \dots + c_p \vec{v}_p) + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = (\lambda_1 c_2 + \lambda_2) \vec{v}_2 + (\lambda_1 c_3 + \lambda_3) \vec{v}_3 + \dots + (\lambda_1 c_p + \lambda_p) \vec{v}_p$$

Por tanto $\{\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ sigue generando $\mathbb{R}^n$.

Hemos eliminado $\vec{v}_1$. Procediendo de este modo iríamos eliminando vectores hasta que todos los vectores finales fueran linealmente independientes entre sí. Así quedaría demostrado que el subconjunto l. i. también genera $\mathbb{R}^n$. El número de vectores eliminados es $p - \text{rg} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$. ■

Comentario: Tendremos dos tipos posibles de sistemas generadores S de $\mathbb{R}^n$: Si S es l.i. la expresión de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ como c.l. de los vectores de S será única (los coeficientes serán únicos), si S es l.d. $\vec{v}$ se podrá expresar de infinitas maneras como combinación lineal de los vectores. El teorema anterior permite extraer de un S.G.L.D. un S.G.L.I.. Ventaja: mínimo número de vectores generadores y expresión de la c.l. única.

Ejemplo 3.11 Sea $C = \{ (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ un conjunto de vectores generador de $\mathbb{R}^3$. Obtén un subconjunto C' de C que sea linealmente independiente y sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

En efecto el conjunto C es sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ ya que el sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right] \text{ es compatible para cualquier } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$\text{rg}[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_4] = 3$ por tanto se ha de eliminar un vector para obtener un subconjunto l.i. que sea a su vez sistema generador.

Eliminando $\vec{v}_3$ tendríamos un subconjunto linealmente independiente (rango igual a número de vectores, 3) y generador de $\mathbb{R}^3$, pues el correspondiente sistema es compatible ($\text{rg}A = \text{rg}A^* = 3$). Luego una solución posible es $C' = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4 \}$

Alternativamente, podríamos haber eliminado $\vec{v}_2$, quedándonos con el subconjunto $C' = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \}$ que es linealmente independiente y generador de $\mathbb{R}^3$.

No sería válido eliminar $\vec{v}_4$, pues en este caso sólo podríamos generar vectores de la forma $(x, y, 0)$. Si $z \neq 0$ el sistema sería incompatible ($\text{rg}A=2$ y $\text{rg}A^*=3$).

Podemos demostrar que sí es posible eliminar $\vec{v}_1$ y quedarnos con el subconjunto $C' = \{ \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right]$$

En efecto el subconjunto es linealmente independiente (rango igual a número de vectores, 3) y generador de $\mathbb{R}^3$, pues el correspondiente sistema es compatible ($\text{rg}A = \text{rg}A^* = 3$)

3.3.4 Base

Un espacio vectorial contiene típicamente un número infinito de vectores, pero muchos problemas relativos a espacios vectoriales se pueden analizar trabajando con un número finito de vectores que generan el espacio vectorial. Los espacios vectoriales con un número finito de generadores se denominan espacios vectoriales de dimensión finita. Hemos deducido en el teorema anterior que el conjunto mínimo de vectores generadores de $\mathbb{R}^n$ será un conjunto linealmente independiente.

Definición 3.4 Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ es base de $\mathbb{R}^n$ si el conjunto es sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ y linealmente independiente.

Teorema 3.10 Dada una matriz A_n en $\mathbb{R}$ e inversible, las columnas de A son base de $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

A_n inversible $\Rightarrow \text{rg}A = n \Rightarrow$ sus columnas son linealmente independientes.

A_n inversible $\Rightarrow \text{rg}A=n \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ($\text{rg}A=\text{rg}A^*=n$), y por tanto las columnas de A son sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$. ■

Base canónica de $\mathbb{R}^n$

Un ejemplo de matriz así es la matriz I_n en $\mathbb{R}$, cuyas columnas se denotan como $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ se le denomina **base estándar o canónica de $\mathbb{R}^n$** .

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

Teorema 3.11 Toda base de $\mathbb{R}^n$ tiene exactamente n vectores.

Demostración: Sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ base de $\mathbb{R}^n$.

Por ser el conjunto linealmente independiente $r \leq n$.

Supongamos $r < n$, por ejemplo $r = n - 1$, y consideremos el SL de matriz de coeficientes $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_{n-1}]$. El SL $[A \mid \vec{b}]$ tendrá la misma solución que el mismo sistema

en la forma escalonada reducida $[U \mid \vec{b}']$. Como los $n - 1$ vectores son linealmente independientes, por ser base, la matriz U tendrá la forma:

$$[\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_{n-1}] \Rightarrow [U \mid \vec{b}'] = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_{n-1} \mid \vec{b}']$$

Tomando $\vec{b}' = \vec{e}_n$ tendremos que el vector de términos independientes no es combinación lineal del resto, y por tanto el sistema es incompatible. Ese $\vec{b}' = \vec{e}_n$ corresponderá a cierto $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, que no podrá ser generado por el conjunto $\{\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_r\}$. Llegaríamos a ejemplos de sistemas incompatibles siempre que $r < n$ y por tanto $r = n$. ■

Definición 3.5 La dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, denotada como $\dim \mathbb{R}^n$, es el número de vectores de cualquiera de sus bases.

De acuerdo con el teorema anterior su valor es n .

Reducción de un conjunto s.g. para formar una base

De un conjunto s.g. se puede formar una base eliminando los vectores correspondientes a las columnas no pivotaes, pues el subconjunto obtenido es l.i. y s.g. (Teorema 3.9).

Ampliación de un subconjunto l.i. para formar una base

Teorema 3.12 Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ l.i. y formado por p vectores, existen $n - p$ vectores tales que el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

Otras propiedades

Teorema 3.13 Para que un conjunto libre S sea base de $\mathbb{R}^n$, basta con que añadiéndole cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ el conjunto pase de libre a ligado.

Demostración: Si añadido un vector, el sistema pasa de libre a ligado, significa que ese vector es combinación lineal de los vectores de S . Luego como todo vector es c.l. de los vectores de S , S es sistema de generadores, y como además es libre será base. Es obvio que S es sistema de generadores de los vectores incluidos en el propio conjunto. ■

Teorema 3.14 o Teorema de la base. Cualquier subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente y con un número de vectores igual a n es automáticamente una base de $\mathbb{R}^n$. Asimismo, cualquier subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que sea sistema de generadores y con n vectores es automáticamente base de H .

3.3.5 Coordenadas de un vector relativas a una base

La razón principal de elegir una base de un espacio vectorial en lugar de un sistema de generadores es que cada elemento $\vec{v}$ puede escribirse de una sola manera como combinación lineal de los elementos de la base.

Teorema 3.15 Sea $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de los vectores de la base.

Demostración: Supongamos que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pueda ser expresado de dos maneras:

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n \quad \text{y} \quad \vec{x} = d_1 \vec{b}_1 + \dots + d_n \vec{b}_n$$

restando ambas ecuaciones:

$$\vec{0} = (c_1 - d_1) \vec{b}_1 + \dots + (c_n - d_n) \vec{b}_n$$

y como $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ son linealmente independientes, por ser base, los coeficientes en la ecuación anterior son todos nulos, es decir,

$$c_1 - d_1 = 0, \dots, c_n - d_n = 0, \text{ es decir,}$$

$c_j = d_j$ para $1 \leq j \leq n$, y por tanto las dos representaciones son iguales. ■

Otra forma de verlo: $[\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n \mid \vec{x}]$ es compatible determinado, compatible porque los $\vec{b}_i$ forman un subconjunto s.g. y determinado por ser un subconjunto l.i.

Definición 3.6 Sea $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, las **coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base B** son los coeficientes o pesos $c_1, c_2, \dots, c_n$, tales que $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n$,

Al vector $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ se le denomina **vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a B** , y se denota como $[\vec{x}]_B$

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

En la notación $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, sin referirnos a una base dada, x_i son las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$\vec{x}$ como vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene n coordenadas.

3.3.6 Matriz de cambio de base/coordenadas en un espacio vectorial

En esta sección veremos como un cambio de base en un espacio vectorial se puede escribir como una operación producto matriz-vector, con $P \times \text{vector1} = \text{vector2}$, siendo vector1 y vector2 las coordenadas en cada base, y P la matriz de cambio de base. Deduiremos la expresión general tomando como ejemplo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ y dos bases $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ y $B' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$

Podemos escribir:

$$\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3 \quad \vec{x} = x'_1\vec{b}'_1 + x'_2\vec{b}'_2 + x'_3\vec{b}'_3$$

Igualando las expresiones anteriores:

$$x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3 = x'_1\vec{b}'_1 + x'_2\vec{b}'_2 + x'_3\vec{b}'_3 \quad [1]$$

Expresando los vectores de la primera base respecto de la segunda:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= a_{11}\vec{b}'_1 + a_{21}\vec{b}'_2 + a_{31}\vec{b}'_3 \\ \vec{b}_2 &= a_{12}\vec{b}'_1 + a_{22}\vec{b}'_2 + a_{32}\vec{b}'_3 \\ \vec{b}_3 &= a_{13}\vec{b}'_1 + a_{23}\vec{b}'_2 + a_{33}\vec{b}'_3 \end{aligned}$$

Sustituyendo los $\vec{b}_i$ en la ecuación [1]

$$\begin{aligned} x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3 &= x_1a_{11}\vec{b}'_1 + x_1a_{21}\vec{b}'_2 + x_1a_{31}\vec{b}'_3 + \\ &+ x_2a_{12}\vec{b}'_1 + x_2a_{22}\vec{b}'_2 + x_2a_{32}\vec{b}'_3 + x_3a_{13}\vec{b}'_1 + x_3a_{23}\vec{b}'_2 + x_3a_{33}\vec{b}'_3 = \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13})\vec{b}'_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23})\vec{b}'_2 + \\ &+ (x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33})\vec{b}'_3 = x'_1\vec{b}'_1 + x'_2\vec{b}'_2 + x'_3\vec{b}'_3 \end{aligned}$$

$$x'_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13}$$

$$x'_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} \quad [2]$$

$$x'_3 = x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33}$$

$$[\vec{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} [\vec{x}]_B$$

$$[\vec{x}]_{B'} = P [\vec{x}]_B \quad [3] \quad , \quad \text{con } P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$P = [[\vec{b}_1]_{B'} \ [\vec{b}_2]_{B'} \ [\vec{b}_3]_{B'}]$$

P es la matriz cuadrada 3×3 tal que la columna j corresponde a las coordenadas de $\vec{b}_j$ respecto de la base B' .

Llamamos a P **matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base B'** . La multiplicación por la izda. por P transforma el vector de coordenadas $[\vec{x}]_B$ en $[\vec{x}]_{B'}$.

P es inversible (el SL [2] es comp. det. ya que las coorden. respecto a cada base son únicas). Multiplicando [3] por P^{-1} por la izquierda, obtenemos:

$$P^{-1} [\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$$

P^{-1} es la matriz que transforma las coordenadas relativas a la base B' en las coordenadas relativas a la base B . Las columnas de P son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B .

Ejemplo 3.12 Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$, la base estándar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. Obtén las matrices de cambio de base entre la base B y la estándar.

$$\vec{x} = P_B [\vec{x}]_B, \text{ con } P_B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3]$$

La matriz P_B corresponde a la transformación de la base B a la base canónica.

$$P_B^{-1} \vec{x} = [\vec{x}]_B$$

P_B^{-1} tiene como columnas las coordenadas de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$ respecto de la base B .

Ejemplo 3.13 . Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, con $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentra las coordenadas de $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ respecto de la base B . Obtén las matrices de cambio de base de B a la estándar y de la estándar a B .

$$\text{Las coordenadas } c_1 \text{ y } c_2 \text{ verifican:} \quad c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{x} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & [\vec{x}]_B & \vec{x} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{La solución del sistema es} \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } \vec{x} = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ son las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^2$ o coordenadas estándar de $\vec{x}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ es la matriz tal que } P_B [\vec{x}]_B = \vec{x}$$

$$Q = P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad Q\vec{x} = [\vec{x}]_B, \text{ se puede comprobar que } Q \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$(1/3, -1/3)$ son las coord. de $\vec{e}_1$ respecto de $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ y $(1/3, 2/3)$ las coord. de $\vec{e}_2$ respecto de $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

3.4 Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$

3.4.1 Definición

Definición 3.7 *Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es cualquier subconjunto H de $\mathbb{R}^n$ que cumple las siguientes propiedades:*

- 1) $\vec{0} \in H$
- 2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in H, \vec{u} + \vec{v} \in H$
- 3) $\forall \vec{u} \in H$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \vec{u} \in H$

La definición establece que un subespacio contiene el elemento neutro de la suma, y que tanto la suma como el producto por un escalar son cerradas.

Nótese cómo $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de sí mismo, pues verifica las tres propiedades. Otro subespacio de $\mathbb{R}^n$ es el formado únicamente por el vector nulo, es decir $H = \{\vec{0}\}$. A este subespacio se le denomina **subespacio cero**.

Teorema 3.16 *Todo subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^n$ es a su vez espacio vectorial.*

Demostración:

- Las propiedades de existencia de elemento neutro de la suma, suma cerrada y producto por escalar cerrado (3,1 y 6) se deducen de la definición de subespacio.
- Los vectores de H cumplen las propiedades conmutativa, asociativas, distributivas y elemento neutro de la multiplicación (2,4,7,8,9,10), ya que todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ las cumplen ($\mathbb{R}^n$ es esp. vec.) y los vectores de H son vectores de $\mathbb{R}^n$.
- H tiene elemento opuesto (5). En efecto si $\vec{u} \in H, -1\vec{u} \in H$, ya que el producto por escalar es cerrado, y $-1\vec{u} = -\vec{u}$

■

3.4.2 Subespacio generado

Definición 3.8 *Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ un conjunto de vectores del esp. vect. $\mathbb{R}^n$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ se denomina **subconjunto de $\mathbb{R}^n$ generado** por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$, y se denota $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$.*

Es decir, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$ es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir de la forma

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_p\vec{v}_p, \quad \text{con } c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.17 *Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$, entonces $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración:

- $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_p$
- $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_p\vec{v}_p$
 $\vec{v} = \mu_1\vec{v}_1 + \mu_2\vec{v}_2 + \dots + \mu_p\vec{v}_p$
 $\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\vec{v}_2 + \dots + (\lambda_p + \mu_p)\vec{v}_p$
- $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_p\vec{v}_p$
 $c\vec{u} = (c\lambda_1)\vec{v}_1 + (c\lambda_2)\vec{v}_2 + \dots + (c\lambda_p)\vec{v}_p$

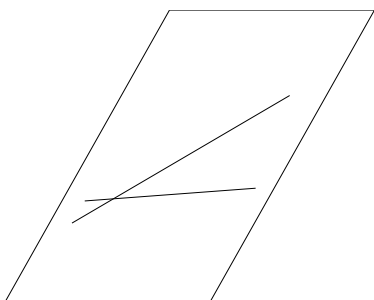
■

A partir de ahora al “subconjunto generado” lo denominaremos “subespacio generado”. Así $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$ será el **subespacio generado** por los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$.

Descripción geométrica de $\langle \vec{v} \rangle$ y $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ en el esp. vect. $\mathbb{R}^3$

Sea $\vec{v}$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\langle \vec{v} \rangle$ es el conjunto de todos los múltiplos de $\vec{v}$ (se entiende multiplicación por escalares reales). Visualizamos $\langle \vec{v} \rangle$ como el conjunto de los puntos de la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa a través de $\vec{v}$ y de $\vec{0}$.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, y $\vec{v}$ no es múltiplo de $\vec{u}$, entonces $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ es el plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{0}$. En particular $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ contiene la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\vec{0}$ y $\vec{u}$ y la recta a través de $\vec{0}$ y $\vec{v}$.



Un plano pasando por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Una recta pasando por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

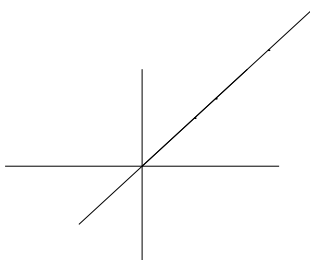
Un plano o una recta que no pasen por el origen no son subespacios de $\mathbb{R}^3$ (no contienen el vector $(0,0,0)$).

3.4.3 Ejemplos de subespacios. Ecuaciones paramétricas e implícitas

Ejemplo 3.14 Determina si $U = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

U es subespacio vectorial puesto que $(0,0) \in U$, la suma es cerrada $(x, 2x) + (y, 2y) = (x+y, 2(x+y)) \in U$ y el producto por escalar es cerrado $\lambda(x, 2x) = (\lambda x, 2\lambda x) \in U$.

Geométricamente U es la recta en el plano XY que pasa por $(0,0)$ y tiene pendiente 2. La suma y la multiplicación por escalar son cerrados, en efecto la suma de dos vectores de la recta da como resultado un vector de la recta, y la multiplicación de un vector de la recta por un escalar da un vector en la misma recta.



Los vectores del conjunto U verifican la ecuación lineal

$$y = 2x \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad 2x - y = 0$$

Por tanto los vectores $\vec{x} = (x, y) \in U$, solución de la ecuación anterior, tienen la forma vectorial paramétrica:

$$\vec{x} = \alpha(1, 2) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ o lo que es lo mismo:}$$

La ecuación anterior puede expresarse mediante “las ecuaciones paramétricas” (una ecuación para cada componente) así:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ya que la ecuación lineal carece de término constante, la ecuación vectorial paramétrica tampoco tiene término constante y por tanto el conjunto de vectores es un subespacio generado.

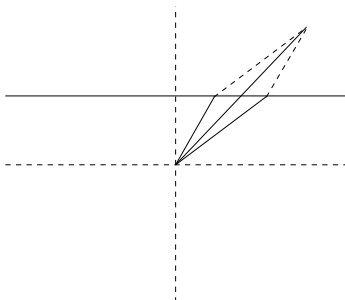
$$U = \langle (1, 2) \rangle$$

El sistema de ecuaciones lineales que verifican los elementos (x, y) de U se llama “conjunto de ecuaciones implícitas” o “forma implícita” del subespacio.

Ejemplo 3.15 Determina si $U = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

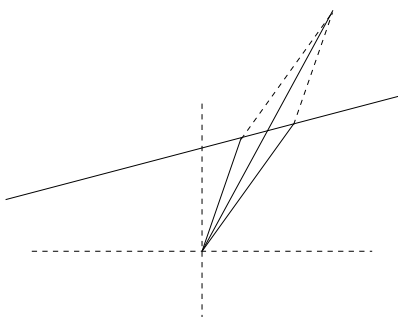
U está formado por los vectores de $\mathbb{R}^2$ con segunda componente constante e igual a 1. Geométricamente U es la recta de pendiente 0 que pasa por $(0, 1)$.

U no es subespacio pues no contiene el $(0, 0)$. Tampoco verifica que la suma y el producto por un real sea cerrada. Por ejemplo $(1, 1) + (2, 1) = (3, 2) \notin U$, $3(1, 1) = (3, 3) \notin U$. El incumplimiento de una de las condiciones es suficiente para afirmar que el conjunto no es subespacio vectorial.



Ejemplo 3.16 Determina si $U = \{(x, x+3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

U no es subespacio porque no contiene el $(0, 0)$.



Ejemplo 3.17 Determina si $U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

U está formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ en el plano XY (con la componente $z = 0$).

$$(0, 0, 0) \in U$$

$$(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0) \in U$$

$$\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0) \in U$$

U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

Forma implícita: $z = 0$

Forma vectorial paramétrica: $(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{o } \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Como subespacio generado: $U = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$

Ejemplo 3.18 En $\mathbb{R}^4$ di cuales de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

$$A = \{ (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) / x_i \in \mathbb{R} \}$$

$$B = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 \cdot x_2 = 0 \text{ y } x_i \in \mathbb{R} \}$$

Conjunto A (vectores de $\mathbb{R}^4$ en los que la 3ª componente es suma de la 2ª y 4ª)

$(0, 0, 0, 0) \in A$. Se demuestra sin más que tomar $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

$\vec{x} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) \in A$ con tal de que $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

$\vec{y} = (3y_1, y_2, y_2 + y_4, y_4) \in A$ con tal de que $y_1, y_2, y_4 \in \mathbb{R}$

$\vec{x} + \vec{y} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) + (3y_1, y_2, y_2 + y_4, y_4) = (3x_1 + 3y_1, x_2 + y_2, x_2 + x_4 + y_2 + y_4, x_4 + y_4) = (3(x_1 + y_1), x_2 + y_2, (x_2 + y_2) + (x_4 + y_4), x_4 + y_4) \in A$ pues $x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_4 + y_4 \in \mathbb{R}$ y la 3ª componente es suma de la 2ª y 4ª

$\vec{x} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) \in A$ con tal de que $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \vec{x} = \lambda(3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) = (\lambda 3x_1, \lambda x_2, \lambda(x_2 + x_4), \lambda x_4) = (3(\lambda x_1), \lambda x_2, \lambda x_2 + \lambda x_4, \lambda x_4) \in A$ pues $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_4 \in \mathbb{R}$ y la 3ª componente es suma de la 2ª y 4ª

Conjunto B (vectores de $\mathbb{R}^4$ en los que el producto de la 1ª y 2ª componente es nulo)

$(0, 0, 0, 0) \in B$. Se demuestra sin más que tomar $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. En efecto se cumple $x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 0 = 0$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in B$ con tal de que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \cdot x_2 = 0$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in B$ con tal de que $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ y $y_1 \cdot y_2 = 0$

Consideremos la suma $\vec{x} + \vec{y}$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$

$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4 \in \mathbb{R}$. Veremos si se cumple $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = 0$

$(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2$

Esta suma no tiene por que ser igual a 0. Lo vemos en el siguiente “contraejemplo”:

$$(1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 0) \in B, \quad (0, 1, 0, 0) \in B \quad \text{pero } (1, 1, 0, 0) \notin B$$

Como encontramos dos vectores de B cuya suma no pertenece a B podemos concluir que B no es subespacio.

Ejemplo 3.19 Obtener las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ $S = \langle (1, -2, -5), (2, 5, 6) \rangle$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad / \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{es la ecuación vectorial paramétrica}$$

Vemos que tiene la misma forma que la de la resolución de SLs homogéneos.

$$\vec{x} \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle \Leftrightarrow [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad | \quad \vec{x}] \text{ es compatible.}$$

Denotando $\vec{x} = (x, y, z)$, el sistema a resolver es el siguiente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -2 & 5 & y \\ -5 & 6 & z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 9 & 2x + y \\ 0 & 16 & 5x + z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 9 & 2x + y \\ 0 & 0 & (5x + z) - \frac{16}{9}(2x + y) \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 9 & 2x + y \\ 0 & 0 & \frac{13x - 16y + 9z}{9} \end{array} \right]$$

$$\text{El SL es compatible} \Leftrightarrow 13x - 16y + 9z = 0$$

$$\text{Por tanto } \langle (1, -2, -5), (2, 5, 6) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 13x - 16y + 9z = 0\}$$

La ecuación implícita del subespacio vectorial $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$ es $13x - 16y + 9z = 0$

Obsérvese como la ecuación implícita es una E.L. homogénea.

Ejemplo 3.20 Obtener las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ $S = \langle (1, -2, -5) \rangle$

$$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad / \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\langle (1, -2, -5) \rangle$ es la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y $(1, -2, -5)$.

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = -5\alpha \end{cases} \quad / \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Eliminando el parámetro α en las ec. anteriores obtenemos las ec. implícitas:

$$\begin{cases} y = -2x \\ z = -5x \end{cases}$$

También podríamos haber obtenido las ecuaciones implícitas por el método directo, resolviendo el SL:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & x \\ -2 & & & y \\ -5 & & & z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & x \\ 0 & & & 2x + y \\ 0 & & & 5x + z \end{array} \right] \quad \text{El SL es compatible} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2x = 0 \\ z + 5x = 0 \end{cases}$$

Por tanto $\langle (1, -2, -5) \rangle = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} y + 2x = 0 \\ z + 5x = 0 \end{cases} \}$

La ecuaciones implícitas o forma implícita del subespacio vectorial $\langle \vec{a}_1 \rangle$ son/es:

$$\begin{cases} y = -2x \\ z = -5x \end{cases}$$

Ejemplo 3.21 Obtener las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ $S = \langle (1, -2, -5), (2, 5, 6), (1, 0, 1) \rangle$

$$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad / \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$\vec{x} \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle \Leftrightarrow [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \mid \vec{x}]$ es compatible. Denotando $\vec{x} = (x, y, z)$, el sistema a resolver es el siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ -2 & 5 & 0 & y \\ -5 & 6 & 1 & z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 9 & 2 & 2x + y \\ 0 & 16 & 6 & 5x + z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 9 & 2 & 2x + y \\ 0 & 0 & \frac{22}{9} & \frac{13x - 16y + 9z}{9} \end{array} \right]$$

El SL es compatible $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Por tanto $\langle (1, -2, -5), (2, 5, 6), (1, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Este subespacio coincide con $\mathbb{R}^3$. Tenemos tres parámetros libres (las tres incógnitas, que son las tres componentes) y ninguna ecuación implícita, pues no hay ninguna restricción que imponer.

3.4.4 Sistema generador, base y dimensión de un subespacio

Las definiciones de sistema generador, base y dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se aplican de la siguiente forma a un subespacio H de $\mathbb{R}^n$:

- Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ del subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^n$ es un sistema de generadores de H , si $\forall \vec{v} \in H$, $\vec{v}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S .
- Un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ del subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^n$ es base de H si es l.i. y s.g. de H . La dimensión del subespacio vectorial H , que se denota como $\dim H$, es el número de vectores de cualquier base de H , y $\dim H \leq n$. $\dim H = n \Leftrightarrow H = \mathbb{R}^n$.
- Un subconjunto de H l.i. tendrá como máximo $\dim H$ vectores y un subconjunto de H s.g. de H tendrá como mínimo $\dim H$ vectores.
- La dimensión del subespacio $\{\vec{0}\}$ se define como cero. (El subespacio cero carece de base porque el vector nulo forma un conjunto linealmente dependiente).
- De un sistema generador de H se puede obtener un subconjunto l.i. que sigue siendo sistema generador de H (eliminando las columnas no pivotaes). Expresado de otra forma, a partir de un s.g. de H se puede obtener una base de H sin más que eliminar los vectores l.d.
- Dado un subespacio H de dimensión d y un subconjunto S de H l.i. y formado por p vectores, existen $d - p$ vectores tales que el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_d\}$ es base de H .
- Cualquier subconjunto de vectores de H linealmente independiente y con un número de vectores igual a $\dim H$ es automáticamente una base de H . Asimismo, cualquier subconjunto de vectores de H que sea sistema de generadores de H y con un número de vectores igual a $\dim H$ es automáticamente base de H .
- Todo subespacio H de $\mathbb{R}^n$ admite base.
- La transformación de coordenadas de la base B del subespacio vectorial H , a la base B' de H , viene dada por la ecuación: $[\vec{x}]_{B'} = P [\vec{x}]_B$, con $P = [[\vec{b}_1]_{B'} \ [\vec{b}_2]_{B'} \ \dots \ [\vec{b}_p]_{B'}]$, siendo $p = \dim H$. ATENCIÓN: $\vec{x}$ tiene n coordenadas canónicas como elemento de $\mathbb{R}^n$ y p coordenadas como elemento de H .
- La dimensión de H es igual al mínimo número de parámetros que requiere la expresión paramétrica de un vector genérico de H .
- El número de ecuaciones implícitas independientes del sub. vect. H es igual a $n - \dim H$.

Ejemplos:

Un plano que contenga el $\vec{0}$ en $\mathbb{R}^3$ es un subespacio de dimensión 2 (2-dimensional) de $\mathbb{R}^3$, y una recta conteniendo el $\vec{0}$ es un subespacio de dimensión 1 (1-dimensional) de $\mathbb{R}^3$.

$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = H$ es sub. vec. de $\mathbb{R}^3$ y se identifica geoméricamente con el plano XY del espacio tridimensional. El conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ es base de H , pero no es una base canónica, pues las bases canónicas sólo están definidas para los espacios $\mathbb{R}^n$, no para los subespacios de éstos con dimensión menor que n .

Ejemplo 3.22 Considera el subespacio $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ (es el plano XY).

a) Determina si los siguientes subconjuntos de H son sistemas generadores de H y en caso afirmativo expresa $(7, 6, 0) \in H$ como combinación lineal de los vectores de esos conjuntos. $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$, $S_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $S_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$.

b) ¿Es alguno de los conjuntos base de H ? Determina respecto al conjunto que sea base, las coordenadas de $(7, 6, 0)$.

a)

- $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$ no es s.g. de H . Sólo genera los vectores de H que cumplen la ecuación adicional $x = y$.

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 1 & y \\ 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-x \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

- $S_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ Sí es s.g. de H .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$(7, 6, 0) = 7(1, 0, 0) + 6(0, 1, 0)$$

Es la única forma posible de expresar $(7, 6, 0)$ como c.l. de los vectores de S_2 .

- $S_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ Sí es s.g. de H .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Por ejemplo $(7, 6, 0) = 7(1, 0, 0) + 6(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0)$ ó

$$(7, 6, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 6(1, 1, 0) \text{ ó}$$

$$(7, 6, 0) = 5(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 2(1, 1, 0), \text{ etc}$$

Existen infinitas formas de expresar $(7, 6, 0)$ como c.l. de los vectores de S_3 , ya que el sistema lineal es compatible indeterminado.

b) S_2 es base. Formas de verlo:

- Es s.g. y conjunto l.i. (un vector no es múltiplo de otro).
- La dimensión de H es 2, porque la del espacio principal $\mathbb{R}^3$ es 3 y H está definido por una ecuación implícita. Por tanto con tener dos vectores l.i. en H o dos vectores que generen H ya tenemos garantizado que esos dos vectores son base.

Planteando la c.l. $(7, 6, 0) = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0)$, los escalares c_1 y c_2 , únicos, son las coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base S_2 .

$$[(7, 6, 0)]_{S_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ son las coordenadas de } (7, 6, 0) \text{ relativas a la base } S_2.$$

OBSERVACIÓN: Dado $\vec{x} \in H$, como vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene 3 coordenadas, pero como elemento del subespacio vectorial H el número de coordenadas será igual a la dimensión de H . S_2 es un s.g. de H y es l.i., por tanto la dimensión de H es 2. El número de coordenadas de los vectores de H respecto de una base de H es de 2.

Ejemplo 3.23 Sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de $H = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

a) Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a B .

b) Obtén la/las ecuaciones implícitas del sub. vec. H y a partir de éstas una nueva base B' de H .

c) Si $\vec{x} \in H$, calcula sus coordenadas respecto de la nueva base B' .

Solución

- $\vec{x} \in H$ si la ecuación vectorial $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ es compatible. En caso afirmativo, los escalares c_1 y c_2 serían las coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base B .

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ es compatible, con } c_1 = 2 \text{ y } c_2 = 3,$$

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ son las coordenadas de } \vec{x} \text{ relativas a la base } B.$$

Si hubiéramos planteado la matriz ampliada $[\vec{v}_2 \ \vec{v}_1 \ | \ \vec{x}]$ la eliminación gaussiana sería más fácil pues la primera columna es $(-1, 0, 1)$, pero habrá que acordarse al despejar que en la primera columna tengo la incógnita c_2 y en la segunda la c_1 .

Al dar las coordenadas hay que dar los valores ordenados como en la base: si la base viene ordenada $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, las coordenadas estarán ordenadas c_1, c_2 .

Comentario sobre las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base B de H y respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \in H; \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \text{ con } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ base de } H$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \text{ con } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 12 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las componentes de $\vec{x}$ $(3, 12, 7)$ son sus coordenadas respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^3$, también denominadas coordenadas estándar.

- Planteamos que un vector genérico (x, y, z) esté generado por la base.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 0 & 6 & y \\ 1 & 2 & z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 0 & 6 & y \\ 0 & 5 & z+x \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 0 & 6 & y \\ 0 & 0 & |-\frac{5}{6}y + z + x \end{array} \right]$$

Ec. implícita: $-5y + 6z + 6x = 0$ o por ejemplo $z = \frac{5}{6}y - x$.

Ejemplo de base $B' = \{(1, 0, -1), (0, 6, 5)\}$

El conjunto es l.i. pues para tener la c.l. nula $(0, 0, 0)$ hace falta:

que el primer coeficiente sea cero para que la 1a componente sea cero
y que el segundo coeficiente sea cero para que la 2a componente sea cero

$$\bullet \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 12 \\ -1 & 5 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 10 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -5/6 \times 12 + 10 = 0 \end{array} \right] \sim$$

$c_1 = 3, c_2 = 2$
 $[\vec{x}]_{B'} = (3, 2)$

3.4.5 Intersección, suma y suma directa de dos subespacios

Definición 3.9 Sean H y F subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define intersección de H y F así :

$$H \cap F = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n / \vec{u} \in H \text{ y } \vec{u} \in F\}$$

Teorema 3.18 La intersección de dos subespacios H y F de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Nota: En el caso de que los subespacios H y F vengan dados por ecuaciones implícitas, la ecuación implícita (o ecuaciones implícitas) del subespacio intersección será la unión de todas ellas, una vez eliminadas aquellas que sean "combinación lineal" de otras.

Por otra parte, es obvio que $\dim(H \cap F) \leq \dim H$ y $\dim(H \cap F) \leq \dim F$.

Ejemplo 3.24 $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / z = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ Plano XY
 $F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / y = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$ Plano XZ
 $H \cap F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / y = 0, z = 0\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$ Eje X

Ejemplo 3.25 $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / y = 0, z = 0\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$ Eje X
 $T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x = 0, z = 0\} = \langle (0, 1, 0) \rangle$ Eje Y
 $G \cap T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x = 0, y = 0, z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$

Ejemplo 3.26 $F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / z = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ Plano XY
 $S \subset \mathbb{R}^3 = \langle (a, b, c) \rangle$ con a, b, c constantes, $c \neq 0$ Recta no incluida en el Plano XY
 $F \cap S \subset \mathbb{R}^3 = \{(0, 0, 0)\}$

Definición 3.10 Sean H y F subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define suma de H y F así :

$$H + F = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n / \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ con } \vec{u}_1 \in H \text{ y } \vec{u}_2 \in F\}$$

Teorema 3.19 La suma de dos subespacios H y F de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. En efecto $H + F = \langle H \cup F \rangle$

OJO: $H + F \neq H \cup F$

(se puede analizar por ejemplo tomando H : Plano XY y F : Plano YZ . La suma es $\mathbb{R}^3$ pero la unión de H y F no es $\mathbb{R}^3$).

Analicemos $H + F = \langle H \cup F \rangle$: El segundo miembro de la igualdad lo forman todas las combinaciones lineales que se pueden obtener tomando vectores de H y de F . Si tomamos las c.l. que podemos hacer con los vectores $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_p$ de H y los vectores $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_l$ de F , es obvio que cada una de ellas corresponde a la suma de un vector de H con un vector de F .

Nota: La unión de las bases de H y F es sistema generador del subespacio suma. Para obtener la base eliminaríamos los vectores linealmente dependientes.

Es obvio que $\dim(H + F) \geq \dim H$ y $\dim(H + F) \geq \dim F$.

Ejemplo 3.27 $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / z = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ Plano XY
 $F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / y = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$ Plano XZ
 $H + F = \{(x, y, 0) + (x', 0, z') = (x, y, z)\} = \mathbb{R}^3$

Es inmediato comprobar que la unión de las bases de F y H genera $\mathbb{R}^3$.

El $SL \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$ es en efecto compatible para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Observamos que en este caso el SL es compatible indeterminado, y por tanto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se podrá expresar de infinitas formas como suma de un vector de F y un vector de H . Por ejemplo

$$(1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) \text{ con } (1, 1, 0) \in F \text{ y } (0, 0, 1) \in H$$

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) + (1, 0, 1) \text{ con } (0, 1, 0) \in F \text{ y } (1, 0, 1) \in H$$

Descomposición $\vec{u} \in \mathbb{R}^3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $\vec{u}_1 \in H$ y $\vec{u}_2 \in F$ no es única.

En este caso la dimensión del espacio suma es menor que la suma de las dimensiones. La unión de la base de F y la base de H no es un conjunto l.i. $\boxed{\dim F \cap H = 1}$.

Ejemplo 3.28 $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / y = 0, z = 0\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$ Eje X
 $T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x = 0, z = 0\} = \langle (0, 1, 0) \rangle$ Eje Y
 $G + T = \{(x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x, y, 0)\} = \{(x, y, z) / z = 0\}$
 Plano XY

Es inmediato comprobar que $G + T =$ Plano XY de $\mathbb{R}^3$. En efecto el $SL \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es

compatible para todo vector $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$

Observamos además que en este caso el SL es compatible determinado, y por tanto $(x, y, 0)$ se expresa de **forma única** como suma de un vector de G y un vector de T $(x, 0, 0) + (0, y, 0)$. Nótese que la dimensión del espacio suma es igual a la suma de las dimensiones. La razón es que la unión de las bases de G y T es un conjunto l.i. $\boxed{\dim G \cap T = 0}$.

Ejemplo 3.29 $F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / z = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ Plano XY
 $S \subset \mathbb{R}^3 = \langle (a, b, c) \rangle$ con a, b, c constantes, $c \neq 0$ Recta no incluida en el Plano XY
 $F + S = \{(x, y, 0) + (a, b, \neq 0)\lambda\} = \{(x, y, z)\} = \mathbb{R}^3$

En efecto el $SL \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & x \\ 0 & 1 & b & y \\ 0 & 0 & c \neq 0 & z \end{bmatrix}$ es compatible para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

SL compatible $det.$, y por tanto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se expresa de forma única como suma de un vector de F y un vector de S . La dimensión del espacio suma es igual a la suma de las dimensiones. La unión de las bases de F y S es un conjunto l.i. $\boxed{\dim F \cap S = 0}$.

Los ejemplos anteriores sugieren la siguiente definición:

Definición 3.11 Se dice que la **suma** $H + F$ es **directa** si para cada $\vec{u} \in H + F$ existen $\vec{u}_1 \in H$, $\vec{u}_2 \in F$ únicos, tales que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Se denota $H \oplus F$.

Otra forma de expresarlo: Si $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2$, con $\vec{u}_1 \in H$, $\vec{u}'_1 \in H$, $\vec{u}_2 \in F$ y $\vec{u}'_2 \in F$, entonces $\vec{u}_1 = \vec{u}'_1$ y $\vec{u}_2 = \vec{u}'_2$.

Teorema 3.20 Sean H y F dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) La suma $H + F$ es directa
- 2) Si $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0}$, con $\vec{u}_1 \in H$ y $\vec{u}_2 \in F$, entonces $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{0}$
- 3) El conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ con $\vec{u}_1 \neq \vec{0} \in H$ y $\vec{u}_2 \neq \vec{0} \in F$ es linealmente independiente. Se dice también que los subespacios H y F son linealmente independientes.
- 4) $H \cap F = \{\vec{0}\}$

Demostración:

- $1 \Rightarrow 2$ obvia
- $2 \Rightarrow 1$ Consideremos $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2$, con $\vec{u}_1 \in H$, $\vec{u}'_1 \in H$, $\vec{u}_2 \in F$ y $\vec{u}'_2 \in F$. Entonces $(\vec{u}_1 - \vec{u}'_1) + (\vec{u}_2 - \vec{u}'_2) = \vec{0}$, perteneciendo el primer sumando a H y el segundo a F . Por la propiedad 2) $\vec{u}_1 - \vec{u}'_1 = \vec{0}$ y $\vec{u}_2 - \vec{u}'_2 = \vec{0}$, y por tanto $\vec{u}_1 = \vec{u}'_1$ y $\vec{u}_2 = \vec{u}'_2$, es decir, la suma es directa.
- $2 \Rightarrow 3$ Considero la combinación lineal $\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 = \vec{0}$ con el primer vector perteneciente a H , el segundo perteneciente a F , y ninguno de ellos nulos. Por 2) esto implica que $\alpha \vec{u}_1 = \vec{0}$ y $\beta \vec{u}_2 = \vec{0}$, y como los vectores no son nulos, entonces $\alpha = \beta = 0$, es decir, los vectores son linealmente independientes.
- $3 \Rightarrow 2$ Consideramos $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0}$ con el primer vector perteneciente a H y el segundo a F . Ya que los vectores son linealmente independientes la única c.l. nula se tiene cuando todos los escalares son nulos o cuando todos los vectores son nulos. Aquí los escalares son 1 y 1, por tanto $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ han de ser nulos.
- $2 \Rightarrow 4$ Sea $\vec{u} \in H$ y $\vec{u} \in F$. Si $\vec{u} \in F$, entonces $-\vec{u} \in F$ y $\vec{u} + -\vec{u} = \vec{0}$ es la suma de un vector de H y un vector de F . Por 2), al ser la suma nula cada uno de ellos es nulo, por tanto $\vec{u} = \vec{0}$
- $4 \Rightarrow 2$ Sean dos vectores $\vec{u}_1 \in H$ y $\vec{u}_2 \in F$ tales que $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0}$. Reordenando la ecuación obtenemos $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$, y por tanto $\vec{u}_1$ pertenece al espacio intersección. Como este subespacio es el subespacio nulo, $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{0}$. ■

Teorema 3.21 $\boxed{\dim(H \oplus F) = \dim H + \dim F}$ (Al unir una base de H y una base de F obtenemos una base de $H \oplus F$)

Demostración: Una base de los vectores de la forma $\vec{u} + \vec{0}$, es decir, tomando el vector nulo en F sería una base de H , B_H . Una base de los vectores de la forma $\vec{0} + \vec{u}$, es decir, tomando el vector nulo en H sería la base de F , B_F . Uniendo las dos bases generaríamos todos los vectores de $H + F$. Para que las dos bases unidas sean base del subespacio suma hay que extraer los vectores linealmente dependientes. Pero al ser la

suma de H y F directa, todo vector de B_F es l.i. de todos los vectores de H , por tanto no tenemos que eliminar ningún vector y $B = B_H \cup B_F$.

La dimensión del subespacio suma es igual al número de vectores en la base B_H más el número de vectores de la base B_F , por tanto $\dim(H \oplus F) = \dim H + \dim F$. ■

Teorema 3.22 $\boxed{\dim(H + F) + \dim(H \cap F) = \dim H + \dim F}$

Definición 3.12 Sea H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Diremos que G es un subespacio vectorial complementario de H si $\mathbb{R}^n = H \oplus G$

Teorema 3.23 Todo subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^n$ admite complementario.

Ejemplo 3.30 Determina los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ $A + B$ y $A \cap B$, siendo A y B los subespacios de $\mathbb{R}^2$ siguientes:

$$\begin{aligned} A &= \{ (x_1, 0) / x_1 \in \mathbb{R} \} && \text{es el eje } X \text{ de } \mathbb{R}^2 \\ B &= \{ (0, x_2) / x_2 \in \mathbb{R} \} && \text{es el eje } Y \text{ de } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$A + B = \{ (x_1, x_2) / x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

En efecto $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$ con $(x_1, 0) \in A$ y $(0, x_2) \in B$

Por tanto $A + B = \mathbb{R}^2$

Ejemplo de vector de $A + B = (7, 6) = (7, 0) + (0, 6)$

Ejemplo de vectores de A : $(7, 0), (-4, 0), (1/3, 0)$

Ejemplo de vectores de B : $(0, 4), (0, -200.2), (0, -4/7)$

$$A \cap B = \{(0, 0)\}$$

3.4.6 Suma directa de p subespacios

Se dice que la suma de los subespacios $V_1, V_2, \dots, V_p$ de $\mathbb{R}^n$ es directa y se escribe $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$ si cualquier vector de dicha suma puede expresarse de una única forma como suma de vectores de $V_1, V_2, \dots, V_p$, esto es, si:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_p &= \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2 + \dots + \vec{u}'_p \quad \text{con } \vec{u}_i, \vec{u}'_i \in V_i, \quad i = 1, \dots, p \\ \Rightarrow \vec{u}_i &= \vec{u}'_i \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- La suma es directa
- $\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_p = \vec{0}$, con $\vec{u}_i \in V_i \Rightarrow \vec{u}_i = \vec{0}$ para $i = 1, \dots, p$
- Cualquier conjunto $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ con $\vec{u}_i \in V_i$ $\vec{u}_i \neq \vec{0}$ (un vector de cada subespacio y no nulo) es linealmente independiente

Las demostraciones son análogas a las presentadas para la suma directa de dos subespacios.

Observación: Cuando el número de subespacios de la suma es mayor que dos, suma directa implica intersección nula, pero no al revés. Por ejemplo las tres rectas generadas por $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 2, 0)$ en $\mathbb{R}^3$ tienen intersección nula y su suma no es directa, ya que los tres vectores no son linealmente independientes (generan $(x, y, 0)$).

- $\dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_p = \dim (V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p)$

3.5 Ejercicios

Dependencia lineal, sistema generador, base y cambio de base en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 3.1 Dados tres vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, m)$, $\vec{v}_2 = (3, -1, n, -1)$, $\vec{v}_3 = (-3, 5, m, -4)$. Hallar m y n de forma que los tres vectores sean linealmente dependientes.

Ejercicio 3.2 Dados tres vectores linealmente independientes $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ demostrar que el sistema de tres vectores $\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ es también linealmente independiente.

Ejercicio 3.3 Dados $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linealmente independientes, comprobar si el conjunto $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_3 - \vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$ es o no linealmente independiente.

Ejercicio 3.4 Sean $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ n vectores linealmente independientes. Probar que los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ definidos como

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^i \vec{u}_k$$

para $i = \{1, 2, \dots, n\}$ son también linealmente independientes.

Ejercicio 3.5 Demuestra que A tiene rango 2 analizando las relaciones de dependencia lineal entre sus columnas

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.6 Considerando el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se pide:

- Averiguar si los 4 vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (2, 1, 1, -2)$ y $\vec{v}_4 = (1, -1, -1, -1)$ son linealmente independientes,
- Si no lo fueran, encontrar una relación de dependencia entre ellos.

Ejercicio 3.7 Sean los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$: $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 0, 1)$. Comprobar que forman una base de $\mathbb{R}^4$ y expresar en ella el vector $(2, 5, -1, 1)$.

Ejercicio 3.8 Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Hallar:

- una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga el vector $(1, 2, 1, 1)$
- una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 2)$ y $(1, -1, 2, 0)$

Ejercicio 3.9 Probar que los vectores $(2, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(-2, 1, 3)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $(1, 1, 2)$ en esta base.

Ejercicio 3.10 Extender el sistema $(1, 1, -1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 2, 1, 1)$ para formar una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3.11 Sean las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 2)\}$ y $B' = \{(-1, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 1, 2)\}$. Sabiendo que un vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $(1, 6, 2)$ respecto a la base B , determina sus coordenadas respecto a la base B' . Obtén P tal que $P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}$

Ejercicio 3.12 Encuentra el vector $\vec{x}$ correspondiente a las coordenadas dadas y la base dada:

$$a) B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.13 Encuentra el vector de coordenadas $[\vec{x}]_B$ de $\vec{x}$ respecto a la base dada. Obtén P tal que $P\vec{x} = [\vec{x}]_B$

$$\begin{aligned} a) \quad B &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ b) \quad B &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.14 En el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ se pide:

a) Demostrar que los vectores $\vec{v}_1 = (1, 2i, -i)$, $\vec{v}_2 = (2, 1 + i, 1)$ y $\vec{v}_3 = (-1, 1, -i)$ constituyen una base.

b) Hallar las coordenadas del vector $\vec{w} = (1, 2, 0)$ respecto de dicha base.

Subespacios de $\mathbb{R}^n$: base, forma implícita, cambio de base, intersección y suma

Ejercicio 3.15 Determina el lugar geométrico de los subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 0, 1, 2 y 3.

Ejercicio 3.16 En $\mathbb{R}^4$ di cuales de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

$$\begin{aligned} C &= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + 4x_4 = 0, /x_i \in \mathbb{R} \} \\ D &= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_4 = 7, /x_i \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.17 En $\mathbb{R}^4$ sea el siguiente conjunto:

$$A = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 - x_4, /x_i \in \mathbb{R} \}$$

Comprobar que es un subespacio vectorial. Hallar una base y su dimensión.

Ejercicio 3.18 Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^6$, con $\vec{v}_1 = (1, 2, -1, 2, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (2, 4, -1, 0, 1, -2)$, $\vec{v}_3 = (4, 8, -1, -4, 3, -4)$, $\vec{v}_4 = (1, 0, 0, -1, 0, 0)$ y $\vec{v}_5 = (1, -6, 1, -2, -2, 3)$.

a) Extrae un subconjunto l.i. de S con el máximo número posible de vectores.

b) Expresa los vectores eliminados como c.l. de los vectores del subconjunto l.i. del apartado anterior.

c) Obtén una base de $\langle S \rangle$ y la dimensión de $\langle S \rangle$.

Ejercicio 3.19 Encuentra una base del subespacio generado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$.

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} \\ b) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.20 Considera las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$ de un subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^3$. Calcula las coordenadas del vector $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ respecto de la base B' . Determina P tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$

Ejercicio 3.21 Obtén la ecuación o ecuaciones que relacione/n las componentes x, y, z de los vectores de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, con $\vec{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\vec{v}_2 = (4, 1, 6)$. Otra forma de expresarlo: obtener la ec. o ecs implícitas de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

Ejercicio 3.22 Obtén una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$: $\Pi = \{(x, y, z) / 2x - y + 3z = 0\}$

Ejercicio 3.23 El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Determina una base del mismo.

Ejercicio 3.24 Busca un sistema generador del subespacio F de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación paramétrica es: $x = \lambda + 2\mu + 3\theta$, $y = \lambda - \mu$, $z = -\lambda - \theta$. Di si los vectores $(5, -1, -1)$ y $(0, 0, -1)$ pertenecen o no a F .

Ejercicio 3.25 Busca la ecuación implícita del subespacio F de $\mathbb{R}^4$ cuya ecuación paramétrica es: $x = \lambda + \beta + \theta$, $y = \lambda - \beta$, $z = \beta + \theta$ y $t = \lambda + \beta + \theta$. (λ, β, θ parámetros).

Ejercicio 3.26 Obtén la forma implícita de $H = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) \rangle$

Ejercicio 3.27 Obtén la ec. paramétrica de F subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ sabiendo que sus ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.28 Hallar el vector o conjunto de vectores comunes a los conjuntos generados por los vectores $\{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$ y por $\{(1, 0, 1), (3, 4, 3)\}$.

Ejercicio 3.29 Obtén las ecuaciones implícitas de $V_1 = \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$, de $V_2 = \langle (1, 0, 1), (3, 4, 3) \rangle$ y de $V_1 \cap V_2$. (Observa que $V_1 \cap V_2$ es el mismo subespacio vectorial que el que había que determinar en el Ejercicio 3.28).

Ejercicio 3.30 Sean los vectores $(4, -5, 7)$, $(3, -3, 4)$, $(1, 1, -2)$ y $(2, -1, 1)$. Hallar un sistema mínimo de generadores del subespacio generado por ellos. Estúdiese si dicho subespacio es el mismo que el generado por los vectores $(1, -2, 3)$, $(3, 0, -1)$.

Ejercicio 3.31 Dado $\mathbb{R}^4$ consideramos el conjunto $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2z + t = 0\}$.

- Probar que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$
- Hallar una base y la dimensión de F
- Hallar la dimensión y una base de un subespacio complementario de F , denotándolo F'
- Descomponer $\vec{v} = (2, 1, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$ como suma de un vector de F y un vector de F' .

Ejercicio 3.32 Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (3, 8, 40)$ como suma de un vector $\vec{z}_1$ del plano Π : $3x - 7y - z = 0$ y un vector $\vec{z}_2$ de la recta r : $\{(2, 4, 7)\lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}$. En caso de que sea posible calcula $\vec{z}_1$ y $\vec{z}_2$.

Ejercicio 3.33 Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$: $U = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) / x = y = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) / x = z\}$. Demostrar que: a) $\mathbb{R}^3 = U + V$, b) $\mathbb{R}^3 = U + W$, c) $\mathbb{R}^3 = V + W$ y decir cuándo es directa la suma.

Ejercicio 3.34 Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y su base estándar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Sea L_1 el subespacio vectorial generado por $\vec{a}_1 = \vec{e}_1$ y $\vec{a}_2 = \vec{e}_2$. a) Determina si L_2 es un subespacio complementario de L_1 , siendo L_2 el subespacio generado por $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. b) Descompón $\vec{z} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ de modo que $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$ con $\vec{z}_1 \in L_1$ y $\vec{z}_2 \in L_2$.

Ejercicio 3.35 Sean U y V las rectas siguientes:

$$U = \langle (1, 0, -1) \rangle, \quad V = \langle (1, 2, 3) \rangle$$

- a) Calcula $U + V$ y describe que lugar geométrico representa
- b) Argumenta si la suma anterior es o no suma directa

Ejercicio 3.36 Sean U , V y W las rectas siguientes:

$$U = \langle (1, 0, -1) \rangle, \quad V = \langle (1, 2, 3) \rangle, \quad W = \langle (-1, 4, a) \rangle$$

- a) Calcula $U + V + W$ y describe el lugar geométrico representa, en función del parámetro a
- b) Argumenta si la suma anterior es o no suma directa, en función del parámetro a .

Ejercicio 3.37 Obtén una base del subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^4$.

$$H = \{ (\alpha, \beta, 2\beta + \gamma + \delta, \gamma + \delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$$

3.6 Soluciones

3.1 El conjunto es l.d. si el rango es menor que 3. Para determinar el rango vamos a realizar la eliminación gaussiana de la matriz cuyas columnas son los tres vectores dados.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & n & m \\ m & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & n & m \\ 0 & -3m-1 & 3m-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & n & m \\ 0 & -3m-1 & 3m-4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2n+m \\ 0 & 0 & -2(3m+1)+3m-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2n+m \\ 0 & 0 & -3m-6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rango } 2 \Leftrightarrow 2n+m=0 \text{ y } -3m-6=0$$

$$\text{Rango } 2 \Leftrightarrow m=-2 \text{ y } n=1$$

3.2. Consideremos el conjunto $\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$. Los tres vectores que lo forman son linealm. indep. si y sólo si la única combinación lineal de ellos igual a $\vec{0}$ es aquella en la que todos los coeficientes son 0.

Consideremos una combinación lineal con pesos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que sea igual al vector nulo.

$$\lambda_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \lambda_2(\vec{u}_1 + \vec{u}_3) + \lambda_3(\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u}_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{u}_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

Por ser $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un conjunto l.i., los escalares serán nulos, es decir:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$, y el conjunto $\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ es l.i.

3.3

Consideremos el conjunto $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_3 - \vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$. Los tres vectores que lo forman son linealm. indep. si y sólo si toda combinación lineal de ellos igual a $\vec{0}$ implica que los coeficientes han de ser todos 0.

Consideremos una combinación lineal con pesos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que sea igual al vector nulo.

$$\lambda_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \lambda_2(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) + \lambda_3(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_1 + (-\lambda_1 + \lambda_3)\vec{v}_2 + (\lambda_2 - \lambda_3)\vec{v}_3 = \vec{0}$$

Por ser $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ un conjunto l.i., los escalares serán nulos, es decir:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se encuentra que éste es compatible indeterminado, con un parámetro. Todos los vectores de la forma $(\lambda, \lambda, \lambda)$ son solución.

$$\text{Comprobación: } \lambda(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \lambda(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) + \lambda(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) = \lambda\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3 - \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 - \lambda\vec{v}_3 = \vec{0}$$

3.5

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{bmatrix}$$

Denotando a las columnas como vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ el rango de A será igual al número de estos vectores que forman un conjunto l.i.

Observamos como $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Luego el conjunto l.i. que incluya $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, debe excluir $\vec{v}_3$. $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ forman un conjunto l.i. pues uno no es múltiplo de otro.

El nuevo conjunto de vectores (columnas) es:

$$\begin{bmatrix} 17 & -28 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & -55 & -68 \end{bmatrix}$$

Observamos como $\vec{v}_4 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Luego el conjunto l.i. que incluya $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, debe excluir $\vec{v}_4$. Eliminamos entonces $\vec{v}_4$, y el nuevo conjunto es:

$$\begin{bmatrix} 17 & -28 & 39 \\ 24 & -37 & 50 \\ 25 & -7 & -11 \\ 31 & 12 & -55 \\ 42 & 13 & -68 \end{bmatrix}$$

Observamos como $\vec{v}_5 = -\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$. Luego el conjunto l.i. que incluya $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, debe excluir $\vec{v}_5$. Eliminamos entonces $\vec{v}_5$, y el nuevo conjunto es:

$$\begin{bmatrix} 17 & -28 \\ 24 & -37 \\ 25 & -7 \\ 31 & 12 \\ 42 & 13 \end{bmatrix}$$

Donde todos los vectores son ya l.i. Como tenemos 2, $\text{rg}A=2$.

3.6

Para determinar si los vectores son l.i. basta con calcular el rango de la matriz cuyas columnas son esos vectores. El conjunto es l.i. si y sólo si $\text{rg} = \text{número de vectores}$. No obstante, vamos a considerar el SL homogéneo $[\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_4 \mid \vec{0}]$, ya que en caso de que el SL sea l.d. se nos pide calcular una relación de dependencia lineal. Añadir la columna de ceros no nos supone además ningún trabajo, pues las operaciones elementales por filas para calcular el rango no le afectan (la columna siempre quedará como una columna nula).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A la vista de la matriz escalonada se deduce que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son l.i. (corresponden a columnas pivotaes en la forma escalonada), y que los vectores $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ son combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ (no corresponden a columnas pivotaes en la forma escalonada).

Resolviendo el sistema encontraremos las relaciones de dependencia lineal:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3 + \lambda_4 \quad \lambda_1 = -2\lambda_3 - \lambda_4$$

Los posibles coeficientes que dan combinación lineal nula tienen la forma:

$$(-2\lambda_3 - \lambda_4, -\lambda_3 + \lambda_4, \lambda_3, \lambda_4) \quad / \quad \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$$

Haciendo $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_4 = 0$ tendríamos la solución trivial. Una relación de dependencia lineal no puede tener todos los coeficientes nulos; tomaremos por ejemplo $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_4 = 1$, para despejar $\vec{v}_4$ en función de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Se obtienen los coeficientes $(-1, 1, 0, 1)$ y la relación de dependencia lineal

$$-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_4 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2}$$

para despejar $\vec{v}_3$ en función de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ consideramos la relación de dependencia lineal con $\lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 0 \Rightarrow$ coeficientes $(-2, -1, 1, 0) \Rightarrow -2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2}$

3.7. Para demostrar que el conjunto es base demostraremos que el siguiente SL es compatible determinado. (x, y, z, t) es el vector genérico de $\mathbb{R}^4$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 & 1 & t \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 & * \end{array} \right]$$

$\text{rg}A = \text{rg}A^* = 4 = \text{número de incógnitas}$ por tanto el sistema es C.D., y el conjunto de vectores $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ es base.

Otra forma de comprobar que el SL es compatible determinado es demostrando que el determinante de la matriz A es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por adjuntos de la 3 fila, tendremos:

$$|A| = -(1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) = 2$$

Para encontrar las coordenadas del vector $(2, 5, -1, 1)$ en esta base, debemos resolver el sistema de matriz ampliada:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right] \quad \text{Las coordenadas son}$$

$$(5/2, -1, -1/2, 5/2)$$

$$\text{Comprobación: } 5/2(1, 1, 0, 0) - (0, 0, 1, 1) - 1/2(1, 0, 0, 1) + 5/2(0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

3.8

i) Podemos demostrar que el conjunto formado por las cuatro columnas de la matriz de coeficientes del siguiente SL es base, ya que el SL es compatible determinado. (x, y, z, t) es el vector genérico de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}$$

El conjunto formado por $\{\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_4\}$ es l.i. y s.g. de $\mathbb{R}^4$ por tanto es base de $\mathbb{R}^4$

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 1)\}$$

ii) $\begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \end{array}$

$\text{rg} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_4] = 4$, por tanto los cuatro vectores forman base de $\mathbb{R}^4$

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, -1, 2, 0), (1, 1, 0, 2)\}$$

3.9 Resultado: Es base. Las coordenadas son $(17/18, -1/9, 7/18)$

$$\mathbf{3.10} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 2 & a+c \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & a+c \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{array} \right]$$

Las columnas de la matriz son base de $\mathbb{R}^4$ si y sólo si $d - a \neq 0$.

Podríamos ampliar el sistema por ejemplo con el vector $(0, 0, 0, 1)$.

3.11

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{v}$$

Y a continuación resolvemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ obteniendo } [x]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hemos considerado dos bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ y a partir de las coordenadas de un vector, relativas a B , hemos obtenido las coordenadas del mismo vector, respecto a B' .

El problema pide determinar la matriz P tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$

P es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto a la base B' . Para obtener las 3 columnas habría que resolver los 3 sistemas lineales correspondientes, cuyas matrices ampliadas son:

$$P = [\vec{b}_1]_{B'} \ [\vec{b}_2]_{B'} \ [\vec{b}_3]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este ejercicio podemos obtener la matriz de cambio de base mediante un método más sencillo. En efecto, ya que estamos considerando un espacio vectorial en el que una posible base es la base canónica, podemos considerar la transformación de coordenadas de B a B' como la composición de dos transformaciones: de B a la canónica y de la canónica a B' . Hemos visto que las matrices de transformación entre una base y la canónica son muy sencillas de obtener.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= P_B[\vec{x}]_B \quad \text{con } P_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \vec{x} &= P_{B'}[\vec{x}]_{B'} \quad \text{con } P_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

De donde: $P_B[\vec{x}]_B = P'_{B'}[\vec{x}]_{B'}$ y $P_{B'}^{-1}P_B[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$

Por tanto la matriz de paso es $P = P_{B'}^{-1}P_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se puede comprobar que $P \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

3.12

- a) $5(3, -5) + 3(-4, 6) = (15, -25) + (-12, 18) = (3, -7)$
b) $3(1, -4, 3) + (-1)(4, -7, 0) = (3, -12, 9) + (-4, 7, 0) = (-1, -5, 9)$

3.13

a) $c_1(1, -3) + c_2(2, -5) = (-2, 1) \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 = -2 \\ -3c_1 - 5c_2 = 1 \end{cases}$

La matriz ampliada es: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

$c_2 = -5, \quad c_1 = -2 - 2(-5) = 8$

Comprobación: $8(1, -3) - 5(2, -5) = (8, -24) + (-10, 25) = (-2, 1)$

Vamos a determinar la matriz de cambio de base de $\vec{x}$ a $[\vec{x}]_B$.

$P_B[\vec{x}]_B = \vec{x} \quad \text{con } P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

$P_B^{-1}\vec{x} = [\vec{x}]_B$

La matriz de paso es $P = P_B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Se puede comprobar que $P \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$

b) Se resuelve como el anterior. La diferencia es que hay que resolver un SL con $m = n = 3$ e invertir una matriz de orden 3. $[\vec{x}]_B = (5, -1, 0)$.

La matriz es $P = P_B^{-1}$, siendo P_B la matriz que tiene por columnas los vectores de la base B .

$$P_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix} \quad P = P_B^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -15 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 21/2 & 9 & -1/2 \end{bmatrix}$$

3.16Conjunto C

$(0, 0, 0, 0) \in C$. En efecto, tomando $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $2x_1 + 4x_4 = 0$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in C$ con tal de que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ y $2x_1 + 4x_4 = 0$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in C$ con tal de que $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ y $2y_1 + 4y_4 = 0$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$

$2(x_1 + y_1) + 4(x_4 + y_4) = 2x_1 + 4x_4 + 2y_1 + 4y_4 = 0 + 0 = 0$, por tanto $\vec{x} + \vec{y} \in C$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$

$2 \cdot \lambda x_1 + 4\lambda x_4 = \lambda(2x_1 + 4x_4) = \lambda 0 = 0$, por tanto $\lambda \vec{x} \in C$

Conjunto D

$(0, 0, 0, 0) \notin D$, puesto que en este caso $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ y $x_4 = 0$, y por tanto $x_1 + 2x_4 = 0 + 0 \neq 7$

Por tanto el conjunto D no es subespacio vectorial

3.17

$(0, 0, 0, 0) \in A$. Para ello $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, y en este caso se cumple $x_1 + x_2 = x_3 - x_4$ pues $0 + 0 = 0 - 0$.

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$ con tal de que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ y $x_1 + x_2 = x_3 - x_4$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in A$ con tal de que $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ e $y_1 + y_2 = y_3 - y_4$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$

$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_3 - x_4 + (y_3 - y_4) = x_3 + y_3 - (x_4 + y_4)$ por tanto $\vec{x} + \vec{y} \in A$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda(x_3 - x_4) = \lambda x_3 - \lambda x_4$, por tanto $\lambda \vec{x} \in A$

La ecuación que define los vectores de A se puede escribir como

$$x_4 = -x_1 - x_2 + x_3$$

Por tanto un vector genérico de A tendrá la siguiente forma:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix} / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto formado por los vectores $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$ y $(0, 0, 1, 1)$ es sist. gen. de A .

Comprobemos si el conjunto es l.i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de A es 3, por tanto el conjunto es l.i. y base. $\dim A = 3$.

3.18

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \\
& A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Es sencillo llegar hasta la forma escalonada reducida (pivotes unidad y ceros por encima de los mismos), y el sistema equivalente quedará mucho más sencillo.

$$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subconjunto l.i., $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$. Es base de S , por tanto: $S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4 \rangle$.

$$S = \langle (1, 2, -1, 2, 0, -1), (2, 4, -1, 0, 1, -2), (1, 0, 0, -1, 0, 0) \rangle$$

Al resolver el SL vemos que es indeterminado, y que por tanto hay infinitas relaciones de dependencia lineal (cada relación corresponde a una solución).

$$\text{Solución general: } \begin{cases} c_1 = 2c_3 + c_5 \\ c_2 = -3c_3 + 2c_5 \\ c_3 = c_3 \\ c_4 = -4c_5 \\ c_5 = c_5 \end{cases}$$

La solución con $c_3 = 1$ y $c_5 = 0$ es $(2, -3, 1, 0, 0)$ y permite despejar $\vec{v}_3$ como c.l. del subconjunto l.i.:

$$2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2}$$

La solución con $c_3 = 0$ y $c_5 = 1$ es $(1, 2, 0, -4, 1)$ y permite despejar $\vec{v}_5$ como c.l. del subconjunto l.i.:

$$\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 4\vec{v}_4 + \vec{v}_5 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_5 = -\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 4\vec{v}_4}$$

3.19 a. Al buscar una base de un espacio generado ya sabemos que el conjunto de vectores es s.g. Para que sea l.i. sólo hay que eliminar los vectores l.d.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas pivotaes son la primera, segunda y cuarta, por tanto el tercer y el quinto vector son l.d. (no añaden dimensión, no generan nada que no pueda ser generado sin ellos). Una base del espacio generado es la formada por los vectores que coinciden con las columnas pivotaes, es decir: $B = \{(1, 0, -3, 2), (0, 1, 2, -3), (1, -3, -8, 7)\}$

Si hubiéramos escogido otro orden para los vectores, las posiciones de las columnas pivotaes podrían variar, y obtendríamos otra base distinta (pero siempre de 3 vectores).

3.20

A partir de $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ obtengamos $\vec{x}$:
$$\vec{x} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A continuación escribimos $\vec{x}$ en la base B' , solucionando el sistema de matriz ampliada:

$$A^* = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 6 \\ 8 & 10 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/7 & -2/7 \\ -3 & 8 & 6 \\ 8 & 10 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/7 & -2/7 \\ 0 & 47/7 & 36/7 \\ 0 & 47/7 & 36/7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 0 & 47 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Despejando:

$$y = 36/47$$

$$7x = 3 \times 36/47 - 2 ; x = (14/47)/7 = 2/47$$

Comprobación: $2/47(-7, -3, 8) + 36/47(3, 8, 10) = (2, 6, 8) \quad [\vec{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2/47 \\ 36/47 \end{bmatrix}$

Nos piden determinar la matriz de transformación $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$

$$P = [[\vec{b}_1]_{B'} \quad [\vec{b}_2]_{B'}]$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{b}_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 0 & 47 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_2 = 4/47 \quad c_1 = -5/47 \quad [\vec{b}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -5/47 \\ 4/47 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{b}_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -7 & 3 & 0 \\ 0 & 47 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_2 = 7/47 \quad c_1 = 3/47 \quad [\vec{b}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 3/47 \\ 7/47 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -5/47 & 3/47 \\ 4/47 & 7/47 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $\begin{bmatrix} -5/47 & 3/47 \\ 4/47 & 7/47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/47 \\ 36/47 \end{bmatrix}$

3.22

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2x + 3z \\ z = z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$ es linealmente independiente (un vector no es múltiplo del otro) y sistema generador de todo $(x, y, z) \in \Pi$, por tanto es base de Π

3.25

$$\begin{cases} x = \lambda + \beta + \theta \\ y = \lambda - \beta \\ z = \beta + \theta \\ t = \lambda + \beta + \theta \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ es sistema generador de F , pues todo elemento de F debe ser combinación lineal de esos vectores, con coeficientes λ, β y θ .

A continuación buscamos la ecuación implícita del subespacio, es decir las ecuaciones (no paramétricas) que han de verificar las componentes x, y, z, t para que (x, y, z, t) pertenezca a F .

Un vector (x, y, z, t) pertenece a F si el SL con la siguiente matriz ampliada es compatible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}$$

Realizando la eliminación gaussiana obtenemos:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -1 & y - x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & t - x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 2z + y - x \\ 0 & 0 & 0 & t - x \end{bmatrix}$$

El SL es compatible si y sólo si $t - x = 0$. Por tanto la ecuación implícita de F es $x = t$.

Podríamos simplificar la forma paramétrica de F así :

$$F = \{(x, y, z, x) \in \mathbb{R}^4 / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Hemos confirmado que en efecto tenemos tres parámetros libres.

A la vista de la última matriz ampliada se deduce que $\{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ forman base de F , pues tienen rango 3, y por tanto además de ser sistema generador son linealmente independientes.

3.28

$$(x, y, z) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 2, 1)$$

$$(x, y, z) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(3, 4, 3)$$

(x, y, z) es un vector común si se puede escribir en las dos formas anteriores, es decir, si dados los coeficientes α y β , existen coeficientes λ y μ tales que

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 2, 1) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(3, 4, 3)$$

Esta ec. vectorial, con tres componentes, se puede escribir como un sistema lineal de 3 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = \lambda + 3\mu \\ 2\alpha + 2\beta = 4\mu \\ 3\alpha + \beta = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Al sistema lineal le corresponde la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Última ecuación $\Rightarrow \lambda = \mu$

Segunda ecuación $\Rightarrow -2\beta + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow -2\beta = -2\lambda \Rightarrow \beta = \lambda = \mu$

Tercera ecuación $\Rightarrow \alpha + 3\beta - \lambda - 3\mu = 0 \Rightarrow \alpha = -3\mu + \mu + 3\mu = \mu$

El sistema es compatible indeterminado, con un parámetro libre y solución general $\alpha = \beta = \lambda = \mu$. Denotando el parámetro como α , los vectores comunes tienen la forma: $(x, y, z) = \alpha(1, 2, 3) + \alpha(3, 2, 1) = \alpha(4, 4, 4) \quad / \alpha \in \mathbb{R}$

Un vector común será cualquiera de la forma (α, α, α) .

3.29

$V_1 = \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$ es un plano, Π_1 , pues los vectores son l.i.

$V_2 = \langle (1, 0, 1), (3, 4, 3) \rangle$ es un plano, Π_2 , pues los vectores son l.i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & x \\ 2 & 2 & | & y \\ 3 & 1 & | & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & x \\ 0 & -4 & | & y - 2x \\ 0 & -8 & | & z - 3x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & x \\ 0 & 4 & | & -y + 2x \\ 0 & 0 & | & -2y + 4x + z - 3x \end{bmatrix}$$

Ecuación implícita de $\Pi_1 : x - 2y + z = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & x \\ 0 & 4 & | & y \\ 1 & 3 & | & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & x \\ 0 & 4 & | & y \\ 0 & 0 & | & z - x \end{bmatrix}$$

Ecuación implícita de $\Pi_2 : z = x$

Lugar común, $V_1 \cap V_2 = \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow x - 2y + x = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$ y $x = z$

Ecuaciones implícitas de $\Pi_1 \cap \Pi_2 : x = y = z$

La ecuación paramétrica de $\Pi_1 \cap \Pi_2$ sería por ejemplo:

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{\alpha(1, 1, 1)\} / \alpha \in \mathbb{R}$$

3.30

Para seleccionar un subconjunto de vectores linealmente independientes construyo una matriz cuyas columnas sean todos los vectores, y determino cuales corresponden a columnas pivotaes en la eliminación gaussiana.

Para simplificar los cálculos ordeno los vectores de forma que los que tengan más “unos” estén situados en las primeras columnas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un sistema mínimo de generadores puede ser: $\{(1, 1, -2), (2, -1, 1)\}$

A continuación se pregunta si el espacio vectorial $\langle (1, 1, -2), (2, -1, 1) \rangle$, que denotaremos como V_1 coincide con $\langle (1, -2, 3), (3, 0, -1) \rangle$, que denotaremos como V_2

Partimos de un vector $\vec{v} \in V_2$, que por tanto tendrá la forma:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} t + 3u \\ -2t \\ 3t - u \end{bmatrix} \quad / t, u \in \mathbb{R}$$

Este vector $\vec{v}$ pertenecerá a V_1 si existen $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = \begin{bmatrix} r + 2s \\ r - s \\ -2r + s \end{bmatrix}$. Es decir,

$$\vec{v} \in V_1 \text{ si el SL } \begin{cases} r + 2s = t + 3u \\ r - s = -2t \\ -2r + s = 3t - u \end{cases} \text{ es compatible}$$

$$\begin{array}{cccc|c} r & s & t & u & \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

El sistema es compatible para todo par de parámetros (t, u) por tanto todo vector de V_2 está incluido también en V_1 , y podemos escribir $V_2 \subset V_1$. En particular, la solución de (r, s) para (t, u) dados es:

$$\begin{aligned} s &= t + u \\ r &= -2s + t + 3u = -2t - 2u + t + 3u = -t + u \end{aligned}$$

De la misma forma se podría razonar que $V_1 \subset V_2$ (tomando r y s como parámetros libres). De los resultados $V_2 \subset V_1$ y $V_1 \subset V_2$ se deduce que $V_1 = V_2$

Otra forma de resolver el problema es demostrar que $(1, -2, 3) \in V_1$ y que $(3, 0, -1) \in V_1$. Por ser los dos vectores de V_1 , ser linealmente independientes, y ser dos en total (igual a la dimensión de V_1), también forman base de V_1 . Por tanto los dos vectores generan el mismo subespacio vectorial que los cuatro vectores iniciales.

3.31

a) F es subespacio, por ser un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido por un S.L. homogéneo, es decir, por una forma implícita.

$$b) \begin{cases} x = y - 2z - t \\ y = y \\ z = z \\ t = t \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{(1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ es sistema generador de F . Además se puede ver fácilmente en la ecuación anterior que el conjunto es l.i. pues la única solución del SL homogéneo $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \mid \vec{0}]$ es la trivial. En efecto para obtener el vector $(0, 0, 0, 0)$, deducimos que los tres coeficientes y, z y t tienen que ser nulos.

Por tanto el conjunto es base de F y la dimensión de F es 3.

c) Subespacio suplementario o complementario de F es un subespacio que sumado a F me dé el espacio $\mathbb{R}^4$, y de forma que esa suma sea directa, es decir que la intersección entre ambos subespacios sea el vector $\vec{0}$. El subespacio suplementario F' tendrá dimensión 1 ($4 - 3 = 1$) y por tanto estará generado por un sólo vector. Ese vector no puede pertenecer a F . En la ecuación vectorial anterior vemos que un vector de la forma $(a, 0, 0, 0)$ con $a \neq 0$ no pertenece a F . Por tanto puedo tomar por ejemplo $F' = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$.

La unión de este vector con los 3 vectores base de F forman base de $\mathbb{R}^4$

$$d) \text{ Resolvemos el SL } \begin{array}{cccc|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \\ \hline 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{obteniendo } \delta = 0, \gamma = 3, \beta = 1, \alpha = 7$$

$$\vec{v} = 7 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in F'} + 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in F}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \vec{v}_1 = (7, 0, 0, 0) \in F' \quad , \quad \vec{v}_2 = (-5, 1, 3, 0) \in F'$$

3.32

Π : $3x - 7y - z = 0$. Deducimos la base a partir de la ecuación implícita $z = 3x - 7y$,
 $\begin{cases} \vec{a}_1 = (1, 0, 3) \\ \vec{a}_2 = (0, 1, -7) \end{cases}$

recta $r : \{(2, 4, 7)\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Base de r , $\vec{b} = (2, 4, 7)$

Π y r hacen suma directa, puesto que la unión de sus bases es un conjunto linealmente independiente. La unión de sus bases $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}\}$ es un conjunto de tres vectores, por tanto es base de $\mathbb{R}^3$.

Tenemos entonces que todo vector de $\mathbb{R}^3$ se podrá escribir como: $\boxed{\vec{v} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{b}}$

$$\text{donde } \boxed{\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 = \vec{z}_1 \in \Pi} \quad \text{y} \quad \boxed{\gamma \vec{b} = \vec{z}_2 \in r}$$

En particular se podrá expresar así el vector $\vec{v} = (3, 8, 40)$. Los vectores $\vec{z}_1$ y $\vec{z}_2$ son únicos puesto que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

$$\text{Resolvemos el SL } \begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \gamma & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 7 & 40 \end{array}, \text{ obteniendo } \alpha = -3, \beta = -4 \text{ y } \gamma = 3, \text{ por tanto}$$

$$\vec{z}_1 = -3(1, 0, 3) - 4(0, 1, -7) = (-3, -4, 19) \quad \text{y} \quad \vec{z}_2 = 3(2, 4, 7) = (6, 12, 21)$$

3.33

$$U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \text{ es un plano } B_U = \{ \vec{b}_1 \vec{b}_2 \}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \text{ es una recta } B_V = \{ \vec{b}_3 \}$$

$$W = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \text{ es un plano } B_W = \{ \vec{b}_4 \vec{b}_5 \}$$

$U + V$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3 < \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 >$

$< \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 > = \mathbb{R}^3$ porque se puede demostrar que los tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son l.i., y por tanto generan todo $\mathbb{R}^3$.

Es suma directa porque la dimensión de la suma es igual a la suma de las dimensiones.

$U + W$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3 < \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4, \vec{b}_5 >$

Sabemos que la suma no es directa porque $\dim U = 2$, $\dim W = 2$ y $\dim(U + W) \leq 3$ ya que en el conjunto $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4, \vec{b}_5\}$ puede haber como mucho 3 vectores l.i. Si probamos que $\text{rg} = 3$, ya hemos demostrado que $U + W = \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y queda demostrado que el rango es 3.

$V + W$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3 < \vec{b}_3, \vec{b}_4, \vec{b}_5 >$

El determinante de $[\vec{b}_3 \vec{b}_4 \vec{b}_5]$ es distinto de cero, por tanto los tres vectores son l.i. y $V + W = \mathbb{R}^3$. Además la suma es directa, pues $\dim V + W = \dim V + \dim W$

3.34

$$L_1 = < \vec{e}_1, \vec{e}_2 >$$

$$L_2 = < \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 >$$

a) L_2 es complementario de L_1 si $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^3$, o lo que es lo mismo si $L_1 + L_2$ tiene dimensión 3. Si la suma tiene dimensión 3 ya está demostrado que la suma es directa pues $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$.

En la siguiente matriz colocamos por columnas: 1) el primer vector generador de L_1 , 2) el segundo vector generador de L_1 , 3) el vector generador de L_2 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los tres vectores forman un conjunto l.i., $\text{rg} = 3$, por tanto L_2 es complementario de L_1 .

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 3$$

$$\vec{z} = -1\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 = (0, -1, 0) + (3, 3, 3) = (3, 2, 3)$$

$$\vec{z}_1 = (0, -1, 0) \in L_1 \text{ y } \vec{z}_2 = (3, 3, 3) \in L_2$$

CAPÍTULO 4

Aplicaciones lineales

4.1 Introducción

Definición 4.1 Una **aplicación** f del espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ en el espacio vectorial W sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ es una regla que asigna a cada elemento $u \in V$ un elemento $w = f(u)$ de W . Al espacio vectorial V se le denomina dominio de f , y al espacio vectorial W codominio de f . También se utilizan los nombres simples de espacio vectorial inicial para el dominio y espacio vectorial final para el codominio.

Se utiliza la notación $f : V \mapsto W$

$$v \mapsto w = f(v)$$

Definición 4.2 $\text{Im}f = \{w \in W \mid w = f(u), \text{ con } u \in V\}$.

$\text{Im}f$ es el conjunto formado por todos los vectores del espacio final que tienen antecedente.

4.2 Aplicaciones lineales. Definición, propiedades y ejemplos

Definición 4.3 Una aplicación $f : V \mapsto W$ es **lineal** si y sólo si:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Para las aplicaciones lineales se utilizan al menos otros dos nombres: transformaciones lineales y homomorfismos. Cuando el espacio inicial y el espacio final coinciden las aplicaciones lineales también se designan como endomorfismos.

Propiedades de las aplicaciones lineales

1) $f(0_V) = 0_W$

Dem. $f(0_V) = f(0u) = 0f(u) = 0_W$

2) $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

Dem. $f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

Principio de superposición, sin más que aplicar 2) repetidas veces:

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + \dots + c_p f(v_p)$$

EN LO QUE SIGUE TRATAREMOS EXCLUSIVAMENTE APLICACIONES LINEALES DE $\mathbb{R}^N$ EN $\mathbb{R}^M$, SOBRE EL CUERPO $\mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{y} = f(\vec{x})$$

Ejemplo 4.1 Contracción

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $f(\vec{x}) = r\vec{x}$ con $0 \leq r < 1$

Ej. $f(\vec{x}) = 0.2 \vec{x}$. Asigna a un vector otro de igual dirección y sentido pero de norma menor por un factor 0.2

Ejemplo 4.2 Dilatación

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $f(\vec{x}) = r\vec{x}$ con $r > 1$

Ej. $f(\vec{x}) = 30 \vec{x}$. Asigna a un vector otro de igual dirección y sentido pero de norma mayor por un factor 30

4.3 Aplicación lineal sobreyectiva, inyectiva, biyectiva

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva si cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ es imagen de al menos un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es decir, si para cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ existe al menos una solución de la ecuación $f(\vec{x}) = \vec{y}$
- f no es sobreyectiva cuando existe algún $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ tal que la ecuación $f(\vec{x}) = \vec{y}$ no tiene solución.

A una aplicación lineal sobreyectiva también se le puede denominar aplicación lineal sobre, suprayectiva o exhaustiva.

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es inyectiva si cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ es imagen de como mucho un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es decir, si para cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ la ecuación $f(\vec{x}) = \vec{y}$ o bien no tiene solución o tiene solución única.
- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ no es inyectiva cuando algún $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ es imagen de más de un vector de $\mathbb{R}^n$.
- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. Cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ tiene un único antecedente $\vec{x}$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{y}$.

4.4 Matriz estándar asociada a una aplicación lineal

Una matriz real $A_{m \times n}$ define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que vendrá dada por:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = A \vec{x}$$

En el Capítulo 2 sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales habíamos tratado la ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ para determinar, dados $A_{m \times n}$ y $\vec{y}_{m \times 1}$, la solución $\vec{x}_n$. La ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ también se puede entender desde otro punto de vista, pensando en A como un objeto que actúa sobre $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, multiplicándose a él por la izquierda, para producir un nuevo vector $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. La ecuación $A\vec{x} = \vec{y}$ significa que A actuando sobre $\vec{x}$ produce $\vec{y}$. Podemos pensar en A actuando sobre otros vectores de $\mathbb{R}^n$ y en este sentido entenderíamos A como una aplicación lineal, que a cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder un $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$.

Recíprocamente, veremos en el siguiente teorema que para toda aplicación lineal f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ existe una matriz única A tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, siendo $\vec{x}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Dicho de otra manera, toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se puede escribir como un producto matriz-vector, es decir,

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$\vec{y}_{m \times 1} = A_{m \times n} \vec{x}_{n \times 1} \quad \text{siendo } A_{m \times n} \text{ una matriz real y única}$$

$A_{m \times n}$ se denomina **matriz estándar de la aplicación lineal** f . Hace corresponder al vector de coordenadas $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^n$, el vector de coordenadas $f(\vec{x}) = \vec{y}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 4.3 Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ definida como $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. Determina $f(1, 1, 1, 1)$, $f(1, 4, -1, 3)$, $f(0, 0, 0, 0)$ y $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(1, 1, 1, 1) = (5, 8) \quad f(1, 4, -1, 3) = (0, 0) \quad f(0, 0, 0, 0) = (0, 0)$$

Obtenemos ahora la imagen de un vector genérico $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

Denotando $f(\vec{x}) = \vec{y}$, tenemos que las componentes de $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ son:

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ y_2 = 2x_1 + 5x_3 + x_4 \end{cases}$$

Las ecuaciones de este SL se denominan **Ecuaciones de la Aplicación Lineal**. (No son más que el conjunto de las ecuaciones del SL $A\vec{x} = \vec{y}$)

Las ecuaciones (tantas como la dimensión del codominio) permiten obtener las coordenadas canónicas de la imagen a partir de las coordenadas canónicas del antecedente.

La aplicación puede venir dada por la matriz asociada A , por las ecuaciones de la aplicación lineal, o mediante la siguiente expresión:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4, 2x_1 + 5x_3 + x_4)$$

Comentario: Vemos que esta aplicación proporciona la misma imagen $(0, 0)$ para dos vectores de $\mathbb{R}^4$ distintos, por tanto f no es inyectiva. Vamos a determinar de una forma sistemática si la aplicación es inyectiva o no y si es sobreyectiva o no.

Si el sistema $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 & | & y_1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & | & y_2 \end{bmatrix}$ es compatible para todo vector (y_1, y_2) la aplicación es sobreyectiva, porque todos los vectores del espacio final son imagen de algún vector del espacio inicial

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 & | & y_1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & | & y_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 & | & y_1 \\ 0 & 3/2 & -9/2 & -1/2 & | & y_2 - y_1/2 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}A = \text{rg}A^* = 2$ por tanto compatible, y por tanto sobreyectiva

La aplicación es inyectiva si los vectores del espacio final tienen como máximo un antecedente (por tanto uno o ninguno), es decir, si el sistema $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 & | & y_1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & | & y_2 \end{bmatrix}$ es incompatible o compatible determinado.

El sistema anterior es compatible indeterminado $\forall (y_1, y_2)$ por tanto la aplicación no es inyectiva.

Teorema 4.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Entonces existe una única matriz A tal que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$. En efecto A es la matriz $m \times n$ cuya columna j es el vector $f(\vec{e}_j)$, donde $\vec{e}_j$ es la columna j de la matriz identidad de orden n .

$$A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)]$$

Demostración:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \quad \vec{y} = y_1\vec{e}'_1 + y_2\vec{e}'_2 + \dots + y_m\vec{e}'_m$$

Hemos utilizado la notación con 'prima' para la base canónica de $\mathbb{R}^m$ para distinguirla de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, ya que el número de entradas de los vectores $\vec{e}_1$ de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{e}'_1$ de $\mathbb{R}^m$ es diferente.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + \dots + x_nf(\vec{e}_n) = \\ &= x_1(a_{11}\vec{e}'_1 + a_{21}\vec{e}'_2 + \dots + a_{m1}\vec{e}'_m) + x_2(a_{12}\vec{e}'_1 + a_{22}\vec{e}'_2 + \dots + a_{m2}\vec{e}'_m) + \dots \\ &+ x_n(a_{1n}\vec{e}'_1 + a_{2n}\vec{e}'_2 + \dots + a_{mn}\vec{e}'_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\vec{e}'_1 + \\ &(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\vec{e}'_2 + \dots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)\vec{e}'_m = \\ &y_1\vec{e}'_1 + y_2\vec{e}'_2 + \dots + y_m\vec{e}'_m \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$[f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\vec{x} = \vec{y} \quad \blacksquare$$

$A_{m \times n}$ se denomina **matriz estándar de la aplicación lineal** f , pues hace corresponder a las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^n$, las coordenadas de $f(\vec{x}) = \vec{y}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^m$. Las ecuaciones de la aplicación lineal son el conjunto de las m ecuaciones incluidas en la ecuación matricial $\vec{y} = A\vec{x}$. Fijándonos en que $A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)]$ nos damos cuenta de que en una aplicación lineal, si conocemos la imagen de una base conocemos la imagen de cualquier vector.

Ejemplo 4.4 Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (5, -7, 2)$ y $f(\vec{e}_2) = (-3, 8, 0)$. Encuentra $f(\vec{x})$ para un vector arbitrario $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, las ecuaciones de la aplicación lineal y la matriz A tal que $\vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Analiza si f es inyectiva y si es sobreyectiva.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) = x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Por tanto } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ (queda comprobado que } A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2)])$$

$$\text{Las ecuaciones de la aplicación lineal son: } \begin{cases} y_1 = 5x_1 - 3x_2 \\ y_2 = -7x_1 + 8x_2 \\ y_3 = 2x_1 \end{cases}$$

$$\text{La imagen de } \vec{x} \text{ también la puedo expresar así: } f(x_1, x_2) = (5x_1 - 3x_2, -7x_1 + 8x_2, 2x_1)$$

Dado un vector $\vec{x}$ de coordenadas (x_1, x_2) , su imagen es la combinación lineal de los vectores $(5, -7, 2)$, $(-3, 8, 0)$ con coeficientes x_1, x_2 . Ya que los vectores imagen son las combinaciones lineales de dos vectores, los vectores imagen se encontrarán en un plano de $\mathbb{R}^3$, no en todo $\mathbb{R}^3$, por tanto la a.l. no es sobreyectiva. Nótese $\text{rg}A=2$.

Ya que $\text{rg}A$ es 2 y en las ecuaciones de la a.l. tenemos dos incógnitas, la aplicación será inyectiva: cada vector del conjunto imagen tiene un único antecedente.

Podríamos calcular la ecuación implícita del plano formado por los vectores imagen.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & y_1 \\ -7 & 8 & y_2 \\ 2 & 0 & y_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & y_1 \\ 0 & 19/5 & 7/5 y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & -16/19 y_1 - 6/19 y_2 + y_3 \end{array} \right]$$

Ecuación implícita $-16 y_1 - 6 y_2 + 19 y_3 = 0$

Ejemplo 4.5 Encuentra la matriz estándar A correspondiente a la aplicación dilatación dada por $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$, para $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3\vec{x} = f(\vec{x})$$

Ejemplo 4.6 Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$

con $f(\vec{x}) = A\vec{x}$

a) Encuentra la imagen de $\vec{u} = (2, -1)$ bajo la aplicación lineal f .

b) Encuentra un $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea $\vec{b} = (3, 2, -5)$.

c) ¿Hay más de un $\vec{x}$ cuya imagen por f sea $\vec{b}$?

d) Determina si $\vec{c} = (3, 2, 5)$ tiene antecedente.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{Hay que resolver el sistema de matriz ampliada} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array} \right]$$

Un sistema equivalente en la forma escalonada es: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. El SL es compatible determinado, con solución $x_2 = -1/2$ y $x_1 = 3/2$. $\vec{x} = (3/2, -1/2)$

c) Sólo hay un $\vec{x}$ cuya imagen sea $\vec{b}$, y es $\vec{x} = (3/2, -1/2)$

d) Hay que resolver el sistema de matriz ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array} \right]$. Un sistema equi-

valente en la forma escalonada es: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right]$. El SL es incompatible, por tanto

$\vec{c} \notin \text{Im}f$

Comentario: La aplicación lineal no es sobreyectiva, ya que existen elementos de $\mathbb{R}^3$ como por ejemplo $\vec{c}$ que no tienen antecedente.

4.5 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Definición 4.4 Se denomina **núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, y se denota $\text{Ker} f$, al conjunto $\text{Ker} f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Definición 4.5 Se denomina **espacio nulo de una matriz** $A_{m \times n}$ en $\mathbb{R}$, y se denota $\text{Ker} A$, al conjunto $\text{Ker} A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

Ker f = Ker A , siendo A la matriz estándar asociada a f

Teorema 4.2 $\text{Ker} f$ con $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Equivalentemente, $\text{Ker} A$, con $A \in (M_{m \times n}, \mathbb{R})$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

- 1) $\vec{0} \in \text{Ker} f$ pues $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- 2) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \text{Ker} f$
 $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker} f$
- 3) Sean $\vec{u} \in \text{Ker} f$ y $\lambda \in \mathbb{R}$
 $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{u} \in \text{Ker} f$

También podríamos haber realizado la demostración considerando la matriz A en vez de la aplicación lineal f .

- 1) $\vec{0} \in \text{Ker} A$ pues $A\vec{0} = \vec{0}$
- 2) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \text{Ker} A$
 $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker} A$
- 3) Sean $\vec{u} \in \text{Ker} A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$
 $A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u}) = \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{u} \in \text{Ker} A$ ■

Definición 4.6 Se denomina **imagen de f** , con $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, y se denota $\text{Im} f$, al conjunto $\text{Im} f = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

Definición 4.7 Se denomina **espacio de columnas de una matriz** $A \in (M_{m \times n}, \mathbb{R})$ al espacio vectorial generado por las columnas de A , es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A . Se denota como $\text{Col} A$.

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n] \quad \text{Col} A = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$$

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + \dots + x_nf(\vec{e}_n)$$

$$\text{Por tanto } \text{Im} f = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle = \text{Col} A, \text{ pues } A = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)]$$

4.6 Bases de $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$

Consideremos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, con matriz asociada A . Hemos visto en la sección anterior como $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. En esta sección vamos a determinar las dimensiones de $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$ y veremos como ambas se relacionan mediante el denominado **Teorema del Rango** o **Teorema de las Dimensiones**.

$$\text{Sea } A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n]$$

- $\text{Im} f = \text{Col} A = \langle \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n \rangle$. Eliminando los vectores linealmente dependientes obtendremos una base de $\text{Im} f$. **$\dim \text{Im} f = \text{rg } A$**

- $\text{Ker } f$ son los $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\boxed{\dim \text{Ker } f = n - \text{rg } A} = \text{número de parámetros libres}$$

$$* \text{ rg } A = n \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \text{ es CD}$$

$$\text{En este caso } \text{Ker } f = \{\vec{0}\} \text{ y } \dim \text{Ker } f = 0$$

$$* \text{ rg } A < n \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \text{ es CI}$$

$$\dim \text{Ker } f = n - \text{rg } A = \text{número de parámetros libres}$$

De aquí inferimos el Teorema del Rango o Teorema de las Dimensiones

Teorema 4.3 Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, entonces

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f}$$

$$\boxed{n = \dim \text{Ker } A + \text{rg } A}$$

El teorema se puede enunciar para aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales cualesquiera V y W en la siguiente forma:

Teorema 4.4 Sea la aplicación lineal $f : V \mapsto W$, entonces $\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$

Ejemplo 4.7 Obtén el núcleo y la imagen de la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ con

$$\text{matriz estándar asociada } A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 5}.$$

- Los vectores de $\text{Ker } f$ son los $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

*

*

Las columnas señaladas con * son columnas pivotaes.

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$$

$$x_2 = x_2$$

$$x_3 = -2x_4 + 2x_5$$

$$x_4 = x_4$$

$$x_5 = x_5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \qquad \qquad \vec{v} \qquad \qquad \vec{w}$$

$$\text{Ker} f = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes pues $\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow x_2 = x_4 = x_5 = 0$ (no hay más que fijarse en las entradas 2, 4 y 5)

$B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de $\text{Ker} f$. Del teorema del rango ya podíamos deducir que $\dim \text{Ker} f = 3$ pues $\dim \text{Ker} f = 5 - \text{rg} A = 5 - 2 = 3$

- $\text{Im} f = \text{Col} A = \langle \vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_5 \rangle$

Para obtener la base de $\text{Im} f$ hay que eliminar del conjunto $\{\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_5\}$ los vectores l.d. El subconjunto máximo de vectores l.i. lo podemos obtener tomando las columnas de A $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_3$, pues son columnas pivotaes en una forma escalonada por filas de la matriz. $\vec{a}_2, \vec{a}_4$ y $\vec{a}_5$ son c.l. de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_3$.

$B' = \{(-3, 1, 2), (-1, 2, 5)\}$ es una base de $\text{Im} f$.

$$\text{Im} f = \langle (-3, 1, 2), (-1, 2, 5) \rangle \quad \dim \text{Im} f = \text{rg} A = 2$$

- Otra forma de obtener $\text{Im} f$. Los vectores de $\text{Im} f$ son los $\{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{y} \text{ tiene solución}\}$. Denotando como (y_1, y_2, y_3) las coordenadas estándar del vector imagen, el SL que debe tener solución es el de matriz ampliada:

$$\begin{aligned} A^* &= \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & y_1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & y_2 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & y_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & y_2 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & y_1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & y_3 \end{array} \right] \sim \\ &\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & y_2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & y_1 + 3y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -2y_2 + y_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & (y_1 + 3y_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-y_1 - 3y_2)/5 - 2y_2 + y_3 \end{array} \right] \\ &\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & (y_1 + 3y_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-y_1 - 13y_2 + 5y_3)/5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El SL es compatible si y sólo si $\boxed{-y_1 - 13y_2 + 5y_3 = 0}$, es decir, si $y_3 = (y_1 + 13y_2)/5$

$$\text{Las soluciones son vectores de la forma } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (y_1 + 13y_2)/5 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 13/5 \end{bmatrix}$$

Una base de $\text{Im} f$ podría ser la $C' = \{(1, 0, 1/5), (0, 1, 13/5)\}$

$$\text{Im} f = \langle (1, 0, 1/5), (0, 1, 13/5) \rangle$$

Comentario: Este método nos ha permitido obtener la forma implícita del subespacio $\text{Im} f$, que viene dado por la ecuación encuadrada arriba. Una forma más sencilla de obtener la forma implícita de $\text{Im} f$ sería exigir que el siguiente SL fuera compatible, en el que los generadores de $\text{Im} f$ considerados no son los cinco iniciales sino el subconjunto l.i.

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & y_1 \\ 2 & 1 & y_2 \\ 5 & 2 & y_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & y_1 \\ 0 & -5 & y_2 + 2y_1 \\ 0 & 0 & -y_1 - 13y_2 + 5y_3 \end{array} \right]$$

Los dos vectores base de $\text{Im} f$ se han reordenado para facilitar las operaciones en la eliminación gaussiana.

Teorema 4.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con matriz asociada A . Entonces f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \text{rg } A = n$. (La última equivalencia se infiere directamente del Teorema del Rango).

Demostración:

f es inyectiva $\Rightarrow \text{Ker } f = \{\vec{0}\}$

$f(\vec{0}) = \vec{0}$ por ser f aplicación lineal

Por ser inyectiva si $f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$, pues no puede haber más antecedentes, aparte del anterior, por tanto $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$

$\text{Ker } f = \{\vec{0}\} \Rightarrow f$ es inyectiva

Supongamos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$

$f(\vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$ (pues $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$) $\Rightarrow \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow f$ es inyectiva. ■

Teorema 4.6 Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con matriz asociada A . Entonces f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Col } A = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \text{rg } A = m$

Conclusiones

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ aplicación lineal con matriz asociada $A_{m \times n}$ es:

- inyectiva $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$
- sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{rg } A = m$.

En el caso particular $n = m$ la aplicación es inyectiva y sobreyectiva o no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Ejemplo 4.8 Sea $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Determina si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.

- La aplicación es sobreyectiva si $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución.

$$\text{El sistema es } \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{y la matriz ampliada } \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 & y_1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & y_3 \end{bmatrix}$$

$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$, por tanto el sistema es compatible para cualquier terna (y_1, y_2, y_3) , por tanto f sobreyectiva.

- La aplicación es inyectiva si cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ es como mucho imagen de un vector de $\mathbb{R}^4$. Hemos visto que todo $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tiene antecedente, por tanto tenemos que ver si hay un o infinitos antecedentes. Como el número de columnas pivotaes (3) es menor que el número de incógnitas (4), queda un parámetro libre, y por tanto tenemos un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones. Luego f no es inyectiva.
- Respuesta teniendo en cuenta el rango de A .
 $\text{rg } A = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Sobreyectiva}$
 $\text{rg } A = 3 \neq \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \text{No inyectiva}$

Ejemplo 4.9 Sea $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 7x_2, x_1 + 3x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestra que f es inyectiva. ¿Es f sobreyectiva? Encuentra una base para $\text{Im} f$. Obtén las ecuaciones implícitas de la imagen.

$$f(1, 0) = (3, 5, 1), f(0, 1) = (1, 7, 3) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

- Las columnas de A son linealmente independientes por tanto f es inyectiva. $\text{rg} A = 2$
- f es sobreyectiva si $\text{Im} f = \text{Col} A = \mathbb{R}^3$. $\dim \text{Im} f = \text{rg} A = 2$. Por tanto f no es sobreyectiva.

$$\bullet f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ con } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Por tanto $B = \{(3, 5, 1), (1, 7, 3)\}$ es una base de $\text{Im} f$.

(Como las columnas de A son l.i. directamente forman la base de $\text{Im} f$).

- Ec. implícitas.

$$\text{El SL con matriz ampliada } A^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 & y_1 \\ 5 & 7 & y_2 \\ 1 & 3 & y_3 \end{bmatrix} \text{ tiene que ser compatible.}$$

Resolviendo por eliminación gaussiana:

$$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & y_3 \\ 5 & 7 & y_2 \\ 3 & 1 & y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & y_3 \\ 0 & -8 & y_2 - 5y_3 \\ 0 & -8 & -3y_3 + y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & y_3 \\ 0 & -8 & y_2 - 5y_3 \\ 0 & 0 & y_1 - y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

El sistema es compatible $\Leftrightarrow y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$, y por tanto, no para cualquier vector (y_1, y_2, y_3) . Las columnas de A no generan $\mathbb{R}^3$ y por tanto la aplicación no es sobreyectiva.

$$y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$$

A partir de la ecuación implícita podríamos obtener otras bases de $\text{Im} f$:

$$y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 - 2y_3$$

$$\text{Im} f = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ con } y_2, y_3 \in \mathbb{R} = y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } y_2, y_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Base}' = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$$

4.7 Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales

$$\begin{array}{lll} g: \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n & B_{n \times p} & g(\vec{x}) = B\vec{x} \\ f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m & A_{m \times n} & f(\vec{x}) = A\vec{x} \end{array}$$

$$f \circ g: \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m \quad f(g(\vec{x})) = A.B\vec{x} \quad \text{la matriz asociada a } f \circ g \text{ es } (A.B)_{m \times p}$$

Nota como las matrices se escriben en el mismo orden que las funciones.

4.8 Aplicaciones lineales inversibles

Definición 4.8 Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ se dice que es inversible si existe una aplicación lineal $s : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{aligned} s(f(\vec{x})) &= \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ f(s(\vec{x})) &= \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Si s existe, s es única. A la aplicación lineal s , que es la inversa de f se le denota como f^{-1} .

Teorema 4.7 Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y sea A la matriz asociada a f . Entonces f es inversible $\Leftrightarrow A$ es inversible. En este caso la matriz asociada a f^{-1} es A^{-1} , es decir, $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$.

4.9 Matriz asociada a una aplicación lineal (bases cualesquiera)

Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal.

$$\begin{aligned} B &= \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \text{ base de } \mathbb{R}^n \\ B' &= \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \dots, \vec{b}'_m\} \text{ base de } \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Entonces existe una única matriz F tal que $F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_{B'}$. En efecto F es la matriz $m \times n$ cuya columna j son las coordenadas del vector $f(\vec{b}_j)$ respecto de la base B' .

$$F = [[f(\vec{b}_1)]_{B'} \ [f(\vec{b}_2)]_{B'} \dots [f(\vec{b}_n)]_{B'}]$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_n\vec{b}_n \\ f(\vec{x}) &= c_1f(\vec{b}_1) + c_2f(\vec{b}_2) + \dots + c_nf(\vec{b}_n) \\ f(\vec{x}) &= f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_n\vec{b}_n) = c_1f(\vec{b}_1) + c_2f(\vec{b}_2) + \dots + c_nf(\vec{b}_n) = \\ &= c_1(a_{11}\vec{b}'_1 + a_{21}\vec{b}'_2 + \dots + a_{m1}\vec{b}'_m) + c_2(a_{12}\vec{b}'_1 + a_{22}\vec{b}'_2 + \dots + a_{m2}\vec{b}'_m) + \dots \\ &+ c_n(a_{1n}\vec{b}'_1 + a_{2n}\vec{b}'_2 + \dots + a_{mn}\vec{b}'_m) = (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n)\vec{b}'_1 + \\ &(a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n)\vec{b}'_2 + \dots + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n)\vec{b}'_m = \\ &c'_1\vec{b}'_1 + c'_2\vec{b}'_2 + \dots + c'_m\vec{b}'_m \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = c'_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = c'_2 \\ \dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n = c'_m \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_m \end{bmatrix} \\ [[f(\vec{b}_1)]_{B'} \ [f(\vec{b}_2)]_{B'} \dots [f(\vec{b}_n)]_{B'}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_m \end{bmatrix} \Rightarrow F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_{B'} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.10 Sea $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Escribe la matriz asociada a f respecto de esta base (en espacio inicial y final) sabiendo que:

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) &= 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4.10 Relación entre las matrices asociadas a una aplicación lineal, respecto a bases distintas

4.10.1 A de canónica a canónica, F de B a B'

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \vec{y} = A\vec{x} \quad [1]$$

$\vec{x}$ son las coordenadas respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^n$

$f(\vec{x}) = \vec{y}$ son las coordenadas respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^m$

A es la matriz estándar de la aplicación lineal

Supongamos dos bases distintas de las estándar, $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ para $\mathbb{R}^n$ y $B' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \dots, \vec{b}'_m\}$ para $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} \vec{x} &= P_B [\vec{x}]_B & P_B &= [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] \\ \vec{y} &= P_{B'} [\vec{y}]_{B'} & P_{B'} &= [\vec{b}'_1 \ \vec{b}'_2 \ \dots \ \vec{b}'_m] \end{aligned}$$

La ec. [1] se transforma a:

$$P_{B'} [\vec{y}]_{B'} = A P_B [\vec{x}]_B$$

$$[\vec{y}]_{B'} = P_{B'}^{-1} A P_B [\vec{x}]_B \quad \text{y definiendo } F = P_{B'}^{-1} A P_B$$

$$[\vec{y}]_{B'} = F [\vec{x}]_B \quad [2]$$

Hemos obtenido una ecuación similar a [1]. La diferencia está en que:

$[\vec{x}]_B$ es el vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base B de $\mathbb{R}^n$

$[\vec{y}]_{B'}$ es el vector de coordenadas de $\vec{y}$ respecto a la base B' de $\mathbb{R}^m$

F es la matriz asociada a la aplicación lineal f , respecto a las bases B y B' .

Veámoslo en un esquema:

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \longrightarrow \vec{y} \\ & & A \\ P_B \uparrow & & \uparrow P_{B'} \\ & [\vec{x}]_B & \longrightarrow [\vec{y}]_{B'} \\ & & F \end{array}$$

P_B tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica. $P_{B'}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base canónica.

$$A = P_{B'} F P_B^{-1} \quad F = P_{B'}^{-1} A P_B$$

4.10.2 El caso más general: F de B a B' , R de C a C'

A continuación veremos la relación entre las matrices asociadas a dos pares de bases cualesquiera.

$$F [x]_B = [y]_{B'}$$

$$R [x]_C = [y]_{C'}$$

$[x]_C = P [x]_B$ P es la matriz de cambio de base de B a C en $\mathbb{R}^n$. Sus columnas son las coordenadas de los vectores de B respecto a la base C .

$[y]_{C'} = Q [y]_{B'}$ Q es la matriz de cambio de base de B' a C' en $\mathbb{R}^m$. Sus columnas son las coordenadas de los vectores de B' respecto de la base C' .

$$R P [x]_B = Q [y]_{B'}$$

$$Q^{-1} R P [x]_B = [y]_{B'} \Rightarrow F = Q^{-1} R P$$

Veámoslo en un esquema: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\begin{array}{ccccc} [\vec{x}]_B & \xrightarrow{F} & [\vec{y}]_{B'} & & \\ P \downarrow & & \downarrow P & \uparrow Q^{-1} & F = Q^{-1} R P \\ [\vec{x}]_C & \xrightarrow{R} & [\vec{y}]_{C'} & & \end{array}$$

Ejemplo 4.11 Sea g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que su matriz asociada respecto a la base $B = \{(1,3), (2,5)\}$, tanto para el espacio inicial como para el final, es $R = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica.

b) Calcular la imagen del vector $\vec{u} = (6,15)$ expresando el resultado respecto de la base canónica.

a) Hay que calcular la matriz A tal que $A\vec{x} = \vec{y}$

$$\text{Sabemos que } R[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B, \text{ con } R = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Para obtener una ecuación que relacione A y R debemos expresar $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en función de $[\vec{x}]_B$ e $[\vec{y}]_B$ o recíprocamente.

$$\vec{x} = P[\vec{x}]_B, \text{ con } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = P[\vec{y}]_B$$

$$\text{Por tanto } AP[\vec{x}]_B = P[\vec{y}]_B \quad y \quad P^{-1}AP[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$$

$$P^{-1}AP = R \Rightarrow A = PRP^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -52 & 20 \\ -143 & 55 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} -52 & 20 \\ -143 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -33 \end{bmatrix}$$

$A \quad \vec{u} \quad f(\vec{u})$

Otro método: obtención de la imagen utilizando la matriz R

Primero tenemos que expresar $(6,15)$ en la base B , resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

La solución es $(0,3)$, por tanto las coordenadas de $(6,15)$ respecto a la base B son $[\vec{u}]_B = (0,3)$

$$\text{Tomando la matriz } R: \quad R \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$[\vec{u}]_B \quad [f(\vec{u})]_B = [\vec{y}]_B$

y expresando $[\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$ respecto a la base canónica tenemos:

$$\vec{y} = f(\vec{u}) = -6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -33 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.12 Se considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz estándar asociada es $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Determina la matriz asociada a la aplicación respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^4$ y la base $\{(1, 0, 2), (0, 1, 3), (1, 2, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{y}$$

Tenemos que calcular R tal que $R\vec{x} = \vec{y}'$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} \quad \vec{y} = P\vec{y}'$$

$$A\vec{x} = P\vec{y}' \Rightarrow P^{-1}A\vec{x} = \vec{y}' \Rightarrow R = P^{-1}A$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 & 1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & -1/6 \end{bmatrix}$$

$$R = P^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 & 4/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & -7/3 \\ 11/6 & -1/6 & 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}; \quad R\vec{x} = \vec{y}'$$

Ejemplo 4.13 Se considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$\begin{aligned} (1, 1, 0) &\mapsto (0, -3, -2) \\ (3, 0, -2) &\mapsto (1, 4, -5) \\ (0, -2, 2) &\mapsto (1, -4, 0) \end{aligned}$$

Determina la matriz asociada a la aplicación lineal respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^3$ (en dominio y codominio).

En primer lugar veremos que el conjunto $B = \{(1, 1, 0), (3, 0, -2), (0, -2, 2)\}$ forma una base.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10$ por tanto los tres vectores forman una base. Denotamos esos vectores como $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

$$\vec{x} = x'_1\vec{u}_1 + x'_2\vec{u}_2 + x'_3\vec{u}_3$$

$$f(\vec{x}) = x'_1f(\vec{u}_1) + x'_2f(\vec{u}_2) + x'_3f(\vec{u}_3) = x'_1(0, -3, -2) + x'_2(1, 4, -5) + x'_3(1, -4, 0) = (y_1, y_2, y_3)$$

Expresando el sistema matricialmente obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -4 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Llamando Q a la matriz de la izquierda tenemos $Q[\vec{x}]_B = \vec{y}$

Para obtener la matriz A tal que $A\vec{x} = \vec{y}$ debemos escribir la ecuación que relaciona $[\vec{x}]_B$ y $\vec{x}$

$$P[\vec{x}]_B = \vec{x} \quad \text{con } P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = Q[\vec{x}]_B = QP^{-1}\vec{x}, \text{ por tanto la matriz asociada en la base estándar es } A = QP^{-1}$$

$$A = QP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -4 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -2/5 & 1/10 \\ -6/5 & -9/5 & -19/5 \\ -9/5 & -1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar por ejemplo como $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Ejemplo 4.14 Sea la aplicación lineal $g: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que:

$$g(1, 0, 0) = (3, -1)$$

$$g(0, 1, 0) = (0, 4)$$

$$g(0, 0, 1) = (-2, 5)$$

con todos los vectores referidos a la base canónica.

a) Determina la matriz A asociada a la aplicación lineal respecto de la bases canónicas.

b) Determina la matriz F asociada a la aplicación lineal respecto de las bases $B = \{(1, 3, 0), (1, 0, 2), (0, 4, -2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(2, 1), (4, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ pues $A = [g(\vec{e}_1) \ g(\vec{e}_2) \ g(\vec{e}_3)]$

b)

$$\begin{array}{ccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & [\vec{x}]_{can} & \xrightarrow{A} [\vec{y}]_{can} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P \uparrow & & \uparrow Q \quad \downarrow Q^{-1} \\ [\vec{x}]_B & \xrightarrow{R} & [\vec{y}]_{B'} \end{array} \quad R = Q^{-1} A P$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} -35/2 & -39/2 & -6 \\ 19/2 & 19/2 & 4 \end{bmatrix}$$

4.11 Matrices equivalentes

Definición 4.9 Se dice que dos matrices $A_{m \times n}$ y $G_{m \times n}$ son **equivalentes**, si existen dos matrices inversibles P_n y Q_m tales que $A = PGQ$

Teorema 4.8 Dos matrices equivalentes por filas son equivalentes.

Demostración: $A_{m \times n}$ es equivalente por filas a $G_{m \times n} \Rightarrow$ existen $E_1, E_2, \dots, E_p$ matrices elementales de orden m tales que $A = E_1 E_2 \dots E_p G$

El producto de matrices elementales es una matriz inversible. Denotando $E_1 E_2 \dots E_p = P$ tenemos que $A = PG = PGI$, siendo I la matriz identidad de orden n .

$A = PGI$ con P e I inversibles y por tanto A es equivalente a G . ■

Teorema 4.9 Dos matrices son equivalentes entre sí si y sólo si definen la misma aplicación lineal respecto a bases distintas.

Demostración:

$$\begin{array}{ccc}
 f: \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m \\
 [\vec{x}]_* & \xrightarrow{\quad A \quad} & [\vec{y}]_{*'} \\
 Q \downarrow & & \downarrow P^{-1} \uparrow P \\
 [\vec{x}]_{*''} & \xrightarrow{\quad G \quad} & [\vec{y}]_{*'''}
 \end{array}$$

$$A [x]_* = [y]_{*'}$$

$$G [x]_{*''} = [y]_{*'''}$$

$A = P G Q$, siendo P la matriz de cambio de base de $*'''$ a $*'$ y Q la matriz de cambio de base de $*$ a $*''$ ■

4.12 Endomorfismos y matrices semejantes

Definición 4.10 Se dice que dos matrices A_n y G_n son **semejantes** si $\exists P$ inversible tal que A se puede factorizar de la forma $A = PGP^{-1}$. Si dos matrices son semejantes, es obvio que también son equivalentes.

Teorema 4.10 Dos matrices A_n y G_n correspondientes a la misma aplicación lineal en distintas bases, utilizando en cada caso una misma base en el espacio inicial y final, son semejantes.

Demostración: Denotemos por A y G , respectivamente, las matrices asociadas a f respecto de la base C (inicial y final) y respecto de la base C' (inicial y final). La relación entre A y G se puede deducir del siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}
 f: \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\
 [\vec{x}]_C & \xrightarrow{\quad A \quad} & [\vec{y}]_C \\
 P^{-1} \downarrow & & \uparrow P \\
 [\vec{x}]_{C'} & \xrightarrow{\quad G \quad} & [\vec{y}]_{C'}
 \end{array} \qquad A = P G P^{-1}$$

■

4.13 Matriz diagonalizable

Definición 4.11 Se dice que una matriz A_n es **diagonalizable** si A es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existen una matriz inversible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.

4.14 Geometría de algunas aplicaciones lineales en el plano

I) Rotación en el plano, respecto de un punto fijo, $(0,0)$, de un ángulo β .

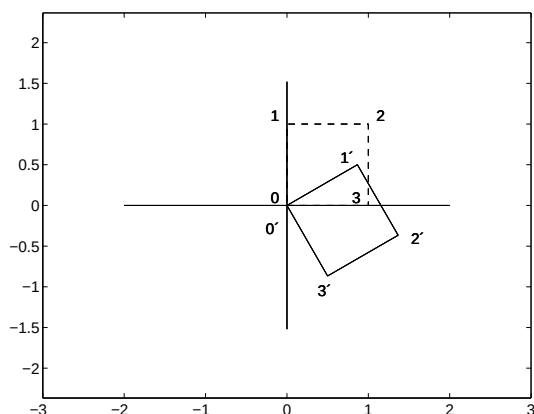
$$A = \begin{bmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta \\ -\text{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Rotación respecto de $(0,0)$ del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, un ángulo $\pi/3$

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ -\text{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ -\text{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ -\text{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + \sqrt{3}/2 \\ 1/2 - \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$



Matriz estándar asociada

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

II) Reflexiones

- Respecto del eje X $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

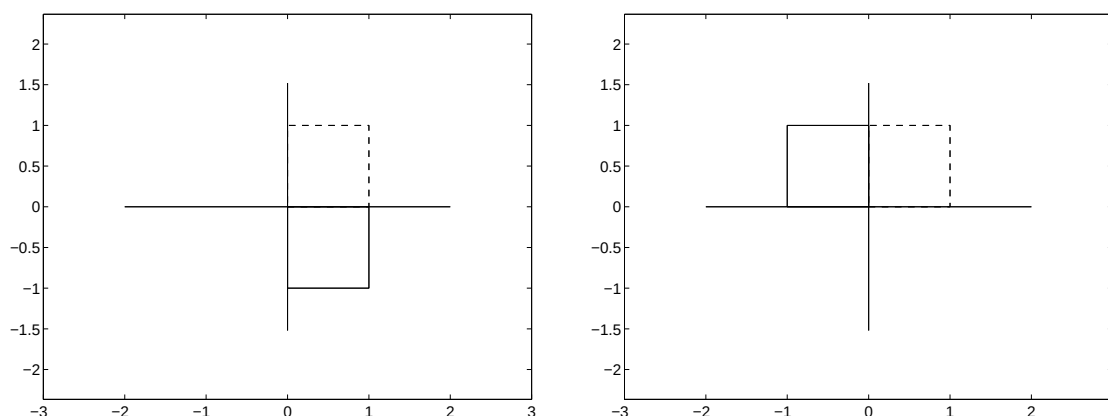
$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \end{cases}$$

Para un vector genérico (x, y) , $f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x\vec{e}_1 - y\vec{e}_2$. (La primera coordenada canónica cambia de signo, la segunda se queda igual).

- Respecto del eje Y $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

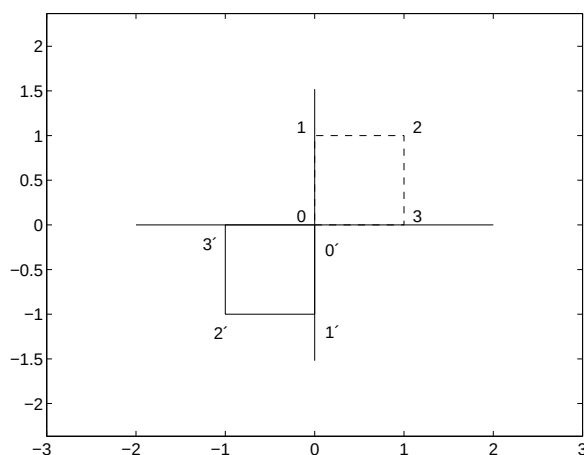
$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \end{cases}$$

Para un vector genérico (x, y) , $f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = -x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. (La segunda coordenada canónica cambia de signo, la primera se queda igual).



La reflexión respecto del eje X (eje Y) también se conoce como "simetría ortogonal" respecto del eje X (eje Y).

- Reflexión respecto del eje origen $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$



III) Expansión/contracción

$$\text{Vertical} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

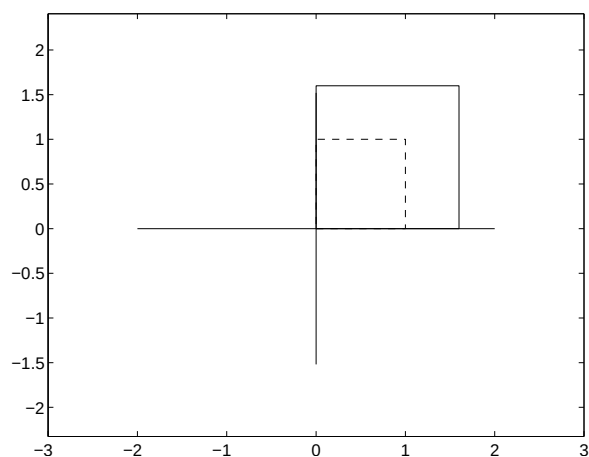
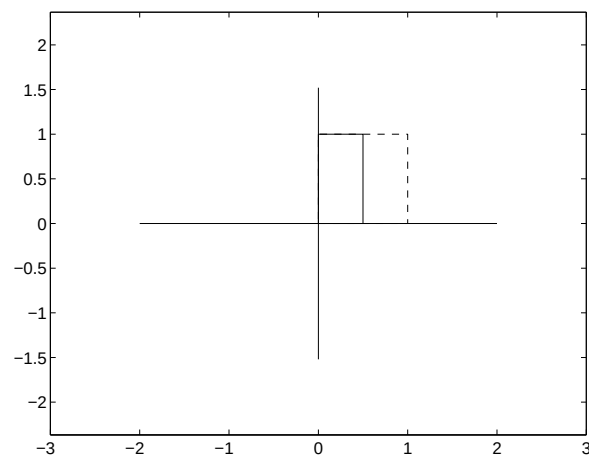
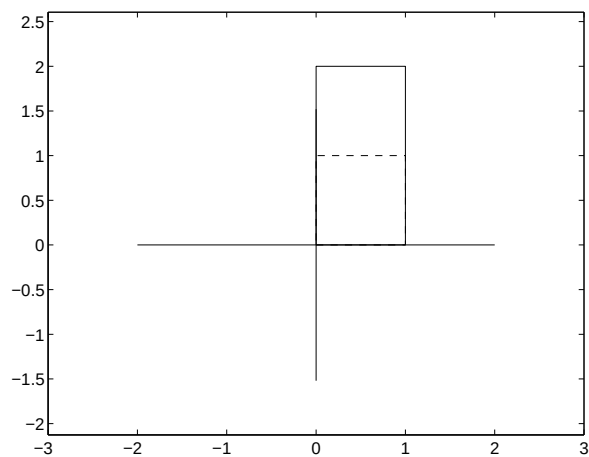
$$\text{Horizontal} \quad A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{Vertical y horizontal} \quad A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ k'y \end{bmatrix}$$

$k > 1$ es expansión y $0 < k < 1$ es compresión.

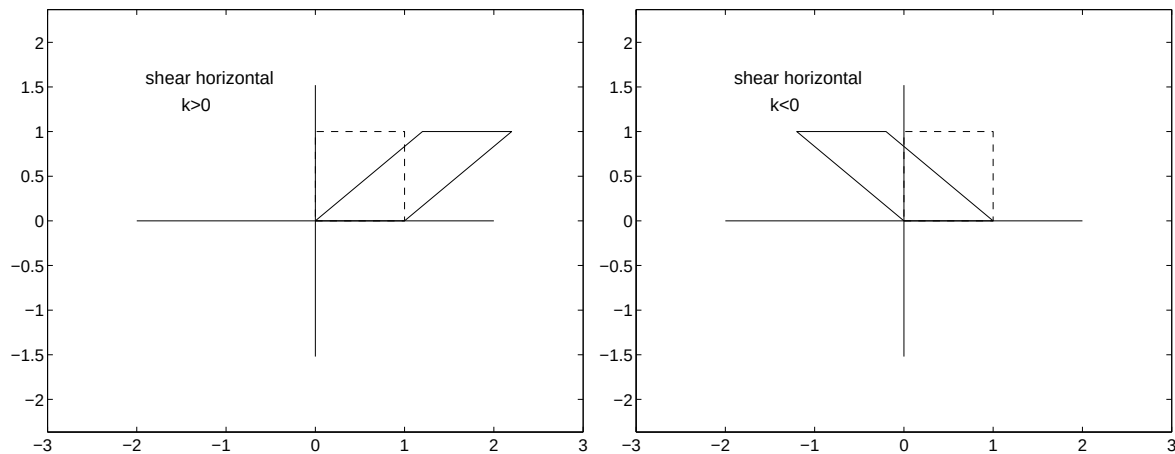
En la última matriz si $k = k'$ la expansión o compresión es igual en los dos ejes.

Se muestran gráficos correspondientes a 1) Una expansión vertical, 2) Una compresión horizontal y 3) Una expansión horizontal y vertical con la misma escala en ambas direcciones

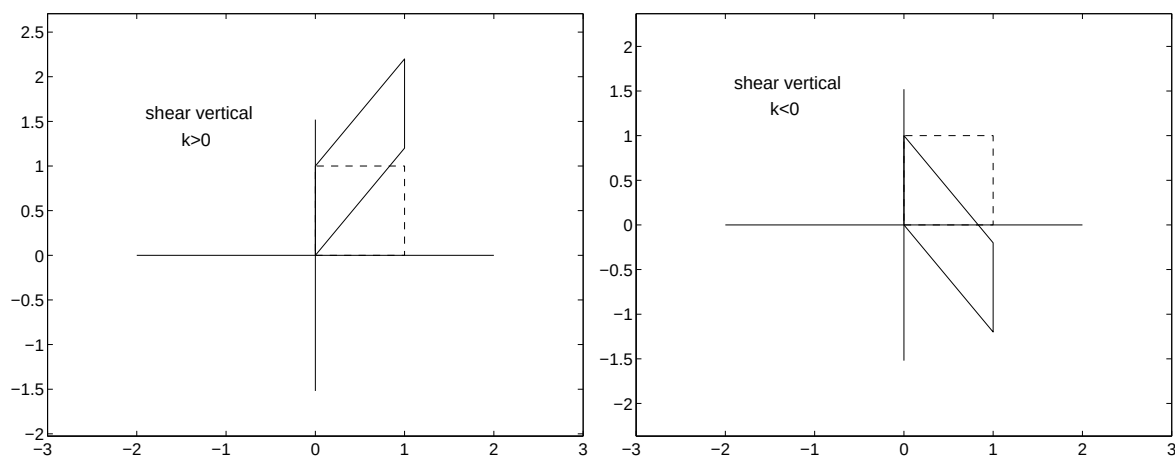


IV) “Shear” o cizalladura. Todas las líneas paralelas a una línea fija se trasladan paralelamente a la línea fija por una cantidad proporcional a la distancia entre la línea y la línea fija. Las líneas a lados contrarios se desplazan en sentidos contrarios.

“shear” horizontal $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$



“shear” vertical $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$



4.15 Ejercicios

Ejercicio 4.1 Determinar si las aplicaciones $f(x) = 5x$ y $g(x) = 5x + 3$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, son o no aplicaciones lineales.

Ejercicio 4.2 Determina si la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$ es o no aplicación lineal.

Ejercicio 4.3 Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$. Hallar el núcleo de la aplicación lineal.

Ejercicio 4.4 Considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1, x_2) = (3x_1, 3x_1 + x_2)$. Comprobar que es una aplicación lineal y hallar el núcleo.

Ejercicio 4.5 Demostrar que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2)$ es inyectiva y no suprayectiva.

Ejercicio 4.6 Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (2, 1)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (0, 1)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (1, 1)$$

Hallar la imagen de $\mathbb{R}^3$ para esta aplicación lineal, las ecuaciones de la aplicación lineal y el núcleo.

Ejercicio 4.7 Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, -1)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (1, -1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (1, -3, 3)$$

Hallar el núcleo e imagen de f , las dimensiones del núcleo e imagen, y una base para cada uno de ellos.

Ejercicio 4.8 Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, 0)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (0, 1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (1, 1, 1)$$

Demuestra que f es inyectiva y suprayectiva.

Ejercicio 4.9 Considera las siguientes aplicaciones lineales:

$$f(x, y) = (x - y, 3x, 2y) \quad \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$g(x, y) = (x, x + y, x - y, y) \quad \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^4$$

$$h(x, y, z, t) = (x - t, x + y + z, y - z) \quad \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$$

Demuestra que $f = h \circ g$

Ejercicio 4.10 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1, 1, 1)$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (2, 0, -3)$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 4)$$

a) Hallar la matriz correspondiente a la aplicación lineal

b) Hallar la imagen de $(2, -3, 5)$

c) Hallar el vector cuya imagen es $(2, -5, 4)$

Ejercicio 4.11 Considera la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases

canónicas es $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Determinar $\text{Im} f$ y una base del mismo.

Ejercicio 4.12 Sea f la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$$f(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

$$f(1, 1, 1, -1) = (1, 1, -1)$$

$$f(1, 1, -1, -1) = (1, -1, -1)$$

$$f(1, -1, -1, -1) = (-1, -1, -1)$$

Determina la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases canónicas.

Ejercicio 4.13 Construye, si es posible, una aplicación lineal con las condiciones pedidas en cada uno de los casos siguientes:

a) una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$

b) una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$

c) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$ cuyo rango sea 5

d) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim \text{Ker} f = 3$

Ejercicio 4.14 Sea B la base de $\mathbb{R}^3$ dada por los vectores $\{(1, 0, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 2)\}$. Se considera la aplicación lineal $f : V = \mathbb{R}^3 \mapsto W = \mathbb{R}^3$, definida por:

$$f(1, 0, 1) = (4, -2, 1)$$

$$f(2, 1, 1) = (11, 2, -1)$$

$$f(0, 1, 2) = (1, 2, -1)$$

donde todos los vectores están expresados en la base canónica.

a) Halla la matriz M de la aplicación f respecto de la base B en V y de la base canónica en W .

b) Halla la matriz A de la aplicación f respecto de la base canónica en V y W .

c) Halla las dimensiones de $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$, y utiliza lo obtenido para justificar que f no es biyectiva.

d) Calcula $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$

Ejercicio 4.15 Sea $L = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la aplicación lineal L de $\mathbb{R}^2$ en

$\mathbb{R}^3$, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Determina la matriz asociada a L respecto:

a) Las bases $S = \{(1, -1), (0, 1)\}$ y $T = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1)\}$

b) La base canónica en $\mathbb{R}^2$ y la base T en $\mathbb{R}^3$

c) La base S en $\mathbb{R}^2$ y la base canónica en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 4.16 Obtén una matriz F semejante a la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (que no sea la propia matriz A). Suponiendo que A representa una transformación lineal referida a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, la matriz F corresponderá a la misma transformación lineal respecto a otra base B (la misma en espacio inicial y final). Determina esa base B .

Ejercicio 4.17 Dadas las siguientes aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ en las que se hace referencia a la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ o a la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, indica qué matriz asociada F se infiere de forma inmediata (marcando el recuadro con una $\times$) y cuál es esa matriz (rellena con números los puntos suspensivos)

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases} & \begin{array}{l} \square F\vec{x} = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \square F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{array} \quad F = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 b) \begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \end{cases} & \begin{array}{l} \square F\vec{x} = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \square F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{array} \quad F = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 c) \begin{cases} f(\vec{e}_1) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{u}_3 \end{cases} & \begin{array}{l} \square F\vec{x} = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \square F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{array} \quad F = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
 d) \begin{cases} f(\vec{u}_1) = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{e}_2 \end{cases} & \begin{array}{l} \square F\vec{x} = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \square F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{array} \quad F = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Ejercicio 4.18 Simetría ortogonal respecto a una recta que pasa por el origen
 Considérese en $\mathbb{R}^2$ la simetría ortogonal respecto de la recta generada por el vector $(3, 1)$.

- Determina la matriz M asociada a este endomorfismo respecto de la base $B = \{(3, 1), (1, -3)\}$
- Determina la matriz A asociada respecto de la base canónica.
- Determina la imagen del vector $\vec{x} = (4, 3)$ (el vector $\vec{x}$ está en base canónica, y la imagen de $\vec{x}$ también hay que darla en base canónica).

Ejercicio 4.19 Simetría oblicua respecto a una recta que pasa por el origen

Sea f la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por la matriz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Encontrar la matriz que representa dicha aplicación respecto de la base $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$. ¿Cuál es el significado geométrico de dicha aplicación?

Ejercicio 4.20 Determina la ecuación de la recta cuyos puntos permanecen fijos en la transformación lineal

$$g(x, y) = \left(\frac{3x + y}{2}, \frac{y - x}{2} \right)$$

¿Cuál es la matriz asociada a esta aplicación lineal, respecto de la base canónica?

Ejercicio 4.21 Considera el endomorfismo f en $\mathbb{R}^2$ con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Representa gráficamente la transformación por f de un cuadrado de vértices $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ y $(1, -1)$.
- Demuestra que f se puede escribir como la composición de una dilatación según el eje X y una cizalladura según el eje X , siendo las correspondientes matrices de transformación:

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix} \right) \\
 T' &= \begin{bmatrix} 1 & k' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & k' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + k'y \\ y \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Calcula los coeficientes de dilatación k y de cizalladura k' para los casos $A = TT'$ y $A = T'T$.

c) Demuestra que la transformación f deja fijos los puntos de una recta y obtén la ecuación implícita de dicha recta.

Ejercicio 4.22 Considerando el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por un giro de 90 grados en sentido antihorario, obtener su matriz:

- a) en base canónica
- b) en base $\{(1, 1), (1, -1)\}$

Ejercicio 4.23 Considerando el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por una simetría ortogonal respecto al plano YZ , obtener su matriz:

- a) en base canónica
- b) en base $\{(2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 4)\}$

Ejercicio 4.24 Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal en el plano, correspondiente a una cizalla horizontal de ángulo 30° respecto de la vertical.

Ejercicio 4.25 Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ cuya transformación geométrica es la siguiente:

- Dilatación por un factor 2 según el eje X
- Cizalladura de los planos paralelos al XZ de ángulo 30 grados hacia y positivo.

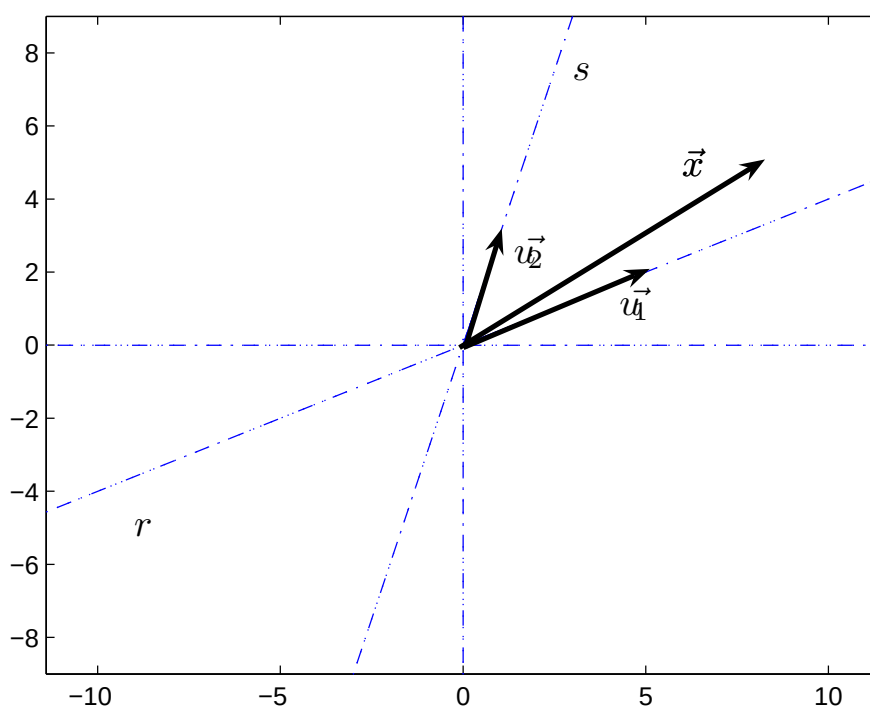
Ejercicio 4.26 Calcula la imagen del subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación

$$z = 2y, \text{ mediante la transformación lineal } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.27 Demuestra que dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.

Ejercicio 4.28 Simetría oblicua. a) Obtén el punto simétrico de $\vec{x} = (8, 5)$ respecto de la recta r con vector director $\vec{u}_1 = (5, 2)$ según la dirección paralela a la recta s de vector director $\vec{u}_2 = (1, 3)$.

b) Obtén la matriz de la aplicación lineal anterior respecto de la base canónica.



c) Comprueba el resultado a) utilizando la matriz del apartado b).

Ejercicio 4.29 En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $U = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $W = x + y + z = 0$. Determina un endomorfismo f en $\mathbb{R}^3$ de forma que $\text{Ker} f = U$ e $\text{Im} f = W$

Ejercicio 4.30 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z, t) = x + ay + bz + t$, obtener los valores de a y b para que la dimensión de $\text{Ker} f$ sea 3.

Ejercicio 4.31 Dado un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, el conjunto $B = \{(2, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ es una base del subespacio imagen de f . Argumentar que tipo de aplicación es. Obtener las ecuaciones de una aplicación cuyo espacio imagen sea el generado por B , así como su núcleo y matriz asociada.

Ejercicio 4.32 Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 0, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c, 2)$. Determina $\text{Ker} f$ en función del parámetro c .

Ejercicio 4.33 Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1 + x_2, x_1 + ax_3, x_2 + x_4)$$

Se pide:

- a) Valores de a para los cuales f es inyectiva
- b) Valores de a para los cuales f es sobreyectiva
- c) Base del núcleo de f en función de a , y para el caso particular $a = 2$
- d) Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$. Calcular las ecuaciones implícitas de $f(V)$ para $a = 0$

4.16 Soluciones

4.1

$$a) \quad f(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) = 5x_1 + 5x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(\lambda x_1) = 5(\lambda x_1) = 5\lambda x_1 = \lambda 5x_1 = \lambda f(x_1)$$

Por tanto $f(x)$ es lineal.

$$b) \quad f(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) + 3 = 5x_1 + 5x_2 + 3$$

$$f(x_1) + f(x_2) = 5x_1 + 3 + 5x_2 + 3$$

Los segundos miembros no son iguales puesto que $3 \neq 6$, y por tanto la aplicación no es lineal.

4.3

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2/3 x_1$$

$$\text{Ker } f = \{x_1 (1, 2/3) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

Otra forma de expresar el núcleo: $\text{Ker } f = \langle (1, 2/3) \rangle$

$$\dim \text{Ker } f = 1$$

4.5

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$, por tanto la aplicación lineal es inyectiva.

La matriz asociada a la aplicación lineal es de orden 3×2 por tanto $\dim \text{Im } f = \text{rg } A \leq 2 < 3$, por tanto no sobreyectiva.

4.6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dim \text{Im } f = \text{rg } A = 2 \quad \text{Im } f = \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de la aplicación lineal son: $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \end{cases}$

Núcleo de la aplicación lineal:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -1/2 x_3$$

$$x_2 = -x_1 - x_3 = 1/2 x_3 - x_3 = -1/2 x_3$$

$$\text{Ker } f = \{(-1/2, -1/2, 1) x_3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$\dim \text{Ker } f = 1$, y queda comprobado que $\dim \mathbb{R}^3 = \text{rg } A + \dim \text{Ker } f \quad (3=2+1)$

4.7

Ker f

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^*$$

$$x_2 = -2 x_3, x_1 = -x_2 - x_3 = 2 x_3 - x_3 = x_3$$

$$\text{Ker } f = \{(x_3, -2 x_3, x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim \text{Ker } f = 1, \text{Base} = \{(1, -2, 1)\}$$

Im f

A la vista de la matriz * tenemos que en A la tercera columna es c.l. de las dos primeras, por tanto una base de $\text{Im } f$ puede ser $\text{Base} = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1)\}$

Otra forma de obtener una base de $\text{Im } f$ sería la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & -3 & y_2 \\ -1 & 1 & 3 & y_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -2 & -4 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 2 & 4 & y_1 + y_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2(y_1 - y_2) \\ 0 & 0 & 0 & y_2 + y_3 \end{array} \right]$$

El sistema tiene solución si y sólo si $y_3 = -y_2$ (esta es la ecuación implícita).

$$\text{Im } f = \{(y_1, y_2, -y_2) / y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim \text{Im } f = \text{rg } A = 2 \quad \text{Base} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$$

4.8

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ A continuación aplicamos eliminación gaussiana por filas para calcular el rango.

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$\text{rg } A =$ dimensión del espacio inicial, por tanto inyectiva

$\text{rg } A =$ dimensión del espacio final, por tanto sobreyectiva

4.9

$$g(x, y) = (x, x + y, x - y, y)$$

$$h(g(x, y)) = h((x, x + y, x - y, y)) = (x - y, x + x + y + x - y, x + y - (x - y)) = (x - y, 3x, 2y) = f(x, y)$$

De otra forma, se puede comprobar que $A_h A_g = A_f$

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4.12

Una aplicación lineal queda perfectamente definida por las imágenes de una base del espacio inicial. Comprobemos que $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, -1)\}$ forman base de $\mathbb{R}^4$.

Escribimos la matriz P que tiene como columnas esos vectores, y realizamos la eliminación gaussiana:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}P=4$ y $\dim\mathbb{R}^4=4$, por tanto las columnas de P son base de $\mathbb{R}^4$.

Denotando los vectores como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$, tenemos que cualquier $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ se podrá expresar como c.l. de esa base:

$$\vec{x} = x'_1 \vec{v}_1 + x'_2 \vec{v}_2 + x'_3 \vec{v}_3 + x'_4 \vec{v}_4$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = x'_1 f(\vec{v}_1) + x'_2 f(\vec{v}_2) + x'_3 f(\vec{v}_3) + x'_4 f(\vec{v}_4) = [f(\vec{v}_1) \ f(\vec{v}_2) \ f(\vec{v}_3) \ f(\vec{v}_4)] [\vec{x}]_B = M [\vec{x}]_B$$

con

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M [\vec{x}]_B = \vec{y}$$

$$P [\vec{x}]_B = \vec{x}$$

$$\Rightarrow M [\vec{x}]_B = M P^{-1} \vec{x} = \vec{y}$$

Por tanto la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases canónicas es

$$M P^{-1} = M \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$A \vec{x} = \vec{y}$$

4.13

a) Imposible. La matriz A sería de orden 3×4 , por tanto $\text{rg}A \leq 3$, y A inyectiva si y sólo si $\text{rg}A = \text{dimensión del espacio inicial} = 4$.

b) Vendrá dada por una matriz A de orden 3×4 con $\text{rg}A=3$, pues A sobre si y sólo si $\text{rg}A=\text{dimensión del espacio final} = 3$.

Por ejemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Imposible, la matriz A ha de ser de orden 5×4 , por tanto $\text{rg}A \leq 4$

d) La matriz A es de orden 4×5 , por tanto $\text{rg}A \leq 4$. De acuerdo con el Teorema del Rango, $\dim \mathbb{R}^5 = 5 = \text{rg}A + \dim \text{Ker}f$. Ya que $\dim \text{Ker}f$ debe ser 3, $\text{rg}A = 2$. Cualquier matriz A de orden 4×5 y rango 2 verifica la condición de este apartado.

Por ejemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.14

$$\text{a) } M = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad M[\vec{x}]_B = \vec{y} \quad [1]$$

$$\text{b) } A\vec{x} = \vec{y}$$

$$P_B[\vec{x}]_B = \vec{x} \Rightarrow P_B^{-1}\vec{x} = [\vec{x}]_B$$

Sustituyendo en [1]:

$$MP_B^{-1}\vec{x} = \vec{y}, \text{ por tanto } A = MP_B^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 14 & 7 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

c y d) Calcularemos $\text{Ker}f$ e $\text{Im}f$ tomando la matriz A , que es la referida a las bases canónicas.

$\text{Ker}f$

$\text{Ker}f$ = Vectores tales que su imagen es el $\vec{0}$. Por tanto $\text{Ker}f$ se obtiene resolviendo el SL $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$

$$1/3 \begin{bmatrix} 14 & 7 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ que tiene la misma solución que:}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 7 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo mediante eliminación gaussiana obtenemos:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 7 & -2 & 0 \\ -2 & 14 & -4 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{x_1 = 0}$$

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 7x_2 = 2x_3 \Rightarrow \boxed{x_3 = 7/2 x_2}$$

$\text{Ker}f = \{(0, 1, 7/2) x_2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ $\dim \text{Ker}f = 1 \Rightarrow f$ no es inyectiva

$\text{Im}f$

Por el Teorema del Rango sabemos que $\dim \text{Im}f = 3 - \dim \text{Ker}f = 3 - 1 = 2$. Por tanto la base estará formada por dos columnas de A linealmente independientes. Las dos primeras columnas de A son l.i. por tanto $\text{Im}f = \langle (14, -2, 1), (7, 14, -7) \rangle$

4.16

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ semejante a } F \Rightarrow A = P F P^{-1} \Rightarrow F = P^{-1} A P$$

$$\text{Tomamos por ejemplo } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la inversa por G-J:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{y} \\ & & A & \\ P^{-1} \downarrow & & \uparrow P & \\ & [\vec{x}]_B & \xrightarrow{F} & [\vec{y}]_B \end{array} \quad A = P F P^{-1}$$

$$P[\vec{x}]_B = \vec{x} \Rightarrow B = \{ (1, 0), (2, -1) \}$$

4.17

a) $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \boxed{\times} F\vec{x} = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \square F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{cases}$	$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
b) $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \square F\vec{x} = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \boxed{\times} F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \square F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{cases}$	$F = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$
c) $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_3) = -\vec{u}_3 \end{cases}$	$\begin{cases} \square F\vec{x} = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \boxed{\times} F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{cases}$	$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
d) $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ f(\vec{u}_3) = -\vec{e}_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \square F\vec{x} = \vec{y} \\ \boxed{\times} F[\vec{x}]_B = \vec{y} \\ \square F[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \\ \square F\vec{x} = [\vec{y}]_B \end{cases}$	$F = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4.18

$$a) \quad B = \{(3, 1), (1, -3)\} \quad \begin{cases} f(3, 1) = (3, 1) \\ f(1, -3) = -(1, -3) \end{cases}$$

Para enlazar este ejercicio con el anterior podemos utilizar esta notación:

$$\vec{b}_1 = (3, 1), \vec{b}_2 = (1, -3), B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} \text{ es base de } \mathbb{R}^2.$$

Con esta notación la definición de la aplicación lineal es la siguiente:

$$\begin{cases} f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 \\ f(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2 \end{cases} \quad \text{o lo que es lo mismo: } \begin{cases} f(\vec{b}_1) = 1 \vec{b}_1 + 0 \vec{b}_2 \\ f(\vec{b}_2) = 0 \vec{b}_1 - 1 \vec{b}_2 \end{cases}$$

Por tanto en la base $B = \{(3, 1), (1, -3)\}$ la matriz asociada es: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$b) \quad \text{En la base canónica: } A = PMP^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

4.19

$$A = 1/3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{y}$$

$AP[\vec{x}]_B = P[\vec{y}]_B$ con $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y siendo $[\vec{x}]_B$ e $[\vec{y}]_B$ las coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ respecto de la base B .

$P^{-1}AP[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ por tanto la matriz asociada a la aplicación lineal, relativa a la base B es $R = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} 1/3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada respecto de la base B .

$$R[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix}_B$$

El vector $\vec{b}_1 = (1, 2)$ tiene por coordenadas respecto de la base B $[\vec{b}_1]_B = (1, 0)$, y su imagen tiene por coordenadas respecto de la base B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \quad \text{Por tanto } f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 = (1, 2)$$

El vector $\vec{b}_2 = (-1, 1)$ tiene por coordenadas respecto de la base B $[\vec{b}_2]_B = (0, 1)$, y su imagen tiene por coordenadas respecto de la base B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_B \quad \text{Por tanto } f(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2 = (1, -1)$$

El vector $\vec{b}_1$ se transforma en sí mismo, y el vector $\vec{b}_2$ tiene como imagen el vector opuesto. La aplicación lineal corresponde geoméricamente a una reflexión respecto de la dirección $(1, 2)$, paralelamente a la dirección $(-1, 1)$. También se expresa esta transformación lineal como “simetría oblicua”.

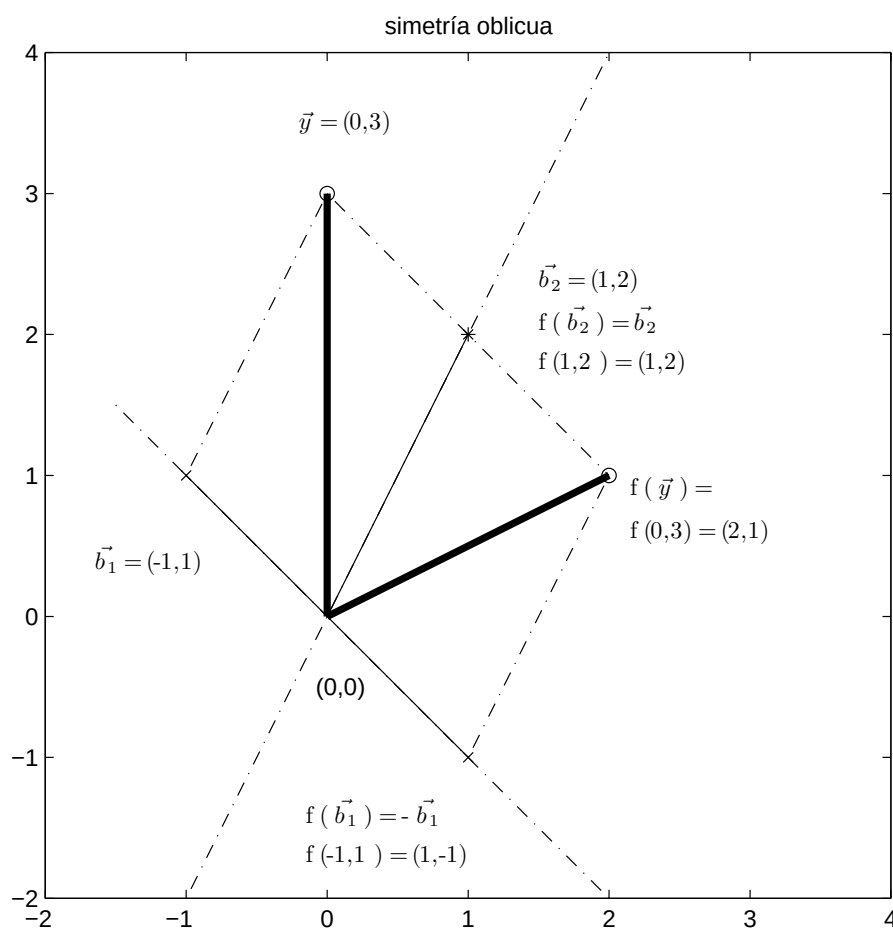
$(1, 2)$ es la dirección del eje de simetría. Recta $y = 2x$.

La simetría se produce paralelamente a la dirección $(-1, 1)$, por tanto paralelamente a la recta $y = -x$.

Ya que $(-1, 1)$ no es ortogonal a $(1, 2)$ la simetría no es ortogonal sino oblicua.

$$f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2) = c_1\vec{b}_1 - c_2\vec{b}_2$$

Veamos por ejemplo como se transforma el vector $(1, 2) + (-1, 1) = (0, 3)$, que tiene coordenadas respecto a B $(1, 1)$. La imagen tiene coordenadas respecto a B $(1, -1)$. Respecto de la base canónica la imagen es $(1, 2) - (-1, 1) = (2, 1)$



4.20

$$g(x, y) = \left(\frac{3x + y}{2}, \frac{y - x}{2} \right)$$

$$g(1, 0) = (3/2, -1/2)$$

$$g(0, 1) = (1/2, 1/2)$$

$$G = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

A continuación determinamos los elementos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que permanecen fijos, resolviendo la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$3/2 a + 1/2 b = a \Rightarrow 3 a + b = 2 a \Rightarrow a = -b$$

$$-1/2 a + 1/2 b = b \Rightarrow b - a = 2 b \Rightarrow a = -b$$

Por tanto los vectores de $\mathbb{R}^2$ que permanecen fijos respecto a la transformación g son los que tienen la forma $(a, -a)$, para cualquier valor de a .

La ecuación de la recta es:

$$\text{En forma paramétrica: } \begin{cases} x = a \\ y = -a \end{cases} / a \in \mathbb{R}$$

$$\text{En forma implícita: } y = -x$$

4.22

Determinemos las imágenes de los vectores de la base canónica:

$\vec{e}_1$ se transforma en $\vec{e}_2$

$\vec{e}_2$ se transforma en $-\vec{e}_1$

Por tanto: $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = -1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 \end{cases}$

Y la matriz respecto de la base canónica es: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Respecto a la base B , $F = P^{-1}AP$, con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, obteniendo: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

4.23

La coordenada canónica x se transforma así: $x' = -x$

La coordenada canónica y se transforma así: $y' = y$

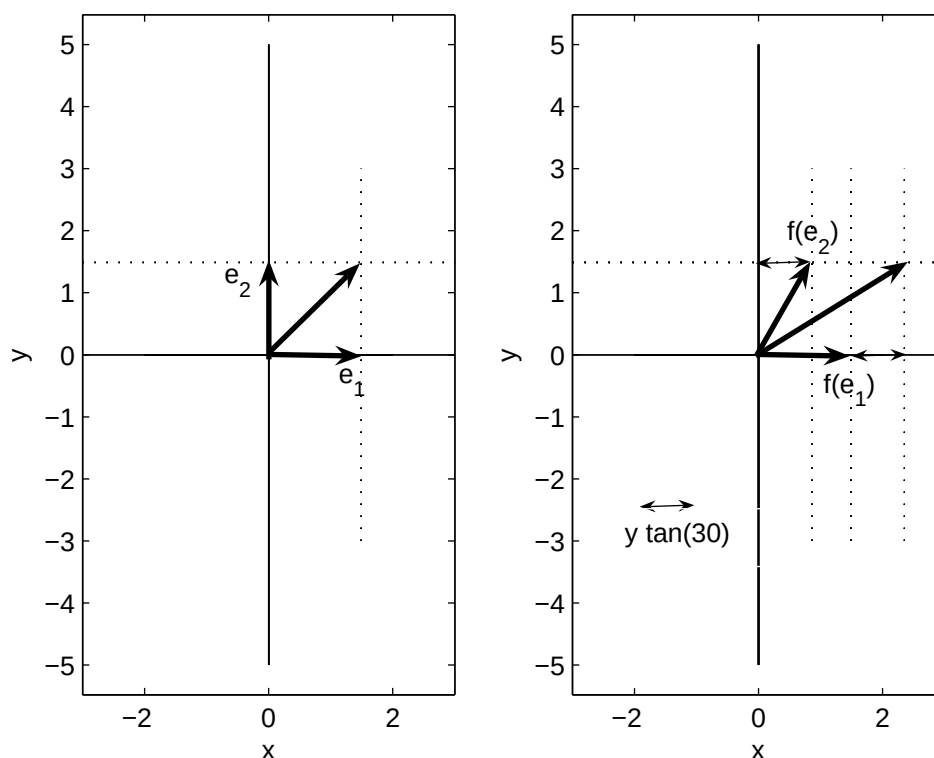
La coordenada canónica z se transforma así: $z' = z$

O expresado de otra forma: $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \end{cases}$

En base canónica $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En base B se obtiene: $F = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (la matriz es la misma).

4.24



$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = \tan(30)\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

La explicación es la siguiente: llamando l a la longitud de $f(\vec{e}_2)$, tendremos que la componente x de $f(\vec{e}_2)$ es $l \operatorname{sen}(30)$ y que la componente y es $l \operatorname{cos}(30)$, que por otra parte es igual a 1, porque $\vec{e}_2$ y $f(\vec{e}_2)$ tienen la misma componente y . Por tanto:

$$f(\vec{e}_2) = l \operatorname{sen}(30) \vec{e}_1 + 1 \vec{e}_2 = \frac{1}{\operatorname{cos}(30)} \operatorname{sen}(30) \vec{e}_1 + 1 \vec{e}_2 = \tan(30) \vec{e}_1 + 1 \vec{e}_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan(30) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan(30) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + y \tan(30) \\ y' = y \end{cases}$$

4.25

$$\text{a) } \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = x + \tan(30)z \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tan(30) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

4.26

El subespacio H tiene dimensión 2, pues tenemos una ecuación implícita.

Una base es $B = \{(0, 1, 2), (1, 0, 0)\}$, por tanto $H = \langle (0, 1, 2), (1, 0, 0) \rangle$

Un vector genérico de H tendrá la forma $\alpha (0, 1, 2) + \beta (1, 0, 0)$, siendo α y β parámetros.

Un vector genérico de $f(H)$ tendrá la forma $\alpha f(0, 1, 2) + \beta f(1, 0, 0)$, siendo α y β parámetros, o lo que es lo mismo, $\alpha A.(0, 1, 2) + \beta A.(1, 0, 0)$, siendo α y β parámetros.

Desarrollando cada producto matriz-vector obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, un vector genérico de $f(H)$ tendrá la forma $\alpha (8, 8, 3) + \beta (1, 0, 0)$, siendo α y β parámetros. $f(H) = \langle (8, 8, 3), (1, 0, 0) \rangle$.

4.28

- a) La transformación geométrica actúa sobre los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ de la forma siguiente:

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$$

$$f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2$$

Que también podemos escribir como $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 1\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = 0\vec{u}_1 - 1\vec{u}_2 \end{cases}$

Por tanto la matriz de la aplicación lineal respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Resolviendo el sistema de matriz ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right]$, obtenemos las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B , que son $c_1 = 19/13$ y $c_2 = 9/13$.

$$\text{La imagen es } [\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19/13 \\ 9/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/13 \\ -9/13 \end{bmatrix}$$

$$\text{Respecto de la base canónica: } \vec{y} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19/13 \\ -9/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86/13 \\ 11/13 \end{bmatrix}$$

- b) Para pasar a la matriz respecto de la base canónica se utilizan las relaciones siguientes:

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

$$M[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$$

$P[\vec{x}]_B = \vec{x}$ siendo P la matriz cuadrada e inversible que tiene por columnas los vectores de la base B , por tanto:

$$AP[\vec{x}]_B = P[\vec{y}]_B \Rightarrow P^{-1}AP[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \Rightarrow P^{-1}AP = M \Rightarrow$$

$$A = PMP^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y a partir de } P \text{ obtenemos } P^{-1} = 1/13 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (1/13) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 1/13 \begin{bmatrix} 17 & -10 \\ 12 & -17 \end{bmatrix}$$

- c) $A\vec{x} = 1/13 \begin{bmatrix} 17 & -10 \\ 12 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = 1/13 \begin{bmatrix} 86 \\ 11 \end{bmatrix}$

4.33

La matriz de la aplicación lineal es la siguiente: $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Espacio inicial} - \text{rg } A = 4 - \text{rg } A$. El rango de A es como máximo 3, por tanto $\dim \text{Ker } F$ es como mínimo 1, por tanto no nula. Al ser $\dim \text{Ker } F$ distinta de cero la aplicación no es inyectiva, independientemente del valor de a .

b) Mediante eliminación gaussiana obtenemos el rango A

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rango de A es 3 independientemente del valor de a . $\dim \text{Im } f = \text{rg } A = 3 = \dim \text{Espacio Final}$, por tanto f sobreyectiva.

c) Resolvemos el sistema lineal de matriz ampliada $A^* = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$

Como la última columna son todos ceros la eliminación gaussiana de A^* produce una matriz similar a la del apartado b), con una columna final con todos ceros.

$$A^* = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Denotando las incógnitas como x_1, x_2, x_3 y x_4 , y tomando x_3 como parámetro obtenemos:

$$x_4 = -a^2 x_3$$

$$x_2 = a^2 x_3$$

$$x_1 = -a x_3$$

Por tanto la expresión vectorial de la solución es:

$$\begin{cases} x_1 = -a x_3 \\ x_2 = a^2 x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -a^2 x_3 \end{cases} \quad \text{Ker } f = \langle (-a, a^2, 1, -a^2) \rangle$$

Para $a = 2$ $\text{Ker } f = \langle (-2, 4, 1, -4) \rangle$

d) $V = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$. Observamos que de las tres ecuaciones del subespacio una de ellas es dependiente de las otras dos, por tanto el número de ecuaciones implícitas independientes es de 2. x_2 y x_4 son parámetros libres.

$$f(V) = \langle f(0, 1, 0, 0), f(0, 0, 0, 1) \rangle$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(V) = \langle (1, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle$$

Ecuación implícita:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & y_1 \\ 0 & 0 & | & y_2 \\ 1 & 1 & | & y_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & y_1 \\ 0 & 0 & | & y_2 \\ 0 & 1 & | & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & y_1 \\ 0 & 1 & | & y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & | & y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow y_2 = 0$$

CAPÍTULO 5

Valores y vectores propios. Diagonalización

5.1 Endomorfismos

A las aplicaciones lineales también se les denomina homomorfismos. Un homomorfismo f con el mismo dominio y codominio, se denomina endomorfismo. Consideremos en este tema endomorfismos $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

5.2 Valores y vectores propios

Definición 5.1 Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es **valor propio o autovalor** del endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$, si existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Definición 5.2 Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ con autovalor λ . Los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $f\vec{x} = \lambda\vec{x}$ se llaman **vectores propios o autovectores** de f correspondientes al autovalor λ .

λ puede ser nulo

Si $\vec{x} = \vec{0} \quad \forall \lambda$ se cumple que $f(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$, por eso para aceptar λ como autovalor debe existir $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Ejemplo 5.1 Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, sobre $\mathbb{R}$, cuya matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$. Determina si los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2)$ son vectores propios de A .

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ es vector propio porque $A\vec{u} = 1\vec{u}$

$\vec{v}$ es vector propio porque $A\vec{v} = -2\vec{v}$

Ejemplo 5.2 Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, sobre $\mathbb{R}$, cuya matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Determina si los vectores $\vec{u} = (6, -5)$ y $\vec{v} = (3, -2)$ son vectores propios de A .

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ es vector propio porque $A\vec{u} = -4\vec{u}$

$\vec{v}$ no es vector propio porque no existe s tal que $A\vec{v} = s\vec{v}$, o lo que es lo mismo, $(-9, 11)$ no es múltiplo de $(3, -2)$.

Ejemplo 5.3 Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, sobre $\mathbb{R}$, cuya matriz asociada es la matriz identidad I_n . A dicho endomorfismo se le denomina endomorfismo identidad.

$$f(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

La aplicación tiene un único valor propio, que es 1. Todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ son autovectores correspondientes a ese autovalor.

Ejemplo 5.4 Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, sobre $\mathbb{R}$, cuya matriz asociada es la matriz λI_n con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\vec{x}) = \lambda I\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

La aplicación tiene un único valor propio, que es λ . Todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ son autovectores correspondientes a ese autovalor.

5.3 Obtención de los valores propios: polinomio característico

Teorema 5.1 Sea el endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, y A_n su matriz asociada respecto de la base estándar. λ es valor propio de $f \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I) < n$.

Demostración: λ valor propio si $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$, siendo I la matriz identidad de orden n , o lo que es lo mismo

$$\text{si } \exists \vec{x} \neq \vec{0} \text{ tal que } (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

Por tanto λ es valor propio $\Leftrightarrow$ el SL $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ es compatible indeterminado $\Leftrightarrow \text{rango}(A - \lambda I) < n \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$ ■

Desarrollemos $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

El primer miembro de esta ecuación representa un polinomio en λ de grado n , $p(\lambda)$, al que se denomina **polinomio característico de f o polinomio característico de la matriz A** . A la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ desarrollada o $p(\lambda) = 0$, se le llama **ecuación característica de la matriz A** .

De acuerdo con el **Teorema Fundamental del Álgebra**, todo polinomio de grado n con coeficientes reales tiene exactamente n raíces reales o complejas (contando multiplicidades).

El polinomio $(\lambda - 1)^5$ tiene 5 raíces, todas iguales a 1. El polinomio tiene raíz 1 con multiplicidad 5.

El polinomio $\lambda^2 + 1 = 0$ tiene dos raíces complejas, $+i$ y $-i$. (Las raíces complejas siempre forman pares conjugados).

El polinomio característico de A , $p(\lambda)$, tendrá n raíces. Las raíces reales de A son los valores propios del endomorfismo f . También se designan como valores propios de A . La **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i es igual a su **multiplicidad como raíz** del polinomio característico. Al limitarnos a endomorfismos en $\mathbb{R}^n$, las raíces complejas de $p(\lambda)$ no pueden considerarse como valores propios de A , ya que si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y λ complejo, $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ es un vector complejo, que no pertenece a $\mathbb{R}^n$.

- Por ejemplo si $p(\lambda)$ tiene m raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (incluyendo reales y complejas), podremos escribir:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} \quad r_i \text{ es la multiplicidad de } \lambda_i$$

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$$

- Si $p(\lambda)$ tiene todas las raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (incluyendo reales y complejas), podremos escribir:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Obtención de valores propios

- Se calcula $p(\lambda) = |A - \lambda I|$.
- Se hallan las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$. Las raíces reales son los valores propios.

Ejemplo 5.5 ¿Es 5 un valor propio de $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$?

5 es autovalor de $A \Leftrightarrow |A - 5I| = 0$

$$|A - 5I| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -30, \text{ por tanto 5 no es autovalor.}$$

Ejemplo 5.6 Encuentra los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

$$|A - sI| = \begin{vmatrix} 2-s & 3 \\ 3 & -6-s \end{vmatrix} = (2-s)(-6-s) - 9 = s^2 + 4s - 21$$

Los autovalores, que son las raíces del polinomio anterior, son $s = -7$ y $s = 3$.

Ejemplo 5.7 Encuentra la ecuación característica de $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = (5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

Ejemplo 5.8 El polinomio característico de una matriz 6×6 es $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$. Encuentra los valores propios y su multiplicidad.

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda - 12)\lambda^4$$

Tenemos la raíz $\lambda = 0$ con multiplicidad 4 y las raíces de $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. Éstas últimas son $\lambda = -2$ y $\lambda = 6$.

5.4 Subespacio propio

El conjunto de los vectores propios de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ correspondiente a un autovalor λ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, denotado como V_λ . En efecto:

- V_λ contiene el vector $\vec{0}$ pues $f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$.
- El producto por un escalar es cerrado, pues $\vec{x} \in V_\lambda \Rightarrow \alpha \vec{x} \in V_\lambda$
 $f(\alpha \vec{x}) = \lambda \alpha \vec{x}$, entonces $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) = \alpha \lambda \vec{x} = \lambda \alpha \vec{x}$, por tanto $\alpha \vec{x} \in V_\lambda$
- La suma es cerrada: $\vec{x}, \vec{x}' \in V_\lambda \Rightarrow \vec{x} + \vec{x}' \in V_\lambda$
 $f(\vec{x} + \vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}') = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{x}' = \lambda(\vec{x} + \vec{x}')$

Podemos identificar este subespacio con otro conocido. Sea A la matriz canónica asociada a f , entonces

$$V_\lambda = \{\vec{x} / A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} / (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

Definición 5.3 Sea f endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ con matriz canónica asociada A y sea λ_i un autovalor de f . Al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ $\text{Ker}(A - \lambda_i I) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}\}$ se le denomina **subespacio propio correspondiente al valor propio λ_i** . Se denota como V_{λ_i} .

Observación: Dentro de cada subespacio propio la suma es cerrada y el producto por un escalar también, y en consecuencia la combinación lineal de vectores propios es vector propio del mismo subespacio.

Teorema 5.2 Toda combinación lineal de autovectores de un valor propio λ de A es también autovector de ese valor propio.

Demostración: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad A\vec{x}' = \lambda\vec{x}'$

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}') = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{x}' = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{x}' = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}')$$

luego $\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}'$ es autovector de A correspondiente al autovalor λ . ■

5.5 Dimensión del subespacio propio

Considerando el endomorfismo $A - \lambda I : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker}(A - \lambda I) + \dim \text{Im}(A - \lambda I)$$

$$n = \dim V_\lambda + \text{rango}(A - \lambda I)$$

$$\dim V_\lambda = n - \text{rango}(A - \lambda I)$$

por ser λ autovalor, $\text{rango}(A - \lambda I) < n$

$$\Rightarrow \boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq n}$$

$\dim V_\lambda = n$ cuando $A - \lambda I$ sea la matriz nula, es decir, $A = \lambda I$. En este caso $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, y por tanto $V_\lambda = \mathbb{R}^n$

Teorema 5.3 $\dim V_\lambda$ es menor o igual que la multiplicidad del valor propio λ .

$$\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq r_\lambda \leq n}$$

Se define multiplicidad geométrica de un autovalor λ como la dimensión de V_λ .

5.6 Obtención de los subespacios propios

En primer lugar se calculan los valores propios:

- Se calcula $p(\lambda) = |A - \lambda I|$.
- Se hallan las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$. Las raíces reales son los valores propios.

A continuación:

- Se determina $V_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i I)$ para cada valor propio λ_i , que es lo mismo que determinar las soluciones de los sistemas homogéneos $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$.
- Se comprueba que $\dim V_{\lambda_i}$ esté dentro del rango permitido, es decir $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq r_i$, siendo r_i la multiplicidad algebraica de λ_i .

5.7 Los cuatro casos en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 5.9 Determinar los valores propios y subespacios propios correspondientes a los endomorfismos con matrices asociadas:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet |A - sI| = \begin{vmatrix} -2-s & -2 \\ -5 & 1-s \end{vmatrix} = (-2-s)(1-s) + 10 = s^2 + s - 12 \quad \text{raíces } 3, -4$$

– Para calcular V_3 hay que resolver el sistema $A\vec{x} = 3\vec{x}$, equivalente a $(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{solución: } 5x + 2y = 0 \Rightarrow V_3 = \langle (-2, 5) \rangle$$

– Para calcular V_{-4} hay que resolver el sistema $A\vec{x} = -4\vec{x}$, equivalente a $(A + 4I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{solución: } x = y \Rightarrow V_{-4} = \langle (1, 1) \rangle$$

OBSERVACION: El conjunto formado por un vector de V_3 y un vector de V_{-4} es linealmente independiente $\Rightarrow B = \{(-2, 5), (1, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios $\Rightarrow$ la matriz asociada al endomorfismo respecto de esa base es diagonal y $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

- $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal, por tanto sus valores propios son los elementos de la diagonal. $p(s) = (2-s)(2-s)$ raíz 2 doble

Para calcular V_2 hay que resolver el sistema $A\vec{x} = 2\vec{x}$, es decir

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = 2\vec{x}. \quad \text{La ecuación se verifica para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

En efecto en el sistema homogéneo $[A - 2I \mid 0]$ las dos ecuaciones se anulan, por tanto hay cero pivotes y dos parámetros libres.

OBSERVACION: Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ son vectores propios, por tanto cualquier base de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, es base de vectores propios. En cualquier base de $\mathbb{R}^2$ la matriz asociada al endomorfismo es $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, es una matriz triangular, por tanto sus valores propios son los elementos de la diagonal. $p(s) = (-3-s)(-3-s)$ raíz -3 doble

Para calcular V_{-3} hay que resolver el sistema $A\vec{x} = -3\vec{x}$, es decir $(A + 3I)\vec{x} = \vec{0}$.

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene como solución $y = 0$ (x parámetro libre). $V_{-3} = \langle (1, 0) \rangle$

- $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $p(s) = (1-s)(1-s) + 1 = s^2 - 2s + 2$ raíces los complejos conjugados, $1+i$, $1-i$. Por tanto no hay autovalores para el endomorfismo real.

	Raíces	Auto-valores	Multip. algebr.	Subespacios propios	Multip. geomét.	Base de autovect.
A	3	3	1	$V_3 = \langle (-2, 5) \rangle$	1	sí
	-4	-4	1	$V_{-4} = \langle (1, 1) \rangle$	1	
B	2 doble	2	2	$V_2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$	2	sí
C	-3 doble	-3	2	$V_{-3} = \langle (1, 0) \rangle$	1	no
D	$1+i$ $1-i$					no

5.8 Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 5.10 Considérese la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, sobre $\mathbb{R}$, cuya matriz asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que un valor propio de la aplicación es $\lambda = 2$, encuentra una base del subespacio propio correspondiente a este valor propio.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$V_2 = \text{Ker}(A - 2I)$, por tanto tengo que resolver el SL $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$, de matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones son los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ verificando $2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0$. Tomando x_2 y x_3 como parámetros libres, $V_2 = \langle \frac{x_2}{2} - 3x_3, x_2, x_3 \rangle$ con $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

V_2 tiene dimensión 2 y una posible base de V_2 es $B = \{(1, 2, 0), (-3, 0, 1)\}$

Ejemplo 5.11 Determinar los valores propios y subespacios propios correspondientes a los endomorfismos con matrices asociadas:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz igual a la del Ejemplo 5.10 y Ejercicio 5.11})$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz igual a la del Ejemplo 5.16})$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ (matriz igual a la del Ejemplo 5.17)}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

	<i>Raíces</i>	<i>Auto- valores</i>	<i>Multip. algebr.</i>	<i>Subespacios propios</i>	<i>Multip. geomét.</i>	<i>Existe base de R^3 formada por autovect.</i>
<i>A</i>	2 doble 9	2 9	2 1	$V_2 = \langle (-3, 0, 1), (1, 2, 0) \rangle$ $V_9 = \langle (1, 1, 1) \rangle$	2 1	sí
<i>B</i>	-2 doble 1	-2 1	2 1	$V_{-2} = \langle (-1, 1, 0) \rangle$ $V_1 = \langle (1, -1, 1) \rangle$	1 1	no
<i>C</i>	-2 0 5	-2 0 5	1 1 1	$V_2 = \langle (-58, -49, 14) \rangle$ $V_0 = \langle (8, 5, 0) \rangle$ $V_5 = \langle (1, 0, 0) \rangle$	1 1 1	sí
<i>D</i>	1 1-2i 1+2i	1	1	$V_1 = \langle (0, 0, 1) \rangle$	1	no

5.9 La independencia lineal de los subespacios propios

Teorema 5.4 Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ con $\vec{v}_i \neq 0$ para todo i son autovectores correspondientes a distintos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ de A , entonces el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ es linealmente independiente.

Demostración: Supongamos que el conjunto fuera linealmente dependiente, entonces existe un índice mínimo p tal que $\vec{v}_{p+1}$ es combinación lineal de los p anteriores, linealmente independientes, es decir,

$$\vec{v}_{p+1} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_p \vec{v}_p \quad \text{con } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \quad \text{l.i.} \quad [1]$$

multiplicando por la izquierda por A obtenemos:

$$\begin{aligned} A \vec{v}_{p+1} &= A c_1 \vec{v}_1 + A c_2 \vec{v}_2 + \dots + A c_p \vec{v}_p \\ \lambda_{p+1} \vec{v}_{p+1} &= \lambda_1 c_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 c_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p c_p \vec{v}_p \end{aligned} \quad [2]$$

multiplicamos la ecuación [1] por λ_{p+1} y obtenemos:

$$\lambda_{p+1} \vec{v}_{p+1} = \lambda_{p+1} c_1 \vec{v}_1 + \lambda_{p+1} c_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_{p+1} c_p \vec{v}_p \quad [3]$$

y de [3] - [2] se obtiene

$$0 = (\lambda_{p+1} - \lambda_1) c_1 \vec{v}_1 + (\lambda_{p+1} - \lambda_2) c_2 \vec{v}_2 + \dots + (\lambda_{p+1} - \lambda_p) c_p \vec{v}_p$$

y como el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente $\Rightarrow$

$$c_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1) = 0$$

$$c_2(\lambda_{p+1} - \lambda_2) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p) = 0$$

pero ninguno de los $(\lambda_i - \lambda_{p+1})$ es nulo, pues hemos supuesto que los λ_i son distintos

$$\Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

$\Rightarrow \vec{v}_{p+1} = \vec{0}$, lo cual es una contradicción, pues los autovectores $\vec{v}_i$ los hemos supuesto nulos.

$$\Rightarrow \text{el conjunto } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\} \text{ es linealmente independiente.} \quad \blacksquare$$

Teorema 5.5 La suma de subespacios propios es directa

En el Capítulo 3 veíamos que la suma de m subespacios $V_1, \dots, V_m$ es directa si y sólo si cualquier conjunto de m vectores tomando un vector no nulo de cada subespacio es linealmente independiente. En el Teorema anterior queda demostrado que los subespacios $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$ son linealmente independientes, y por tanto $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$

$$\boxed{V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} \subseteq \mathbb{R}^n}$$

5.10 Existencia o no de base de vectores propios

Teorema 5.6 *Existe base de vectores propios de un endomorfismo $\Leftrightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow p(\lambda)$ tiene n raíces reales contando multiplicidades y $\dim V_{\lambda_i} = r_i$*

La suma directa de los subespacios es igual a $\mathbb{R}^n$ si y sólo si
 $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_m} = n$

$$1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq r_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow m \leq \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_m} \leq r_1 + r_2 + \dots + r_m \leq n$$

Para obtener la dimensión máxima igual a n se debe cumplir $\dim V_{\lambda_i} = r_i \quad i = 1, \dots, m$ y $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$

Base de vectores propios de $\mathbb{R}^n$:

$B = \{ \vec{v}_1^1, \dots, \vec{v}_{r_1}^1, \vec{v}_1^2, \dots, \vec{v}_{r_2}^2, \dots, \vec{v}_1^m, \dots, \vec{v}_{r_m}^m \} = B_1 \cup B_2 \dots \cup B_m$, siendo B_i la base de V_{λ_i} , y siendo el número de vectores de $B_i = r_i$.

Matriz asociada a la base de vectores propios

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \lambda_m & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$\leftarrow \quad r_1 \quad \rightarrow \qquad \qquad \qquad \leftarrow \quad r_m \quad \rightarrow$

Teorema 5.7 *Si la matriz A_n asociada a un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ tiene n valores propios distintos, entonces en $\mathbb{R}^n$ se puede obtener una base cuyos vectores sean todos autovectores de f .*

Si el grado del polinomio característico es n y se tienen n autovalores distintos, significa que las multiplicidades son todas igual a uno. Por tanto los n V_{λ_i} tienen dimensión 1. La dimensión de la suma directa será $n \times 1 = n$, por tanto existe base de autovectores.

Ejemplo 5.12 *Determinar, si existe, una base de vectores propios para el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada A respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

En caso de que exista dicha base, calcular la matriz asociada al endomorfismo respecto a ella.

$$\begin{vmatrix} 1-s & 3 & 3 \\ -3 & -5-s & -3 \\ 3 & 3 & 1-s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-s & -2-s & 0 \\ -3 & -5-s & -3 \\ 0 & -2-s & -2-s \end{vmatrix} =$$

$$(-2-s)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -5-s & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2-s)^2 ((-5-s) + 3 + 3) = (-s-2)^2 (1-s)$$

Los valores propios son $s = 1$ y $s = -2$ con multiplicidad 2.

Para obtener V_1 hay que resolver el SL homogéneo de matriz de coeficientes $A - I$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones que obtenemos son:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$y = -z$$

$$x = -2y - z = 2z - z = z$$

$V_1 = \{(z, -z, z)/z \in \mathbb{R}\}$. V_1 tiene dimensión 1, y una base de V_1 la formarían $\vec{b}_1 = (1, -1, 1)$

Para obtener V_{-2} hay que resolver el SL homogéneo de matriz de coeficientes $A + 2I$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación que obtenemos es: $x + y + z = 0$

$$x = -y - z$$

$V_{-2} = \{(-y - z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}$. V_{-2} tiene dimensión 2, y una base de V_2 la formarían $\vec{b}_2 = (-1, 1, 0)$ y $\vec{b}_3 = (-1, 0, 1)$.

$\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$ son l.i. entre sí, y $\vec{b}_1$ es l.i. con ambos, por corresponder a otro valor propio, por tanto $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ forman una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$.

Obtengamos a continuación la matriz de la aplicación lineal en la base B :

$$\vec{x} = P_B [\vec{x}]_B \quad \vec{y} = P_B [\vec{y}]_B \quad \text{con } P_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow A P_B [\vec{x}]_B = P_B [\vec{y}]_B \Rightarrow P_B^{-1} A P_B [\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$$

La matriz asociada respecto a la base B de vectores propios es $R = P_B^{-1} A P_B$

$$R = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{La aplicación lineal } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{y} \text{ es}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} [\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \text{ en la base } B \text{ de vectores propios.}$$

Si nos fijamos en el resultado observamos que la matriz asociada a la base de vectores propios es muy simple, ya que es diagonal, y además tiene como elementos los valores propios, situados en el mismo orden que sus correspondientes autovectores en la base. Esta propiedad es un resultado general.

5.11 Propiedades de autovalores y autovectores

Teorema 5.8 *Los valores propios de una matriz triangular son los valores de la diagonal principal.*

Demostración: Se demuestra para una matriz triangular superior y $n = 3$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

El escalar λ es un autovalor $\iff |A - \lambda I| = 0$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)$$

Las raíces de $p(\lambda)$ son a_{11}, a_{22}, a_{33}

Se obtiene el mismo resultado para una matriz triangular inferior. ■

Teorema 5.9 *Si λ es autovalor de A con autovector asociado $\vec{x}$, entonces λ^k ($k = 2, 3, \dots$) es autovalor de A^k con el mismo autovector asociado $\vec{x}$.*

Demostración: $A^k \vec{x} = \overbrace{A \dots A}^{k \text{ veces}} \vec{x} = \lambda^k \vec{x}$ ■

Teorema 5.10 A_n es inversible $\iff$ el escalar 0 no es autovalor de A .

Demostración: A es inversible $\iff |A| \neq 0 \iff |A - 0I| \neq 0 \iff 0$ no es autovalor de A ■

Teorema 5.11 *Si A es inversible y λ autovalor de A con autovector asociado $\vec{x}$, entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1} con autovector asociado también $\vec{x}$.*

Demostración: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, A inversible $\implies \exists A^{-1}$ y $\lambda \neq 0$

Multiplicando por A^{-1} por la izquierda, $A^{-1}A\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$

$$\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \quad \lambda^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$$

■

Teorema 5.12 A y A^t tienen los mismos autovalores

Demostración: $I^t = I \implies |A^t - \lambda I| = |A^t - \lambda I^t| = |(A - \lambda I)^t| = |A - \lambda I|$

$|A^t - \lambda I| = |A - \lambda I| \implies A$ y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores y con la misma multiplicidad. ■

Ejemplo 5.13 *Determina los valores propios de las matrices A y B .*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Son matrices triangulares, y por tanto sus autovalores son los elementos de la diagonal. Los autovalores de A son 3, 0, 6 y los autovalores de B 4 (multiplicidad 2) y 1.

RECORDAMOS:

Dadas dos matrices A_n y F_n se dice que A es **semejante** a F si $\exists P$ inversible tal que $A = PFP^{-1}$.

Dos matrices A_n y F_n semejantes corresponden a la misma aplicación lineal en distintas bases, con tal de que en ambos casos se utilice una misma base en el espacio inicial y final.

Teorema 5.13 Si dos matrices A_n y F_n son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores, con las mismas multiplicidades.

Demostración: A y F semejantes $\implies \exists P / A = PFP^{-1}$

$$A - \lambda I = PFP^{-1} - \lambda I = PFP^{-1} - P\lambda IP^{-1} = P(F - \lambda I)P^{-1}$$

$$|A - \lambda I| = |P||F - \lambda I||P^{-1}| = |F - \lambda I|$$

$$|A - \lambda I| = |F - \lambda I| \quad \blacksquare$$

Nota importante: Equivalencia por filas no es lo mismo que semejanza. Generalmente las operaciones elementales por filas sobre una matriz cambian sus valores propios. Esto es, si $U = E_1 \dots E_p A$ U no tiene por qué tener los mismos autovalores que A .

Si $U = E_1 \dots E_p A$, representando las E_i operaciones elementales de reemplazamiento (ni permutación ni escalamiento), $|A| = |U|$, pero los polinomios característicos $|A - \lambda I|$ y $|U - \lambda I|$ no tienen porque ser iguales.

Ejemplo 5.14 Calcula el polinomio característico y raíces de A y de una matriz equivalente por filas a A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Habíamos calculado el polinomio característico de A en un ejercicio anterior, y éste era $p(s) = s^2 + 4s - 21$, con raíces $s = -7$ y $s = 3$.

Puesto que A es inversible, $|A| = -21$, A es equivalente por filas a I_2 . El polinomio característico de I_2 es $p(s) = (1 - s)^2$ y la raíz es $s = 1$ con multiplicidad 2.

5.12 Diagonalización

RECORDAMOS:

Se dice que A_n es **diagonalizable** si A es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existen una matriz inversible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.

Diagonalizar una matriz A diagonalizable es encontrar las matrices P inversible y D diagonal tales que $A = P D P^{-1}$

Teorema 5.14 Teorema de la diagonalización. Una matriz A_n es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes, es decir, si y sólo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A . Llamamos a esta base **base de vectores propios**. En efecto, en la ecuación $A = PDP^{-1}$ con P inversible y D diagonal, las columnas de P son n vectores propios de A linealmente independientes, y las entradas de D son los valores propios correspondientes y en el mismo orden.

Demostración:

$\Rightarrow$

Suponemos que A es diagonalizable y demostramos que tiene n vectores propios linealmente independientes.

$$A = PDP^{-1} \implies AP = PD \quad (\text{multiplicando por } P \text{ a la derecha})$$

$$\text{Sea } P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]; \quad AP = A[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n] = [A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \dots \ A\vec{v}_n]$$

D es una matriz diagonal de orden n , cuyos elementos designamos como $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$PD = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} & \dots & \lambda_n v_{1n} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} & \dots & \lambda_n v_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 v_{n1} & \lambda_2 v_{n2} & \dots & \lambda_n v_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$[\lambda_1 \vec{v}_1 \quad \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \vec{v}_n]$$

$$AP = PD \Rightarrow (\text{igualando columnas}) \begin{cases} A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \\ \dots\dots\dots \\ A\vec{v}_n = \lambda_n \vec{v}_n \end{cases}$$

Como P es inversible los $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes, y por tanto ninguno es nulo, y como además $A\vec{v}_i = \lambda \vec{v}_i$, los $\vec{v}_i$ son vectores propios de A y sus correspondientes valores propios los elementos λ_i de la matriz diagonal D . Por tanto hemos demostrado que tenemos n vectores propios l.i. que son las columnas de P , y que los autovalores correspondientes son las entradas de la diagonal de D , en el mismo orden.

$\Leftarrow$

Suponemos que $\exists$ la base de n vectores propios linealmente independientes y tenemos que demostrar que A es diagonalizable.

Construimos a partir de esos vectores, y colocándolos por columnas, una matriz que denominamos P . Es decir, $P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n]$

P es inversible, pues $|P| \neq 0$ por ser las columnas de P linealmente independientes.

Construimos una matriz diagonal D cuyos elementos en la diagonal sean los autovalores correspondientes a los autovectores anteriores, en ese mismo orden. Por ser $\vec{v}_i$ el autovector correspondiente a λ_i se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \\ \dots\dots\dots \\ A\vec{v}_n = \lambda_n \vec{v}_n \end{cases}$$

En este sistema de ecuaciones, el primer miembro corresponde a una columna de la matriz AP y el segundo a la misma columna de la matriz PD . Tenemos una ecuación para cada una de las n columnas, por tanto $AP = PD$. P es inversible, y multiplicando por la derecha por P^{-1} tenemos que $A = PDP^{-1}$, por tanto A es diagonalizable.

(Nótese que en ningún momento de la demostración se ha impuesto que los λ_i tengan que ser distintos).

■

Teorema 5.15 *Una matriz A_n con n valores propios distintos es diagonalizable.*

Demostración: En un teorema anterior se demostraba que si A_n tenía n valores propios distintos existía una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A . Aplicando el Teorema de la Diagonalización, que establece que A es diagonalizable si y sólo si $\mathbb{R}^n$ admite una base de autovectores de A , queda demostrado el presente teorema.

■

RESUMEN

Dada A_n existen P inversible y D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$ si y sólo si A tiene n valores propios reales (incluidas multiplicidades) y $\dim V_{\lambda_i}$ es igual a la multiplicidad algebraica de λ_i . Los elementos de D son los autovalores. Las columnas de P son los vectores de una base de vectores propios de A , con los vectores ordenados en P igual que sus autovalores están ordenados en D . La matriz D no es más que la matriz de la aplicación lineal respecto a la base de vectores propios dada en P . La matriz de la aplicación lineal en la base canónica es A . La base de vectores propios se construye como la unión de las bases de los subespacios propios, cada uno de éstos teniendo su dimensión igual a la multiplicidad del autovalor como raíz.

Expresemos en fórmulas algunos resultados que se verifican para una matriz A diagonalizable:

1. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$, con λ_i raíces reales y $\sum_{i=1}^m r_i = n$
2. $\dim V_{\lambda_i} = r_i$
3. $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_m} = n$
4. Existe base B de vectores propios y $B = B_1 \cup B_2 \dots \cup B_m$, siendo B_i la base de V_{λ_i} , y siendo el número de vectores de $B_i = r_i$. $A = PDP^{-1}$ (columnas de P tomadas de B , y elementos de D los autovalores correspondientes). El endomorfismo que tiene A como matriz estándar se expresa mediante la matriz diagonal D en la base B de autovectores de A .

Esquema para las aplicaciones lineales A y D :

$$\begin{array}{ccc}
 f: & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\
 & \vec{x} & \xrightarrow{\quad A \quad} & \vec{y} \\
 P^{-1} \downarrow & & & \uparrow P \\
 & [\vec{x}]_B & \xrightarrow{\quad D \quad} & [\vec{y}]_B
 \end{array}
 \qquad A = P D P^{-1}$$

B : base de autovectores

elementos de D : autovalores en el mismo orden

Ejemplo 5.15 Diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ si es posible.

En el Ejemplo 5.12 encontramos una base de vectores propios para esta matriz. Las matrices $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ verifican $A = PDP^{-1}$, o lo que es lo mismo, $AP = PD$.

En vez de comprobar $A = PDP^{-1}$, que requiere del cálculo de P^{-1} , se puede comprobar, más fácilmente, que $AP = PD$

En esta matriz A se cumple efectivamente la existencia de base de vectores propios.

$\dim V_{-2} = 2$, Base de $V_{-2} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

$\dim V_1 = 1$, Base de $V_1 = \{(1, -1, 1)\}$

$V_1 \oplus V_{-2} = \mathbb{R}^3$

Base de vectores propios: $B = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

Ejemplo 5.16 Diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ si es posible.

1) Se buscan los valores propios:

$$\begin{aligned} |A-sI| &= \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ -4 & -6-s & -3 \\ 3 & 3 & 1-s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ -2-s & -2-s & 0 \\ 3 & 3 & 1-s \end{vmatrix} = (-2-s) \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1-s \end{vmatrix} = \\ & (-2-s) \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s \end{vmatrix} = (-2-s)(1-s) \begin{vmatrix} 2-s & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2-s)(1-s)((2-s)-4) = \\ & (-2-s)(1-s)(-2-s) = (-2-s)^2(1-s) \end{aligned}$$

Los valores propios son $s = -2$ doble y $s = 1$ simple.

2) Tenemos dos autovalores reales y la suma de las multiplicidades es 3. Sabemos que $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq r_i$ y que la matriz A será diagonalizable si $\dim V_{\lambda_i} = r_i$. Para el valor propio simple siempre se cumple, pues si $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq 1 \Rightarrow \dim V_{\lambda_i} = 1$. Para el valor propio doble sólo sabemos que $1 \leq \dim V_{-2} \leq 2$, si $\dim V_{-2} = 2$ A es diagonalizable y si $\dim V_{-2} = 1$ no lo es.

$$[A+2I \mid \vec{0}] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim V_{-2} = 3 - \text{rango}(A - I) = 3 - 2 = 1$ (sólo hay un parámetro libre). La dimensión de V_{-2} es menor que la multiplicidad del valor propio -2 , por tanto la matriz A no es diagonalizable.

Ejemplo 5.17 Determinar si la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal, por tanto los autovalores de A son 5, 0 y -2 . Como los tres son distintos, la matriz es diagonalizable.

Ejemplo 5.18 Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, sobre $\mathbb{R}$, cuya matriz asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentra una base B de $\mathbb{R}^2$ de forma que la matriz asociada a f en esa base sea una matriz diagonal.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 &= 7 - 7\lambda - \lambda + \lambda^2 + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

Los valores propios son $\lambda = 5$ y $\lambda = 3$. Como son distintos está garantizado que la matriz es diagonalizable

Vectores propios para $\lambda = 5$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = -x_2$$

$$V_5 = \{(-x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1) \rangle \quad \vec{b}_1 = (1, -1)$$

Vectores propios para $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = -(1/2)x_2 \text{ o lo que es lo mismo } 2x_1 = -x_2$$

$$V_3 = \langle (1, -2) \rangle \quad \vec{b}_2 = (1, -2)$$

En la base $B = \{(-1, 1), (1, -2)\}$ la matriz asociada al endomorfismo f es la matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP \quad \text{con} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Compruébese que $AP = PD$.

5.13 Aplicación de la diagonalización para obtener la potencia de una matriz

Ejemplo 5.19 Diagonaliza la matriz A y aprovecha el resultado para simplificar el cálculo de $A^5 \vec{x}$ con $\vec{x} = (6, 17, 5)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En primer lugar calculamos los autovalores

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) + 2 + 2 - (3 - \lambda) - 2(2 - \lambda) - 2(2 - \lambda)$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

Polinomio de grado 3 que resolvemos por Ruffini:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{rrrr} 1 & -7 & 11 & -5 \\ 1) & & 1 & -6 & 5 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 \\ 1) & & 1 & -5 \\ \hline & 1 & -5 & 0 \\ 5) & & 5 \\ \hline & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$$

Los autovalores son $\lambda = 1$ (multiplicidad 2) y $\lambda = 5$ (multiplicidad 1)

Se calculan V_1 y V_5 . Obtenemos que $\dim V_1 = 2$ y $\dim V_5 = 1$, por tanto la matriz es diagonalizable. $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, con $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, -1)$ y $\vec{v}_3 = (1, -1, 0)$ es una base de vectores propios de A y las matrices P y D correspondientes son:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } D = P^{-1}AP$$

(Compruébese que $AP = PD$)

Podemos calcular $A^5\vec{x}$ por varios métodos.

Método 1

$\vec{y} = A^5\vec{x}$ (Hay que obtener la potencia quinta de una matriz 3×3 que no tiene ningún elemento nulo, por tanto tendríamos que hacer muchísimas operaciones)

Método 2: Obteniendo la imagen en la base de vectores propios.

$D^5[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ (D^5 es la matriz diagonal 3×3 que tiene por entradas los elementos de D elevados a la quinta potencia. En efecto se puede comprobar que en una matriz diagonal la potencia k de la matriz es igual a elevar los elementos de la matriz a la potencia k).

- Para obtener $[\vec{x}]_B$ efectuamos: $[\vec{x}]_B = P^{-1}\vec{x}$ o resolvemos el SL de matriz ampliada $[P \mid \vec{x}]$.
- $D^5[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$
- Para obtener $\vec{y}$ efectuamos: $\vec{y} = P [\vec{y}]_B$

$\vec{x} = (6, 17, 5)$ tiene por coordenadas respecto de la base B :

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21875 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = [\vec{y}]_B$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21875 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21874 \\ 43753 \\ 21873 \end{bmatrix}$$

Método 3

$$\vec{y} = A^5\vec{x} = (PDP^{-1})^5\vec{x} = PD^5P^{-1}\vec{x}$$

Nótese como las operaciones de los métodos 2 y 3 son las mismas.

Método 4 Utilizando únicamente notación vectorial y el hecho de que si $\vec{v}_i$ es autovector con autovalor asociado λ_i , $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ y $A^k\vec{v}_i = \lambda_i^k\vec{v}_i$

$$A^5\vec{x} = A^5(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3) = c_1A^5\vec{v}_1 + c_2A^5\vec{v}_2 + c_3A^5\vec{v}_3 =$$

$$c_15^5\vec{v}_1 + c_21^5\vec{v}_2 + c_31^5\vec{v}_3 = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21874 \\ 43753 \\ 21873 \end{bmatrix}$$

Este método ha precisado de la obtención de las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base de vectores propios. Es el método más sencillo y que mejor ilustra, en mi opinión, los conceptos de autovector y autovalor.

5.14 Valores propios complejos

La teoría del endomorfismo desarrollada hasta ahora en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ puede aplicarse también en el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$. Podemos decir entonces que $\lambda \in \mathbb{C}$ es **valor propio o autovalor** del endomorfismo f en $\mathbb{C}^n$, si $\exists \vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, tal que $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. A los vectores $\vec{x}$ tales que $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ se les denomina **vectores propios o autovectores** de f asociados al autovalor λ .

El estudiar los endomorfismos en $\mathbb{C}^n$ nos permite poder considerar los autovalores y autovectores complejos asociados a la matriz A del endomorfismo, incluso para el caso de matrices A reales. Se puede demostrar por ejemplo que la matriz real $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tiene los dos autovalores complejos, $\lambda = a + bi$ y $\lambda = a - bi$, siendo sus correspondientes subespacios propios $\langle (1, -i) \rangle$ y $\langle (1, i) \rangle$.

Definición 5.4 Se dice que una matriz A es real si sus elementos son reales.

Teorema 5.16 Sea A_n una matriz real con autovector $\vec{x}$ y valor propio correspondiente λ . Entonces $\overline{\vec{x}}$ es también autovector y $\overline{\lambda}$ es el autovalor correspondiente.

Demostración: Se puede probar trivialmente que $\overline{\lambda \vec{x}} = \overline{\lambda} \overline{\vec{x}}$, $\overline{A \vec{x}} = \overline{A} \overline{\vec{x}}$ y que si $\vec{x} \neq 0$, $\overline{\vec{x}} \neq 0$

$$\overline{A \vec{x}} = \overline{A} \overline{\vec{x}}$$

$$\overline{A \vec{x}} = \overline{\lambda \vec{x}} = \overline{\lambda} \overline{\vec{x}},$$

por tanto $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ ($A = \overline{A}$ por ser A real)

y $\overline{\vec{x}}$ es autovector, siendo $\overline{\lambda}$ el autovalor asociado. ■

Teorema 5.17 Si A_n es real y simétrica, todas las raíces de su ecuación característica son reales, es decir, todos los valores propios de A son reales.

Demostración: Sea $\vec{x} \neq 0$ / $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ [1a] admitiendo que $\vec{x}$ pueda ser un vector complejo y que λ pueda ser un escalar complejo. Tomando traspuestas en ambos miembros:

$$(A \vec{x})^t = \vec{x}^t A^t = \lambda \vec{x}^t \Rightarrow \vec{x}^t A = \lambda \vec{x}^t \quad (\text{por ser } A \text{ simétrica } A = A^t)$$

tomando ahora conjugados de la última igualdad

$$\overline{\vec{x}^t A} = \overline{\vec{x}^t} \overline{A} = \overline{\lambda} \overline{\vec{x}^t} \quad (A = \overline{A} \text{ por ser } A \text{ real})$$

$$\text{multiplicando por } \vec{x} \text{ por la derecha: } \overline{\vec{x}^t} A \vec{x} = \overline{\lambda} \overline{\vec{x}^t} \vec{x} \quad [2]$$

Por otra parte, $\overline{\vec{x}^t} A \vec{x} = \overline{\vec{x}^t} \lambda \vec{x}$ [1b] sin más que multiplicar la ecuación $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ por $\overline{\vec{x}^t}$ por la izquierda

$$[2] - [1b] \Rightarrow (\overline{\lambda} - \lambda) \overline{\vec{x}^t} \vec{x} = 0 \text{ y como } \overline{\vec{x}^t} \vec{x} \neq 0, \quad \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\overline{\vec{x}^t} \vec{x} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$$

$$|x_i|^2 = (\text{Re}(x_i))^2 + (\text{Im}(x_i))^2, \text{ por tanto } \overline{\vec{x}^t} \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad \blacksquare$$

Teorema 5.18 Sea A_n una matriz que sólo tenga valores propios reales. Entonces existe una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior T / $A = Q T Q^t$

Recordemos que una matriz ortogonal es inversible, de hecho $Q^{-1} = Q^t$, por tanto la factorización $A = Q T Q^t$ significa que A y T son semejantes, y por tanto tienen los mismos autovalores. Por ser T triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal principal, por tanto los elementos de la diagonal de T son los autovalores de A .

Teorema 5.19 Sea A_n real

A simétrica $\Leftrightarrow \exists Q$ ortogonal y D diagonal / $A = Q D Q^t$. Expresado de otra forma, una matriz real es simétrica si y sólo si es ortogonalmente diagonalizable.

Demostración:

$\Rightarrow$

A real simétrica $\Rightarrow$ tiene todos los autovalores reales $\Rightarrow \exists Q$ ortogonal y T triangular superior / $A = Q T Q^t$.

Despejamos T en la ecuación anterior (multiplicando por la izda por Q^t y por la derecha por Q pues $Q^{-1} = Q^t$) y obtenemos:

$$T = Q^t A Q$$

tomando traspuestas:

$$T^t = Q^t A^t Q = Q^t A Q \text{ por ser } A \text{ real}$$

Comparando las dos igualdades tenemos que $T = T^t$. Dada T triangular, $T = T^t \Leftrightarrow T$ es diagonal, por tanto $A = Q D Q^t$ con D diagonal.

$$T = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + \end{pmatrix} \quad T^t = \begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 \\ + & + & 0 & 0 \\ + & + & + & 0 \\ + & + & + & + \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$

$$A = Q D Q^t$$

tomando traspuestas

$$A^t = Q D Q^t \quad (\text{la traspuesta de una matriz diagonal es la propia matriz})$$

por tanto $A = A^t$, es decir, A es simétrica. ■

5.15 Ejercicios

Ejercicio 5.1 Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. En caso afirmativo encontrar una matriz P , tal que $A = PDP^{-1}$ con D diagonal. Comprueba el resultado anterior, demostrando que $AP=PD$ u obteniendo P^{-1} y verificando que el producto $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.2 Una aplicación lineal f admite como vectores propios $(-1, 2, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, -1, 2)$. ¿Es diagonalizable?. Hallar las coordenadas de $\vec{u} = (5, 2, 5)$ en la base de vectores propios. Sabiendo que $f(\vec{u}) = (0, 0, 9)$, hallar los valores propios de f .

Ejercicio 5.3 Obtén las coordenadas del vector $\vec{z} = (5, 4, -9) \in \mathbb{R}^3$ en la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, con $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (3, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 3)$.

Sabiendo que los tres vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son vectores propios del endomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, con valores propios correspondientes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.02$ y $\lambda_3 = 0.01$, respectivamente, calcula $g(\vec{z})$, $g(g(\vec{z}))$ y $g(g(g(\vec{z})))$. Al actuar el endomorfismo g sucesivas veces sobre $\vec{z}$, ¿tienden los vectores resultantes a alguna dirección concreta?.

Ejercicio 5.4 De la matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ \beta & 4 & 0 \\ \gamma & 10 & -1 \end{bmatrix}$ se sabe que $\lambda_1 = 2$ es uno de sus valores propios y que $(1, -2, -3)$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ_1 .

- 1) Hallar los valores α , β y γ .
- 2) Hallar los valores propios y vectores propios de A .
- 3) Hallar, si existe, una base de vectores propios de A .
- 4) Diagonalizar la matriz A , si es posible.

Ejercicio 5.5 Se considera una aplicación lineal definida de la siguiente manera:

* Su núcleo es el subespacio cuyas ecuaciones son $x + y + z = 0$, $t = 0$.

* Los vectores $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ se transforman en sí mismos.

Hallar:

- a) La matriz de la aplicación en la base canónica.
- b) La imagen del subespacio cuyas ecuaciones son $x + y + z = 0$, $t = 0$, $x - y + 2t = 0$.

Ejercicio 5.6 Determina el valor o los valores de c , si existe alguno, para que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

sea diagonalizable, razonando el procedimiento y obteniendo en caso afirmativo las matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$.

Ejercicio 5.7 Dada $T = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, hallar los valores de α y β para que T sea diagonalizable.

Ejercicio 5.8 a) Encuentra los autovalores del endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Determina una base B de vectores propios de A y la matriz asociada a f respecto de la base B

c) Demuestra que la transformación f deja una recta fija y obtén la ecuación implícita de esa recta.

(Este endomorfismo es el mismo que el del Ejercicio 4.21)

Ejercicio 5.9 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y el vector $\vec{x} = \{7, 0, 5\}$, sin calcular A^4 , calcula el vector $\vec{y} = A^4 \vec{x}$ (A , $\vec{x}$ e $\vec{y}$ referidos a la base canónica. Pista: $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^4 = PD^4P^{-1}$). (Ejercicio del mismo tipo que el Ejemplo 5.19).

Ejercicio 5.10 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ y el vector $\vec{v} = (3, 6)$, obtén $A^6 \vec{v}$. Para simplificar las operaciones realiza los siguientes pasos, si es posible.

- encuentra base de vectores propios de A
- escribe $\vec{v}$ en la base de vectores propios
- obtén la imagen de $\vec{v}$ utilizando la matriz definida respecto a la base de vectores propios, pues ésta es diagonal y D^6 se obtiene sin más que elevar a la sexta potencia los elementos de la diagonal
- transforma la imagen a la base canónica, pues el resultado anterior está en la base de vectores propios.

Ejercicio 5.11 Considere la aplicación lineal g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz estándar asociada es:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

a) En caso de que exista algún vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea el propio vector, escriba las coordenadas de dicho vector.

b) En caso de que exista alguna recta $s \in \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea la propia recta s (no hay que exigir que cada punto de s permanezca fijo, sólo que permanezca en la recta) escriba la ecuación vectorial paramétrica de la recta.

c) Si existe algún plano $\pi \in \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea el propio plano (no hay que exigir que cada punto de π permanezca fijo, sólo que permanezca en el plano), escriba la ecuación implícita de dicho plano.

OBSERVACIÓN: Aunque exista más de un ejemplo de vector, recta o plano que permanezcan invariantes sólo hay que dar un ejemplo.

(Este ejercicio tiene similitud con un problema del examen final de septiembre del curso 05-06).

Ejercicio 5.12 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, describe la transformación geométrica

correspondiente, contestando a las siguientes preguntas:

¿ Deja vector/es fijo/s?. En caso afirmativo di cual/cuales.

¿ Deja algún plano/s fijo/s?. En caso afirmativo da su ecuación/es implícita/s.

¿ Deja alguna recta/s fija/s?. En caso afirmativo da su ecuación/es paramétrica/s.
(Este ejercicio tiene similitud con un problema del examen final de febrero del curso 05-06).

Ejercicio 5.13 Sea $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ un endomorfismo no sobreyectivo tal que:

* $\lambda = 1$ es autovalor doble de f

* Los subespacios propios de f son V y W de ecuaciones:

$$\begin{aligned} V : \{x + y + z = 0\} \\ W : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- a) Encontrar una base de V y una de W . Determinar $V \oplus W$ y $V \cap W$
- b) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica
- c) Determinar A^n siendo n un número natural

Ejercicio 5.14 Sea $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con matriz asociada A respecto de la base canónica, y para el que se cumplen los siguientes resultados:

* $\text{Ker} f = \langle (1, 2, 0), (0, 3, 1) \rangle$

* transforma el eje Z en el eje Z

* la suma de los elementos de la diagonal de A es igual a 3

- a) Determinar los autovalores de f
- b) Escribir la matriz A
- c) Calcular A^{12}

(Este ejercicio tiene similitud con un problema del examen final de febrero del curso 06-07).

5.16 Soluciones

5.1

a) Los valores propios son $(-2, 1, 3)$. Por ser los tres distintos la matriz es diagonalizable.

Una posible base de vectores propios es $B = \{(-1, 1, 1), (-1, 4, 1), (1, 2, 1)\}$.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad P.D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) El único valor propio es -1 , con multiplicidad 3.

$\dim V_{-1} = \dim \text{Ker}(A + I) = 2$. Como la dimensión del subespacio propio asociado al autovalor -1 es menor que la multiplicidad de éste como raíz, la matriz no es diagonalizable.

c) La matriz es triangular, y por tanto sus autovalores coinciden con los elementos de la diagonal, y son: 5 con multiplicidad 2 y -3 con multiplicidad 2.

Realizando los cálculos oportunos se obtiene $\dim V_5=2$ y $\dim V_{-3}=2$, por tanto la matriz es diagonalizable.

Una posible base de vectores propios es $B = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (-16, 4, 0, 1), (-8, 4, 1, 0)\}$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar fácilmente que $A.P = P.D$

5.2

Si el conjunto de 3 vectores propios es linealmente independiente dicho conjunto constituirá una base de vectores propios y por tanto quedará demostrado que la matriz es diagonalizable. Los tres vectores son l.i. si y sólo si el determinante la matriz que definen es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1(36 - 15) = -21$$

Para obtener las coordenadas de $\vec{u}$ relativas a la base B anterior se debe resolver la ecuación $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{u} = (5, 2, 5)$. Resolveremos el SL realizando eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada.

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & | & 5 \\ 2 & 2 & -1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 2 & | & 5 \end{bmatrix}$. La solución es $(3/7, 9/7, 10/7)$ y se puede comprobar de la forma siguiente:

$$3/7 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 9/7 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 10/7 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \frac{3}{7} \vec{v}_1 + \frac{9}{7} \vec{v}_2 + \frac{10}{7} \vec{v}_3$$

$$f(\vec{u}) = \frac{3}{7} f(\vec{v}_1) + \frac{9}{7} f(\vec{v}_2) + \frac{10}{7} f(\vec{v}_3) =$$

$$f(\vec{u}) = \frac{3}{7} \lambda_1 \vec{v}_1 + \frac{9}{7} \lambda_2 \vec{v}_2 + \frac{10}{7} \lambda_3 \vec{v}_3 \quad [1]$$

Obtengamos las coordenadas de $f(\vec{u}) = (0, 0, 9)$ en la base de vectores propios.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}. \text{ La solución es } (18/7, -9/7, 18/7), \text{ por tanto}$$

$$f(\vec{u}) = \frac{18}{7} \vec{v}_1 - \frac{9}{7} \vec{v}_2 + \frac{18}{7} \vec{v}_3 \quad [2]$$

Igualando [1] y [2] tenemos que $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 18/10 = 9/5$

Otro método

Las coordenadas de $\vec{u} = (5, 2, 5)$ en la base de autovectores son $[\vec{u}]_B = (3/7, 9/7, 10/7)$.

Las coordenadas de $f(\vec{u}) = (0, 0, 9)$ en la base de autovectores son $[f(\vec{u})]_B = (18/7, -9/7, 18/7)$.

En la base B la matriz de la aplicación lineal es $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, por tanto

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 \\ 9/7 \\ 10/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/7 \\ -9/7 \\ 18/7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Obteniendo las ecuaciones: } \begin{cases} 3/7\lambda_1 = 18/7 \\ 9/7\lambda_2 = -9/7 \\ 10/7\lambda_3 = 18/7 \end{cases}$$

de donde se despejan λ_1 , λ_2 y λ_3 .

5.3 Para obtener las coordenadas de $\vec{z}$ relativas a la base B se debe resolver la ecuación

$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = (5, 4, -9)$. Resolveremos el SL realizando eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \end{bmatrix}$$

Obtenemos $x_3 = -5$, $x_2 = 3$, $x_1 = 1$. Por tanto $\vec{z} = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - 5\vec{v}_3$

$$g(\vec{z}) = g(\vec{v}_1) + 3 g(\vec{v}_2) - 5 g(\vec{v}_3) =$$

$$1 \vec{v}_1 + 3 \cdot 0.02 \vec{v}_2 - 5 \cdot 0.01 \vec{v}_3 =$$

$$\vec{v}_1 + 0.06 \vec{v}_2 - 0.05 \vec{v}_3$$

$$g(g(\vec{z})) = \vec{v}_1 + 0.06 \cdot 0.02 \vec{v}_2 - 0.05 \cdot 0.01 \vec{v}_3 =$$

$$\vec{v}_1 + 0.0012 \vec{v}_2 - 0.0005 \vec{v}_3$$

$$g(g(g(\vec{z}))) = \vec{v}_1 + 0.0012 \cdot 0.02 \vec{v}_2 - 0.0005 \cdot 0.01 \vec{v}_3 =$$

$$\vec{v}_1 + 0.000024 \vec{v}_2 - 0.000005 \vec{v}_3$$

Los vectores resultantes tienden a la dirección de $\vec{v}_1$

Otra forma de verlo:

$$\overbrace{g \dots g}^{k \text{ veces}}(\vec{z}) =$$

$$\overbrace{g \dots g}^{k \text{ veces}}(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3) =$$

$$c_1 \overbrace{g \dots g}^{k \text{ veces}}(\vec{v}_1) + c_2 \overbrace{g \dots g}^{k \text{ veces}}(\vec{v}_2) + c_3 \overbrace{g \dots g}^{k \text{ veces}}(\vec{v}_3) =$$

$$c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + c_3\lambda_3^k\vec{v}_3$$

Cuando $k \rightarrow \infty$ $\lambda_1^k = 1^k \rightarrow 1$

Cuando $k \rightarrow \infty$ $\lambda_2^k = 0.02^k \rightarrow 0$

Cuando $k \rightarrow \infty$ $\lambda_3^k = 0.01^k \rightarrow 0$

Por tanto, cuando $k \rightarrow \infty$, $\overbrace{g \dots g}^{k \text{ veces}}(\vec{z}) \rightarrow c_1 \vec{v}_1$

5.4

1) Calcular α , β y γ

$$\begin{bmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ \beta & 4 & 0 \\ \gamma & 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - 4 + 3 = 2 \\ \beta - 8 + 0 = -4 \\ \gamma - 20 + 3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 11$$

2) Calcular autovalores y autovectores

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & -1 \\ 4 & 4 - \lambda & 0 \\ 11 & 10 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Se calcula por adjuntos de la última columna, obteniendo $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda$

Por Ruffini se obtienen las raíces de $P(\lambda)$, que son (0,2,4). Los autovalores de A son por tanto 0, 2 y 4

Todos los autovalores tienen multiplicidad 1, por tanto los tres subespacios propios tendrán dimensión 1.

Subespacio propio correspondiente a $\lambda = 2$: $V_2 = \langle (1, -2, -3) \rangle$

Subespacio propio correspondiente a $\lambda = 0$. Se obtiene resolviendo el SL con la siguiente matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 11 & 10 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 11 & 10 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -y = z \end{cases} \Rightarrow V_0 = \{(z, -z, z) / z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

Subespacio propio correspondiente a $\lambda = 4$. Se obtiene resolviendo el SL con la siguiente matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 3 - 4 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 - 4 & 0 & 0 \\ 11 & 10 & -1 - 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 32 & -16 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2y$$

$$-x + 2y - 2y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$V_4 = \{(0, y, 2y) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 2) \rangle$$

3) Base de vectores propios de A :

$$B = \{(1, -2, -3), (1, -1, 1), (0, 1, 2)\}$$

4) Diagonalizar la matriz si es posible.

La matriz es diagonalizable ya que existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A . También se puede decir que A es diagonalizable por tener tres autovalores distintos.

Por ser diagonalizable se puede escribir $AP = PD$.

$$\text{Tomando } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ se tiene } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5.5

a) Los vectores $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ se transforman en sí mismos, por tanto $\lambda = 1$ es autovalor, y $\dim V_1 \geq 2$ (sabemos que es como mínimo 2 puesto que ya tenemos dos vectores propios l.i.).

$$\text{Ker } f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 / A\vec{x} = \vec{0} = 0\vec{x}\}$$

Conocemos las ecuaciones implícitas de $\text{Ker } f$, son dos independientes, por tanto la dimensión de $\text{Ker } f$ es $4 - 2 = 2$

$$\text{Ker } f = \{(-y - z, y, z, 0) / y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Ker } f = \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0) \rangle$$

Por tanto 0 es autovalor de f y $V_0 = \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0) \rangle$

Ya hemos obtenido los 4 autovectores de A l.i., que son:

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 0) \text{ con autovalor asociado } 1$$

$$\vec{b}_2 = (0, 0, 0, 1) \text{ con autovalor asociado } 1$$

$$\vec{b}_3 = (-1, 1, 0, 0) \text{ con autovalor asociado } 0$$

$$\vec{b}_4 = (-1, 0, 1, 0) \text{ con autovalor asociado } 0$$

Habíamos visto que $\dim V_1 \geq 2$, pero como $\dim V_0 = 2$, se tiene que $\dim V_1 = 2$ (no puedo tener más de 4 vectores l.i. en $\mathbb{R}^4$, o visto de otra forma, la suma de las multiplicidades algebraicas no puede ser mayor que 4). El conjunto de los cuatro vectores anteriores es la base de vectores propios de $\mathbb{R}^4$, y por existir dicha base, A es diagonalizable.

Base de vectores propios $B = \{(1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\}$. La matriz

$$\text{asociada a } f \text{ respecto de esta base es } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \vec{x} & \xrightarrow{A} & \vec{y} \\ P_B^{-1} & \downarrow & & \uparrow P_B \\ & [\vec{x}]_B & \xrightarrow{D} & [\vec{y}]_B \end{array} \quad A = P_B D P_B^{-1}$$

$$A = P_B D P_B^{-1}, \text{ con } P_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D \text{ la matriz anterior.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se puede demostrar que el subespacio dado es un subconjunto de $\text{Ker} f$, por tanto la imagen de todos los vectores de este subespacio será el vector $(0, 0, 0, 0)$.

5.6

Pide determinar el valor o valores de c que hacen la matriz diagonalizable, si existe alguno.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & c \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(4 - \lambda)$$

Los autovalores son $\lambda = 1$ con multiplicidad 2 y $\lambda = 4$ con multiplicidad 1.

A será diagonalizable si y sólo si $\dim V_1 = 2$.

$$\dim V_1 = 3 - \text{rango}(A - 1I) = 2 \Leftrightarrow \text{rango}(A - 1I) = 1$$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1 - 1 & 2 & c \\ 0 & 1 - 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(A - 1I) = 1 \Leftrightarrow c = 3/2$$

A es diagonalizable si y sólo si $c = 3/2$

A continuación calculamos P y D tales que $A = PDP^{-1}$

$$\underline{V_1} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2y + 3/2z = 0 \Rightarrow y = -3/4z$$

$$V_1 = \{(x, -3/4z, z) / x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$V_1 = \langle (1, 0, 0), (0, -3, 4) \rangle$$

$$\underline{V_4} \quad \begin{bmatrix} 1 - 4 & 2 & c & 0 \\ 0 & 1 - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 - 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & c & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = 0$$

$$-3x + cz = 0 \Rightarrow x = c/3z$$

$$V_4 = \{(c/3z, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}$$

$$V_4 = \langle (c/3, 0, 1) \rangle$$

La matriz A verifica $AP = PD$ si y sólo si $c = 3/2$, por tanto $V_4 = \langle (1/2, 0, 1) \rangle$.

La matriz P quedará como:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5.7

En primer lugar calculamos los autovalores. Como la matriz es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal, por tanto $\lambda = -1$ con multiplicidad 2 y $\lambda = 2$ con multiplicidad 1.

La matriz será diagonalizable si y sólo si $\dim V_{-1}=2$

$$V_{-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / T\vec{x} = -\vec{x}\}$$

$$V_{-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / (T + 1I)\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$[T + 1I] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\dim V_{-1} = 3 - \text{rango}(T + 1I) = 2 \Leftrightarrow \text{rango}(T + 1I) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

T es diagonalizable si y sólo si $\alpha = 0$. β puede tomar cualquier valor.

5.10

Datos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = (3, 6)$

Resultados: Autovalores $-1, 8$ Autovectores $(-1, 1), (2, 7)$

Matriz P , con los autovectores por columnas: $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

$A = PDP^{-1} \Rightarrow D = P^{-1}AP$ La podría calcular, pero no hace falta, se que va a ser ésta:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 262144 \end{bmatrix}$$

Para encontrar las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base de vectores propios hay que resolver el sistema $P[\vec{x}]_B = (3, 6)$ y la solución es $(-1, 1)$.

SL de matriz ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \end{array} \right]$

$$D^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 262144 \end{bmatrix}$$

$$D^6 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 262144 \end{bmatrix}$$

Para pasar a la base canónica multiplicamos por la izquierda por P

$$P \begin{bmatrix} -1 \\ 262144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 524289 \\ 1835007 \end{bmatrix}$$

5.14

a) $(1, 2, 0)$ y $(0, 3, 1)$ son vectores linealmente independientes, cuya imagen es el cero.

$$f(1, 2, 0) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (1, 2, 0)$$

$$f(0, 3, 1) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (0, 3, 1)$$

$\dim \text{Ker } f = 2$. $\text{Ker } f$ es el subespacio propio correspondiente al autovalor $\lambda_1 = 0$. Como tiene dos autovectores linealmente independientes, $v_1 = (1, 2, 0)$ y $v_2 = (0, 3, 1)$, $\dim V_0 = 2$, por tanto la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 0$ es 2.

Por otra parte, la segunda información expresa que $f(0, 0, 1) = \alpha(0, 0, 1)$ con $\alpha \neq 0$ y que α es por tanto autovalor correspondiente al autovector $v_3 = (0, 0, 1)$. Denotamos a este valor como λ_2 . No podemos suponer que $\alpha = 1$ porque el enunciado no afirma “la imagen de cada vector del eje Z es igual a ese vector”. Al afirmar que “la imagen del eje Z es el eje Z ” sólo podemos concluir que la imagen de un vector del eje, está en el eje, y que por lo tanto que la imagen es un múltiplo del vector original.

De la tercera afirmación: “la suma de los elementos de la diagonal de A es 3”, deduciremos el valor del autovalor λ_2 , en el apartado siguiente.

b) Tres vectores propios linealmente independientes son $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 3, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$.

Los dos primeros son l.i. entre ellos porque uno no es múltiplo del otro. $v_3 = (0, 0, 1)$ forma con los otros dos un conjunto l.i. porque v_3 pertenece al subespacio propio V_3 y los subespacios propios siempre son l.i. entre sí.

Como v_1, v_2, v_3 son tres vectores de R^3 y son l.i. forman base de R^3

f es entonces diagonalizable, puesto que existe base de R^3 formada por autovectores de f . La matriz en la base canónica se obtiene aplicando la factorización $A = PDP^{-1}$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Seguidamente se obtiene (por ejemplo por el método de}$$

$$\text{Gauss-Jordan): } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}\alpha & -\frac{1}{3}\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

Suma de los elementos de la diagonal es 3, por tanto

$$0 + 0 + \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\text{c) } A^{12} = PD^{12}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 354294 & -177147 & 531441 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 6

$\mathbb{R}^n$ como espacio euclídeo

6.1 Producto escalar euclídeo

Definición 6.1 Sean $\vec{u}, \vec{v}$ elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Se define **producto escalar euclídeo** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y se denota $\vec{u} \cdot \vec{v}$ al número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} \quad \vec{v} & \longrightarrow & \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} \end{array} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Ejemplo 6.1 Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$, con $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = [2 \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + (-5) \times 2 + (-1) \times (-3) = 6 - 10 + 3 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^t \vec{u} = [3 \ 2 \ -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \times 2 + 2 \times (-5) + (-3) \times (-1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

Teorema 6.1 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$

d) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ y $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

La combinación de las propiedades b) y c) $\Rightarrow$

$(c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_p \vec{u}_p) \cdot \vec{w} = c_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{w}) + c_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{w}) + \dots + c_p(\vec{u}_p \cdot \vec{w})$

Demostración: Las propiedades anteriores se deducen de las operaciones de producto de matrices y trasposición de matrices. ■

6.2 Longitud o norma de un vector

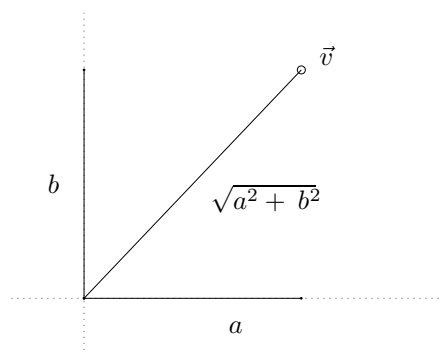
Definición 6.2 Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. Se denomina **norma o longitud** de $\vec{v}$ al escalar no negativo $\|\vec{v}\|$ definido por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \quad , \quad \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

La raíz de $\vec{v} \cdot \vec{v}$ está definida, ya que $\vec{v} \cdot \vec{v}$ no es negativo.

Habíamos visto a principio de curso como un vector de $\mathbb{R}^2$, o par de números reales, lo podíamos identificar con un punto geométrico en el plano. Dado $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ el punto asignado es el de coordenadas (a, b) .

$\|\vec{v}\|$ coincide con la noción usual de la longitud del segmento de línea que va del origen a $\vec{v}$. Esto es consecuencia del Teorema de Pitágoras aplicado a un triángulo como el de la figura.



$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$$

Podríamos también ver el símil en $\mathbb{R}^3$. En este caso la norma de $\vec{v}$ coincide con la longitud del segmento de línea que forma la diagonal de un paralelepípedo con lados a, b, c .

Para cualquier escalar c , la longitud de $c\vec{v}$ es $|c|$ veces la longitud de $\vec{v}$. Esto es, $\|c\vec{v}\| = |c| \|\vec{v}\|$

(Para verlo calculemos $\|c\vec{v}\|^2 = c\vec{v} \cdot c\vec{v} = c^2 \vec{v} \cdot \vec{v} = c^2 \|\vec{v}\|^2$ y tomemos su raíz cuadrada positiva).

Un vector cuya longitud es 1 se denomina **vector unitario**. Si dividimos un vector no nulo $\vec{v}$ por su longitud, es decir, si lo multiplicamos por $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ obtenemos un vector unitario $\vec{u}$, porque la longitud de $\vec{u}$ es $(\frac{1}{\|\vec{v}\|}) \|\vec{v}\|$, con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}$. El proceso de crear $\vec{u}$ a partir de $\vec{v}$ se denomina **normalización** de $\vec{v}$.

Dado $\vec{v}$, $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ es un vector unitario con la dirección y sentido de $\vec{v}$.

Ejemplo 6.2 Sea $\vec{v} = (1, -2, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$. Encuentra un vector unitario $\vec{u}$ en la misma dirección que $\vec{v}$.

En primer lugar calculamos la norma de $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (1)^2 + (-2)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 9 \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{9} = 3$$

Después multiplicamos $\vec{v}$ por $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ para obtener:

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{1}{3} \vec{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para comprobar que $\|\vec{u}\| = 1$ es suficiente con demostrar que $\|\vec{u}\|^2 = 1$

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (1/3)^2 + (-2/3)^2 + (2/3)^2 + (0)^2 = 1/9 + 4/9 + 4/9 + 0 = 1$$

Ejemplo 6.3 Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por $\vec{x} = (2/3, 1)$. Encuentra un vector unitario $\vec{z}$ que sea base de W .

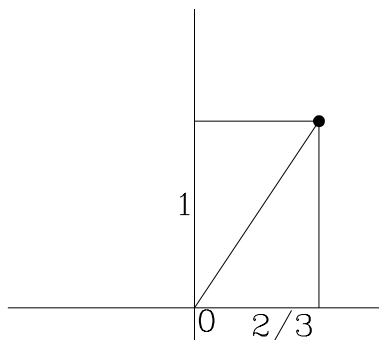
W está formado por todos los múltiplos de $\vec{x}$. Cualquier vector no nulo de W es una base para W . Para simplificar los cálculos “escalamos” $\vec{x}$ para eliminar las fracciones. Esto es, multiplicamos $\vec{x}$ por 3 para obtener $\vec{y} = (2, 3)$

Ahora calculamos $\|\vec{y}\|^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, $\|\vec{y}\| = \sqrt{13}$, y normalizamos $\vec{y}$ para obtener:

$$\vec{z} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

Otro vector unitario base de W sería por ejemplo $(-2/\sqrt{13}, -3/\sqrt{13})$

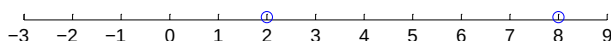
W es una recta que contiene el cero.



$$\text{pendiente} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

6.3 Distancia en $\mathbb{R}^n$

A continuación vamos a definir la distancia entre vectores. Recordamos que si a y b son números reales, la distancia en la línea de números entre a y b es el número $|a - b|$. En la figura se dan dos ejemplos



$$\begin{aligned} |2 - 8| &= |-6| = 6 & |8 - 2| &= |6| = 6 \\ |(-3) - 4| &= |-7| = 7 & |4 - (-3)| &= |7| = 7 \end{aligned}$$

Esta definición de distancia se puede extender a $\mathbb{R}^n$.

Definición 6.3 Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la **distancia entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$** , denotada como $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v})$, es la longitud del vector $\vec{u} - \vec{v}$. Esto es, $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}$

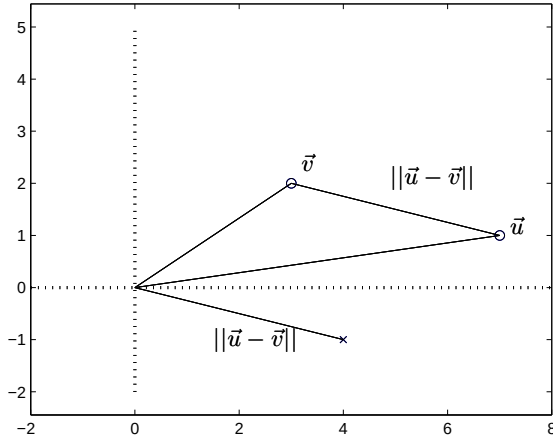
En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ esta definición de distancia coincide con las fórmulas usuales para la distancia entre dos puntos, tal como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.4 Calcula la distancia entre los vectores $\vec{u} = (7, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2)$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ se muestran en la figura. Cuando al vector $\vec{u} - \vec{v}$ se le suma al vector $\vec{v}$, el resultado es $\vec{u}$. Nota como el paralelogramo de la figura muestra que la distancia de $\vec{v}$ a $\vec{u}$ es la misma que la distancia de 0 a $\vec{u} - \vec{v}$.



Ejemplo 6.5 Determina la expresión general de la distancia entre dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$.

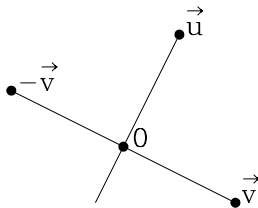
$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

Definición 6.4 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es un **espacio euclídeo** al poderse definir para sus vectores

- producto interno entre vectores
- norma o longitud de un vector (a partir del producto interno)
- distancia entre vectores (a partir del producto interno)

6.4 Vectores ortogonales

Consideremos $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ y dos líneas que atraviesan el origen y determinadas por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Las dos líneas, mostradas en la figura, son geoméricamente perpendiculares si y sólo si la línea a través de $\vec{u}$ es el bisector perpendicular del segmento de línea desde $-\vec{v}$ hasta $\vec{v}$. Esto es lo mismo que requerir que las distancias de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ y de $\vec{u}$ a $-\vec{v}$ sean iguales.



$$\begin{aligned} [\text{dist}(\vec{u}, -\vec{v})]^2 &= \|\vec{u} - (-\vec{v})\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad [1a]$$

Los mismos cálculos con $\vec{v}$ en vez de $-\vec{v}$ muestran que:

$$\begin{aligned} [\text{dist}(\vec{u}, \vec{v})]^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad [1b]$$

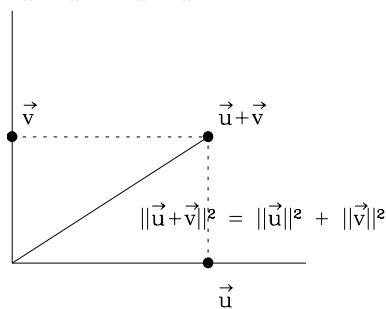
Las dos distancias son iguales si y sólo si $2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\vec{v} \cdot \vec{u}$, lo que sucede si y sólo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Este cálculo muestra que cuando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están identificados con puntos geométricos, las correspondientes líneas que atraviesan los puntos y el origen son perpendiculares si y sólo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. La siguiente definición generaliza a $\mathbb{R}^n$ esta noción de perpendicularidad (ortogonalidad en Álgebra Lineal).

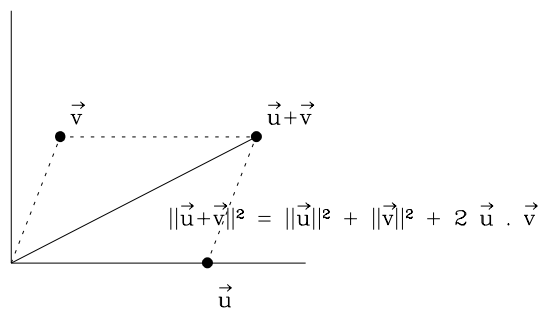
Definición 6.5 Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ son **ortogonales** entre sí si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Observamos como el vector cero es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{R}^n$, porque $\vec{0}^t \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v}$.

Teorema 6.2 *Teorema de Pitágoras.* Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$



$\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales



$\vec{u}$ y $\vec{v}$ no ortogonales

(Recuérdese como la suma de dos vectores coincide con la diagonal del paralelogramo que definen).

6.5 Conjuntos ortogonales y base ortogonal

Definición 6.6 Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ se dice que es un **conjunto ortogonal** si cada par de vectores distintos del conjunto es ortogonal, es decir, si $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ cuando $i \neq j$.

Definición 6.7 Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

Ejemplo 6.6 Muestra que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un conjunto ortogonal, donde

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

Consideremos los tres posibles pares de vectores distintos, a saber $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$ y $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 3(-1) + 1(2) + 1(1) = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 3(-1/2) + 1(-2) + 1(7/2) = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = -1(-1/2) + 2(-2) + 1(7/2) = 0$$

Cada par de vectores distintos es ortogonal, por tanto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un conjunto ortogonal.

Teorema 6.3 Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$, entonces S es un conjunto linealmente independiente y por tanto es una base del espacio generado por S .

Demostración:

$$\text{Supongamos que } \exists c_1, c_2, \dots, c_p / \vec{0} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_p \vec{u}_p \quad [1]$$

$$0 = \vec{0} \cdot \vec{u}_1 = (c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_p \vec{u}_p) \cdot \vec{u}_1$$

$$0 = (c_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 + (c_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_1 + \dots + (c_p \vec{u}_p) \cdot \vec{u}_1$$

$$0 = c_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + c_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) + \dots + c_p(\vec{u}_p \cdot \vec{u}_1)$$

$$0 = c_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) \quad \text{ya que } \vec{u}_1 \text{ es ortogonal a } \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p.$$

Como $\vec{u}_1$ es no nulo, $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$ no es nulo y por tanto $c_1 = 0$. Similarmente se puede demostrar que $c_2, \dots, c_p$ tienen que ser cero, multiplicando [1] por $\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ respectivamente. Por tanto el conjunto S es linealmente independiente. ■

Definición 6.8 Una **base ortogonal** de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ es una base de W que es además un conjunto ortogonal.

Definición 6.9 Una **base ortonormal** de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ es una base de W que es además un conjunto ortonormal.

El ejemplo más sencillo de conjunto ortonormal es la base estándar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Cualquier subconjunto no vacío de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es también ortonormal. Hay ejemplos más complicados, como el que sigue:

Ejemplo 6.7 Muestra que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, donde:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \frac{9}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{(9+1+1)}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{(1+4+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = \frac{1}{66} + \frac{16}{66} + \frac{49}{66} = \frac{(1+16+49)}{66} = \frac{66}{66} = 1$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = \frac{-3}{\sqrt{11}\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = \frac{(-3+2+1)}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \frac{-3}{\sqrt{11}\sqrt{66}} + \frac{-4}{\sqrt{11}\sqrt{66}} + \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = \frac{(-3-4+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{66}} + \frac{-8}{\sqrt{6}\sqrt{66}} + \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{66}} = \frac{(1-8+7)}{\sqrt{11}\sqrt{66}} = 0$$

El conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es un conjunto ortonormal, luego es linealmente independiente, y por tanto forma una base de $\mathbb{R}^3$ (son 3 vectores). Por ser un conjunto ortonormal es una base ortonormal.

Cuando los vectores de un conjunto ortogonal se “normalizan” para tener longitud unidad, el nuevo conjunto sigue siendo ortogonal, y por tanto, al tener longitud unidad, forma un conjunto ortonormal.

Estos son de hecho los vectores ortogonales del ejemplo 6.6, pero normalizados para hacerlos unitarios.

6.6 Coordenadas relativas a una base ortogonal

El siguiente teorema sugiere por qué una base ortogonal es más sencilla de tratar que otras bases. En efecto, las coordenadas de un vector respecto a una base así se calculan de forma muy sencilla.

Teorema 6.4 Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base ortogonal del subespacio W de $\mathbb{R}^n$. Entonces, las coordenadas de $\vec{y}$ de W relativas a esa base son los c_j tales que

$$c_j = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_j}{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j} \quad (j = 1, \dots, p)$$

Demostración: $\vec{y} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_p\vec{u}_p$

$$\vec{y} \cdot \vec{u}_1 = c_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + 0 + \dots + 0 \quad c_1 = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}$$

y lo mismo para el resto de los subíndices hasta el p . ■

El teorema se verifica para todo subespacio de $\mathbb{R}^n$, incluido el propio $\mathbb{R}^n$.

Dado $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$, las coordenadas de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ relativas a esa base son los c_j tales que

$$c_j = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_j}{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

COROLARIO 6.1 Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base ortonormal del subespacio W de $\mathbb{R}^n$. Entonces, las coordenadas de $\vec{y}$ de W relativas a esa base son los $c_j = \vec{y} \cdot \vec{u}_j$ ($j = 1, \dots, p$)

Ejemplo 6.8 El conjunto de vectores $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ del ejemplo 6.6 forma una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Expresa el vector $\vec{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de S .

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_3}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3} \vec{u}_3 \quad \text{por ser } S \text{ una base ortogonal}$$

$$\vec{y} \cdot \vec{u}_1 = [6 \ 1 \ -8] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 18 + 1 - 8 = 11$$

$$\vec{y} \cdot \vec{u}_2 = [6 \ 1 \ -8] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 + 2 - 8 = -14 + 2 = -12$$

$$\vec{y} \cdot \vec{u}_3 = [6 \ 1 \ -8] \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = -3 - 2 - 28 = -33$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = [3 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 + 1 + 1 = 11$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = [-1 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 1 = 6$$

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = [-1/2 \ -2 \ 7/2] \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = 1/4 + 4 + 49/4 = (1 + 16 + 49)/4 = 66/4 = 33/2$$

$$\vec{y} = \frac{11}{11} \vec{u}_1 + \frac{-12}{6} \vec{u}_2 + \frac{-33}{33/2} \vec{u}_3 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

Si la base no fuera ortogonal hubiéramos tenido que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}, \text{ que es similar a la ecuación vectorial}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

6.7 Ángulo entre dos vectores

Se define ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ninguno de ellos nulo, como el escalar $\alpha = \text{angulo}(\vec{u}, \vec{v})$ siguiente:

$$\alpha \in [0, \pi] \text{ tal que } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

Despejando $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0, \pi/2)$$

$$\text{Si } \vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ con } \lambda > 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) > 0$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \lambda \vec{u}}{\|\vec{u}\| \|\lambda \vec{u}\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (\pi/2, \pi]$$

$$\text{Si } \vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ con } \lambda < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \lambda \vec{u} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) < 0$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \lambda \vec{u}}{\|\vec{u}\| \|\lambda \vec{u}\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$$

Ejemplo 6.9 Calcula el ángulo que forman los vectores de $\mathbb{R}^2$ $(7, 1)$ y $(-3, 3)$, y el ángulo que forman los vectores de $\mathbb{R}^2$ $(7, 1)$ y $(4, -3)$.

$$(7, 1) \cdot (-3, 3) = \sqrt{50} \sqrt{18} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-21 + 3}{\sqrt{50} \sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{50} \sqrt{18}} = \frac{-18}{\sqrt{25 \times 4 \times 9}} = \frac{-18}{5 \times 2 \times 3} = \frac{-3}{5}$$

El ángulo es $\alpha = 2.2143$ radianes = 126.87 grados

$$(7, 1) \cdot (4, -3) = \sqrt{50} \cdot 5 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{28 - 3}{5 \sqrt{50}} = \frac{25}{5 \sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.7071$$

El ángulo es $\alpha = 45$ grados

6.8 Matriz ortogonal y base ortonormal

Teorema 6.5 Una matriz real Q_n es ortogonal si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$

Demostración:

$\Rightarrow$

Q ortogonal $\Rightarrow Q^{-1} = Q^t \Rightarrow Q^t Q = I$. Escribamos como columnas de Q una base de vectores unitarios $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ y comprobemos que esa base es ortonormal. Que las columnas sean base se deduce de un teorema anterior (3.14) que establecía que las columnas de una matriz cuadrada inversible de orden n formaban base de $\mathbb{R}^n$. Dividiendo cada vector de la base por su norma ya tenemos todos unitarios.

$$Q = [\vec{u}_1 \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n]$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{n2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_n \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_n \cdot \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \cdot \vec{u}_n \end{bmatrix} =$$

$$I \Rightarrow \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \} \text{ es base ortonormal}$$

$\Leftarrow$

$Q = [\vec{u}_1 \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n]$ con $\{ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \}$ base ortonormal implica que $Q^t Q = I$ (ver la demostración anterior).

$Q^t Q = I \Rightarrow |Q| \neq 0$ por tanto Q inversible

Multiplicando $Q^t Q = I$ por Q^{-1} por la derecha se obtiene
 $Q^t = Q^{-1}$ por tanto Q es ortogonal. ■

6.9 Subespacios vectoriales ortogonales

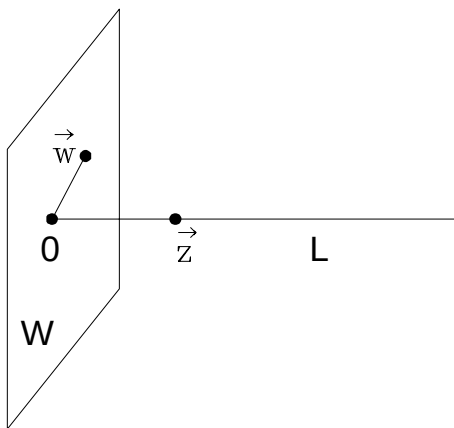
Definición 6.10 Se dice que $\vec{z}$ es **ortogonal** a un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ si $\vec{z}$ es ortogonal a todo vector $\vec{w} \in W$.

Definición 6.11 Se dice que V y W subespacios de $\mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si $\forall \vec{z} \in V, \vec{z}$ es ortogonal W .

6.10 Complemento ortogonal de un subespacio

Definición 6.12 Se dice que $\vec{z}$ es **ortogonal** a un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ si $\vec{z}$ es ortogonal a todo vector $\vec{w} \in W$. El conjunto de todos los vectores $\vec{z}$ que son ortogonales a W se denomina **complemento ortogonal** de W y se denota como $W^\perp$.

Ejemplo 6.10 Sea W un plano atravesando el origen, en $\mathbb{R}^3$, y sea L la recta que atraviesa el origen y perpendicular a W . $\forall \vec{z} \in L$ y $\forall \vec{w} \in W, \vec{z} \cdot \vec{w} = 0$. Ver la figura. En efecto, L está formado por todos los vectores que son ortogonales a los $\vec{w}$ de W y recíprocamente W está formado por todos los vectores ortogonales a los $\vec{z}$ de L . Es decir, $L = W^\perp$ y $W = L^\perp$



Un plano conteniendo al origen, en $\mathbb{R}^3$, como W , es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2. 2 vectores base.

Una recta conteniendo al origen, en $\mathbb{R}^3$, como L , es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1. Un solo vector base.

Consideremos el caso de $W = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ y $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$

Un vector $\vec{w} \in W$ y un vector $\vec{z} \in L$ serán de la forma:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \end{bmatrix} = z_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{z} = [w_1 \quad w_2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \end{bmatrix} = w_1 0 + w_2 0 + 0 z_3 = 0$$

Teorema 6.6 Se cumplen los siguientes resultados sobre $W^\perp$, siendo W un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

- 1) Un vector $\vec{x}$ pertenece a $W^\perp$ si y sólo si $\vec{x}$ es ortogonal a todos los vectores de un sistema de generadores de W .
- 2) $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
- 3) $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$

Comentario sobre el significado de 3):

- Dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ existen $\vec{u}_1 \in W$ y $\vec{u}_2 \in W^\perp$ únicos, tales que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
- Dado $\vec{u} \in W$ y $\vec{v} \in W^\perp$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ y $\vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W^\perp$ y ambos son no nulos, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente.
- Se puede obtener una base de $\mathbb{R}^n$ $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_n\}$, con $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ base de W y $\{\vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ base de $W^\perp$
- $\dim W + \dim W^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n$

OBSERVACIÓN:

Todo subespacio $W \in \mathbb{R}^n$ (salvo el $\vec{0}$ y el propio $\mathbb{R}^n$) admite infinitos subespacios complementarios, pero sólo uno de ellos es complemento ortogonal.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, cualquier recta pasando por el origen y no incluida en el plano XY es complementario del subespacio formado por el plano XY, pero el complemento ortogonal del plano XY es un subespacio único, que es la recta que define el eje Z.

Ejemplo 6.11 Sean $(3, 2, 2, 4)$, $(1, 0, 0, 2)$ y $(1, -1, -1, 1)$ tres vectores de $\mathbb{R}^4$. Hallar un vector de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a los tres dados.

Las componentes del vector son 4 incógnitas, puesto que el vector pertenece a $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (3, 2, 2, 4) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, 0, 0, 2) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \\ (1, -1, -1, 1) \cdot (x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 4t = 0 \\ x + 2t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Las 3 ecuaciones anteriores forman un sistema. Encontrar el vector (x, y, z, t) es encontrar la solución del sistema.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos 3 ecuaciones y rango 3, y por otra parte 4 incógnitas. Por tanto tenemos $4-3=1$ parámetro libre. Tomando z como parámetro libre deducimos:

$$\begin{aligned} -4t &= 0 \Rightarrow \boxed{t=0} \\ y + z + t &= 0 \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow \boxed{y=-z} \\ x - y - z + t &= 0 \Rightarrow x - y - z = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

El vector solución es de la forma $(x, y, z, t) = (0, -z, z, 0) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los tres dados es un espacio vectorial de dimensión 1. Un vector base posible es el $(0, -1, 1, 0)$

NÓTESE que el conjunto de soluciones es precisamente $\text{Ker}A$, siendo A la matriz que tiene por filas los tres vectores iniciales, a los que la solución tiene que ser ortogonal.

Ejemplo 6.12 Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y en él los siguientes subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle (1, 1, 0), (0, 3, 6) \rangle \\ W_2 &= \langle (1, 2, 1) \rangle \\ W_3 &= \langle (7, 8, 5), (6, 3, 1), (1, 3, 6) \rangle \end{aligned}$$

Hallar los subespacios vectoriales ortogonales correspondientes, $W_1^\perp$, $W_2^\perp$, $W_3^\perp$.

a) $W_1^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \text{ es ortogonal a } (1, 1, 0) \text{ y a } (0, 3, 6)\}$

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (1, 1, 0) &= x + y = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 3, 6) &= 3y + 6z = 0 \end{aligned}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{El sistema se encuentra ya en la forma escalonada.}$$

Tomamos z como parámetro libre.

$$\begin{aligned} 3y + 6z &= 0 \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z \\ x + y &= 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x = 2z \end{aligned}$$

El vector solución es de la forma $(x, y, z) = (2z, -2z, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales a los dos dados es un espacio vectorial de dimensión 1. Un vector base podría ser el $(2, -2, 1)$

Los vectores se pueden identificar con una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, y cuya dirección viene dada por el vector $(2, -2, 1)$ o un múltiplo de éste.

Vemos de nuevo que este espacio vectorial es $\text{Ker}A$, siendo A la matriz que tiene por filas los dos vectores a los que la solución debe ser ortogonal.

Expresamos $W_1^\perp = \langle (2, -2, 1) \rangle$

NOTA: Se puede obtener $W_1^\perp = \langle \vec{n} \rangle$, siendo $\vec{n} = (1, 1, 0) \times (0, 3, 6)$ (producto vectorial).

b) $W_2^\perp = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z)$ es ortogonal a $(1, 2, 1)$

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = x + 2y + z = 0$$

La última ecuación es la ecuación implícita de $W_2^\perp$

Tenemos una sola ecuación y tres incógnitas, por tanto dos parámetros libres. Dejando como parámetros libres y y z tendremos

$$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x = -2y - z \quad y = y, \quad z = z$$

El vector solución en forma paramétrica es $(x, y, z) = (-2y - z, y, z) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}$

El conjunto de vectores ortogonales al dado es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base podría ser la formada por los vectores $(-2, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$.

$$W_2^\perp = \langle (-2, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$$

$W_2^\perp$ se identifica geoméricamente con un plano, que contiene el origen, o vector $(0, 0, 0)$ y los vectores $(-2, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$. El complemento ortogonal de una recta en $\mathbb{R}^3$ es precisamente un plano. La ecuación implícita $W_2^\perp$, $x + 2y + z = 0$, tiene en efecto la expresión de la ecuación general de un plano que pasa por el origen, la cual viene dada por $Ax + By + Cz = 0$ siendo $A, B, C \in \mathbb{R}$ y (A, B, C) un vector que da la dirección perpendicular al plano.

De nuevo este espacio vectorial es $\text{Ker}A$, siendo A la matriz fila, cuya fila es el vector inicial.

c) $W_3^\perp = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z)$ es ortogonal a $(7, 8, 5)$, $(6, 3, 1)$ y $(1, 3, 6)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 100$$

$\det A \neq 0$, por tanto tenemos un sistema de Cramer, con solución única, y como el sistema es homogéneo, la solución única es la trivial.

Por tanto $W_3^\perp = \{(0, 0, 0)\}$.

W_3 representa todo el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, por lo que es de esperar que $W_3^\perp = \vec{0}$.

Habíamos visto anteriormente como $\vec{0}$ es ortogonal a todos los vectores.

Ejemplo 6.13 Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y el subespacio vectorial W dado por $2x + y - z = 0$. Determina $W^\perp$.

La ecuación $2x + y - z = 0$ la puedo interpretar como la expresión del producto escalar de dos vectores, igualada a cero, siendo los vectores $(2, 1, -1)$ y (x, y, z) . Los vectores (x, y, z) contenidos en el plano que representa el subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ son los vectores ortogonales al vector $(2, 1, -1)$, y obviamente a los múltiplos de éste.

En efecto si $(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow \lambda(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0$

Por tanto $W^\perp = \langle (2, 1, -1) \rangle$.

6.11 Descomposición ortogonal de un vector de $\mathbb{R}^n$. Proyección ortogonal

El apartado 3 del Teorema 6.6 se conoce como Teorema de la Descomposición Ortogonal.

$W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$ significa que cada $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de forma única como suma de un vector $\hat{\vec{y}} \in W$ y un vector $\vec{z} \in W^\perp$

A $\hat{\vec{y}}$ se le denomina **proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre W** y se denota también como $\text{proj}_W \vec{y}$

También se puede dar esta definición: La proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre W es el vector $\hat{\vec{y}}$ tal que $\vec{y} - \hat{\vec{y}} \in W^\perp$

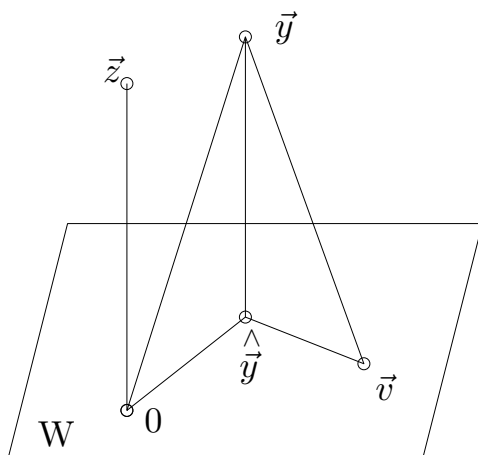
Ya que $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$ podemos obtener una base de $\mathbb{R}^n$ $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_n\}$, con $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ base de W y $\{\vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ base de $W^\perp$.

Entonces $\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_m\vec{v}_m + c_{m+1}\vec{v}_{m+1} + \dots + c_n\vec{v}_n$

con $\text{proy}_W \vec{y} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_m\vec{v}_m \in W$ y

$\vec{z} = c_{m+1}\vec{v}_{m+1} + \dots + c_n\vec{v}_n \in W^\perp$

Como las coordenadas respecto a una base dada son únicas, obtendremos un único vector $\text{proy}_W \vec{y} \in W$ y un único vector $\vec{z} \in W^\perp$ tales que $\vec{y} = \text{proy}_W \vec{y} + \vec{z}$.



$\hat{\vec{y}}$ tiene la propiedad de ser el vector de W más cercano a $\vec{y}$

$$\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in W \quad \text{con } \vec{v} \neq \hat{\vec{y}}$$

Decimos entonces que dado $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, la mejor aproximación de $\vec{y}$ que puedo obtener mediante un vector de W , subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, es $\text{proy}_W \vec{y}$

¿ En qué sentido es mejor aproximación?

En el sentido de que

$$\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in W \quad \text{con } \vec{v} \neq \text{proy}_W \vec{y}$$

Denominando $\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y} = \vec{\varepsilon}$

$$\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}$$

La aproximación minimiza la suma de los errores (o desviaciones) al cuadrado.

La distancia del punto $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ al subespacio W se define como la distancia desde $\vec{y}$ al punto más cercano de W . Dicho de otra forma, la distancia de $\vec{y}$ a W es igual a $\|\vec{y} - \text{proy}_W \vec{y}\| = \|\vec{z}\|$

OBSERVACIONES

- $\vec{z} = \text{proy}_{W^\perp} \vec{y}$, es decir, $\vec{z}$ es la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $W^\perp$.
- $\|\text{proy}_W \vec{y}\|$ es la distancia de $\vec{y}$ a $W^\perp$.

6.12 Proyección ortogonal sobre un subespacio del que conocemos una base ortogonal

Teorema 6.7 . Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base ortogonal de W e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\text{proy}_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p$$

Demostración:

$\text{proy}_W \vec{y} \in W$, por tanto $\text{proy}_W \vec{y} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_p \vec{u}_p$,

$$\text{con } c_j = \frac{\text{proy}_W \vec{y} \cdot \vec{u}_j}{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j}$$

Sólo nos queda comprobar que $\text{proy}_W \vec{y} \cdot \vec{u}_j = \vec{y} \cdot \vec{u}_j$.

En efecto, $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{y} - \vec{z}$ con $\vec{z} \in W^\perp$

Por tanto $\text{proy}_W \vec{y} \cdot \vec{u}_j = \vec{y} \cdot \vec{u}_j - \vec{z} \cdot \vec{u}_j = \vec{y} \cdot \vec{u}_j - 0 = \vec{y} \cdot \vec{u}_j$ ■

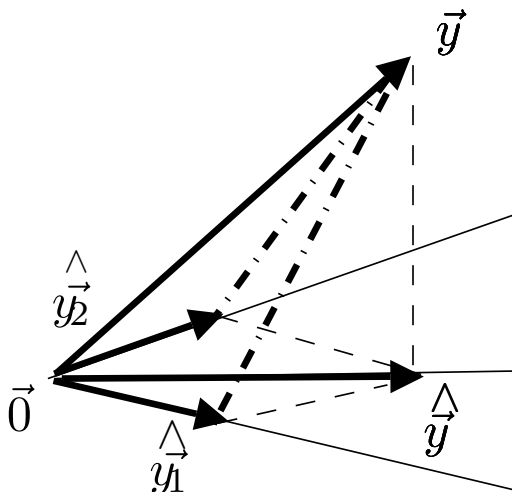
La proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \rangle$, siendo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una base ortogonal, es igual a la suma de las p proyecciones ortogonales sobre subespacios de una dimensión, mutuamente ortogonales, en las direcciones de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

$$\text{proy}_W \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p \quad [1]$$

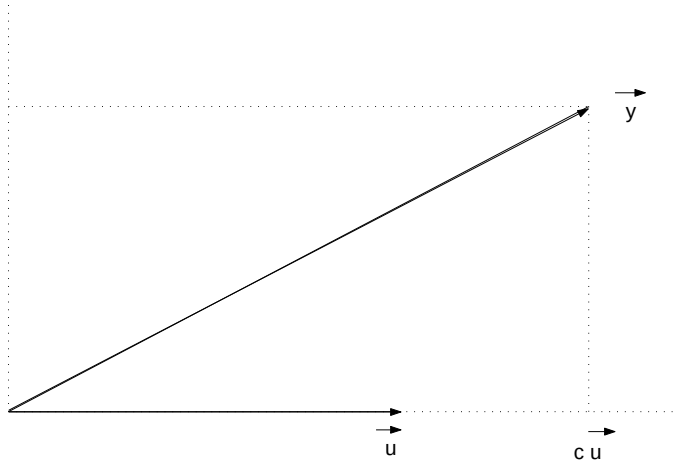
Si la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ es ortonormal la fórmula [1] se expresa:

$$\text{proy}_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_p) \vec{u}_p \quad [2]$$

Para cálculos a mano se recomienda utilizar la fórmula [1] ya que en la [2] aparecerán raíces cuadradas.



Otra forma de deducir la Proyección de un vector sobre una recta



$$(\vec{y} - c\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{y} \cdot \vec{u} - c\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow$$

$$c = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{u} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

COROLARIO 6.2 Si $\vec{y} \in W$, entonces $\text{proy}_W \vec{y} = \vec{y}$ y $\vec{z} = \vec{0}$.

6.13 Ortogonalización de Gram-Schmidt

El proceso de Gram-Schmidt es un algoritmo que permite obtener una base ortogonal para cualquier subespacio no nulo de $\mathbb{R}^n$ a partir de una base dada. Ilustraremos el algoritmo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.14 Sea $W = \langle (0, 4, 4), (2, 2, 4) \rangle$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Obtén una base ortogonal para este subespacio.

A partir de los vectores originales $\vec{x}_1 = (0, 4, 4)$ y $\vec{x}_2 = (2, 2, 4)$, que forman la base B , vamos a construir la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, siendo $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores de W ortogonales entre sí.

Tomo $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ y a continuación construyo $\vec{v}_2$.

Consideremos el vector $\text{proy}_{\langle \vec{x}_1 \rangle} \vec{x}_2$,

$\vec{x}_2 - \text{proy}_{\langle \vec{x}_1 \rangle} \vec{x}_2$ es ortogonal a $\vec{x}_1$ y pertenece a W , pues es combinación lineal de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ ($\text{proy}_{\langle \vec{x}_1 \rangle} \vec{x}_2 = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1} \vec{x}_1$)

Por tanto $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ y $\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \text{proy}_{\langle \vec{x}_1 \rangle} \vec{x}_2$ forman una base ortogonal de W .

$$\vec{v}_1 = (0, 4, 4)$$

$$\vec{v}_2 = (2, 2, 4) - \frac{(2, 2, 4) \cdot (0, 4, 4)}{(0, 4, 4) \cdot (0, 4, 4)} (0, 4, 4) = (2, -1, 1)$$

Comprobamos que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ forman una base ortogonal: $(0, 4, 4) \cdot (2, -1, 1) = 0 - 4 + 4 = 0$

Teorema 6.8 Teorema de la Ortogonalización de Gram-Schmidt

Dada una base $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, y definidos:

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$$

·
·
·

$$\vec{v}_p = \vec{x}_p - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_{p-1}}{\vec{v}_{p-1} \cdot \vec{v}_{p-1}} \vec{v}_{p-1}$$

Entonces $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es una base ortogonal de W . Además,

$$\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \rangle, \text{ para } 1 \leq k \leq p$$

Ejemplo 6.15 Sean los vectores $\vec{y} = (7, 6)$ y $\vec{u} = (4, 2)$. Encuentra la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\langle \vec{u} \rangle$ y la distancia de $\vec{y}$ a la recta $\langle \vec{u} \rangle$.

Calculamos en primer lugar un vector $\vec{z}_1$ ortogonal a $\vec{u} = (4, 2)$. Un ejemplo es $\vec{z}_1 = (1, -2)$.

Considerada la base $B = \{\vec{u}, \vec{z}_1\}$, con un vector en la dirección de $\vec{u}$ y otro en la dirección ortogonal $\vec{z}_1$, se calculan las coordenadas de $(7, 6)$ respecto a esta base, resultando ser $(2, -1)$, es decir:

$$(7,6) = 2(4,2) - 1(1,-2)$$

Por tanto la proyección de $(7,6)$ sobre $(4,2)$ es $2(4,2) = (8,4)$

La longitud del vector proyección es igual a $\sqrt{64 + 16} = \sqrt{100} = 10$

La distancia de $(7,6)$ a la recta de dirección $(4,2)$ es:

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Este problema también se podía haber resuelto utilizando la fórmula de la Sección 6.11 puesto que el subespacio sobre el que se proyecta es de dimensión 1, y por tanto su base puede considerarse como base ortogonal.

$$\text{proy}_{\langle \vec{u} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

Por tanto

$$\text{proy}_{\langle \vec{u} \rangle} \vec{y} = \frac{(7,6) \cdot (4,2)}{(4,2) \cdot (4,2)} (4,2)$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{u} \rangle} \vec{y} = \frac{28 + 12}{16 + 4} (4,2) = 2(4,2) = (8,4)$$

La distancia de $\vec{y}$ a $\langle \vec{u} \rangle$ es igual a la norma de $\vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_{\langle \vec{u} \rangle} \vec{y} = (7,6) - (8,4) = (-1,2)$

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Ejemplo 6.16 Sean $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. Escribe $\vec{y}$ como suma de un vector en el espacio generado por $\vec{u}$ y de un vector ortogonal a $\vec{u}$.

$$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{y} = \frac{(2,6) \cdot (7,1)}{49 + 1} (7,1) = \frac{14 + 6}{50} (7,1) = \frac{20}{50} (7,1) = \frac{2}{5} (7,1)$$

$$\vec{y} = \text{proy}_{\vec{u}} \vec{y} + \vec{z}$$

$$\vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_{\vec{u}} \vec{y}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 14/5 \\ 6 - 2/5 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} -4 \\ 28 \end{bmatrix} = 2/5 \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{y} = 2/5 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = 2/5 \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$2/5 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} + 2/5 \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \end{bmatrix} = 2/5 \begin{bmatrix} 7 - 2 \\ 1 + 14 \end{bmatrix} = 2/5 \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.17 Considera en $\mathbb{R}^3$ el plano W que pasa por el origen y por los puntos $(0,10,2)$ y $(4,10,2)$. Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (2,4,12)$ sobre W . Determina la distancia del punto $(2,4,12)$ al plano W y a la recta $W^\perp$.

Método 1

Para resolver el problema buscaremos la expresión de $\vec{v}$ en una base B que contenga los dos vectores generadores de W , que son $\vec{a} = (0,10,2)$ y $\vec{b} = (4,10,2)$, y un vector $\vec{z}_1 \in W^\perp$. Los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$, con $\vec{a} \in W$, $\vec{b} \in W$ y $\vec{z}_1 \in W^\perp$.

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ no forman una base ortogonal, por tanto no puedo aplicar la fórmula de la Sección 6.11.

Encontraremos que $W^\perp = \langle (0, -1, 5) \rangle$, por tanto podemos tomar $\vec{z}_1 = (0, -1, 5)$

En la base $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{z}_1\}$ las coordenadas de $\vec{v}$ son $(3/26, 1/2, 28/13)$, por tanto,

$$\vec{v} = 3/26 \vec{a} + 1/2 \vec{b} + 28/13 \vec{z}_1$$

Nos fijamos ahora en que $3/26 \vec{a} + 1/2 \vec{b} \in W$, por pertenecer $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y ser W subespacio vectorial; $28/13 \vec{z}_1 \in W^\perp$. Por tanto ya tenemos el vector $\vec{v}$ expresado como suma de un vector de W y otro de $W^\perp$,

$$\vec{v} = \text{proy}_W \vec{v} + \vec{z}$$

$$\text{proy}_W \vec{v} = 3/26 \vec{a} + 1/2 \vec{b} = (2, 6.15385, 1.23077)$$

$$\vec{z} = 28/13 \vec{z}_1 = (0, -2.15385, 10.7692)$$

La distancia de $\vec{v}$ al plano es la norma de $\vec{z}$,

$$d = \sqrt{0^2 + (-2.15385)^2 + 10.7692^2} = 10.9825$$

La distancia de $\vec{v}$ a la recta $W^\perp$ es la norma de $\text{proy}_W \vec{v}$, es decir:

$$d' = \sqrt{2^2 + (6.15385)^2 + 1.23077^2} = 6.5867$$

Método 2

Una vez obtenido $\vec{z}_1$ se obtiene la proyección de $\vec{v}$ sobre la recta $\langle \vec{z}_1 \rangle = W^\perp$:

$$\text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{z}_1}{\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1} \vec{z}_1 = \frac{28}{13} \vec{z}_1 = (0, -\frac{28}{13}, \frac{140}{13}) = (0, -2.15385, 10.7692)$$

A continuación:

$$\text{proy}_W \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = (2, 4, 12) - (0, -\frac{28}{13}, \frac{140}{13}) = (2, \frac{80}{13}, \frac{16}{13}) = (2, 6.15385, 1.23077)$$

Distancia al plano W es la norma de $\text{proy}_{W^\perp} \vec{v}$

Distancia al plano $W^\perp$ es la norma de $\text{proy}_W \vec{v}$

Método 3

Construimos una base ortogonal de W

$$\vec{v}_1 = (0, 10, 2), \text{ tomo mejor } \vec{u}_1 = (0, 5, 1)$$

$$\vec{v}_2 = (4, 10, 2) - \frac{(4, 10, 2) \cdot (0, 5, 1)}{(0, 5, 1) \cdot (0, 5, 1)} (0, 5, 1) = (4, 0, 0)$$

Tomamos $\vec{u}_2 = (1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \text{proy}_W \vec{v} &= (\vec{v} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 = \frac{(2, 4, 12) \cdot (0, 5, 1)}{26} \vec{u}_1 + (2, 4, 12) \cdot (1, 0, 0) \vec{u}_2 = \frac{32}{26} \vec{u}_1 + 2 \vec{u}_2 = \\ &= \frac{16}{13} (0, 5, 1) + 2 (1, 0, 0) = \frac{(0, 80, 16)}{13} + (2, 0, 0) = (2, \frac{80}{13}, \frac{16}{13}) = (2, 6.15385, 1.23077) \end{aligned}$$

Ejemplo 6.18 Sea $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Observa que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base ortogonal de $W = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$. Escribe $\vec{y}$ como suma de un vector de W y un vector perpendicular a W . Obtén la distancia de $\vec{y}$ a W y el punto de W más cercano a $\vec{y}$.

Por ser $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortogonal puedo aplicar la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W \vec{y} &= \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \\ &= \frac{(2+10-3)}{(4+25+1)} \vec{u}_1 + \frac{(-2+2+3)}{(4+1+1)} \vec{u}_2 = \frac{9}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{y} = \text{proy}_W \vec{y} + \vec{z} \quad \text{con } \vec{z} \in W^\perp$$

$$\vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_W \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix}$$

El punto más cercano es $(-2/5, 2, 1/5)$.

La distancia de $\vec{y}$ a W es la norma de $\vec{z} = 1/5(7, 0, 14)$:

$$d = 1/5 \sqrt{7^2 + 14^2} = 1/5 \sqrt{245} = 1/5 \sqrt{49 \times 5} = 7/\sqrt{5}$$

Ejemplo 6.19 Sea $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $W = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$. Obtén $\text{proy}_W \vec{y}$.

Se puede comprobar que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son ortogonales. Puedo entonces utilizar la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W \vec{y} &= \frac{(\vec{y} \cdot \vec{u}_1)}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{(\vec{y} \cdot \vec{u}_2)}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \frac{(63+1+24)}{(49+1+16)} \vec{u}_1 + \frac{(9+1-12)}{(1+1+4)} \vec{u}_2 = \frac{88}{66} \vec{u}_1 + \frac{-2}{6} \vec{u}_2 \\ &= \frac{4}{3} \vec{u}_1 + \frac{-1}{3} \vec{u}_2 = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28/3+1/3 \\ 4/3-1/3 \\ 16/3+2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27/3 \\ 3/3 \\ 18/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este caso sucede que $\vec{y}$ es una combinación lineal de $\vec{u}_1$ y de $\vec{u}_2$, por tanto $\vec{y}$ está en W . El punto más cercano de W a $\vec{y}$ es el propio $\vec{y}$.

6.14 Matriz de proyección ortogonal

Dado W subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, este vector se puede escribir de forma única como suma de un vector $\hat{\vec{y}} \in W$ y un vector $\vec{z} \in W^\perp$.

Si $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ es base de W , entonces

$\hat{\vec{y}} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_m \vec{a}_m$, que en forma matricial se escribe:

$$\hat{\vec{y}} = A \vec{c}, \text{ con } A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_m] \text{ y } \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad A_{n \times m}$$

$$\begin{aligned} \hat{\vec{y}} \perp (\vec{y} - \hat{\vec{y}}) &\Rightarrow (A \vec{c}) \cdot (\vec{y} - A \vec{c}) = 0 \Rightarrow \\ (A \vec{c})^t (\vec{y} - A \vec{c}) &= 0 \Rightarrow (\vec{c})^t A^t (\vec{y} - A \vec{c}) = 0 \Rightarrow \\ (\vec{c})^t (A^t \vec{y} - A^t A \vec{c}) &= 0 \Rightarrow A^t \vec{y} - A^t A \vec{c} = 0 \Rightarrow \boxed{A^t \vec{y} = A^t A \vec{c}} \quad [1] \end{aligned}$$

Una consecuencia de que las columnas de A sean base es que $A^t A$ es invertible. En efecto, se puede demostrar, aunque no veremos la demostración, que la matriz $A^t A$ es invertible si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes. Como hemos supuesto que las columnas de A forman base, las columnas son linealmente independientes.

Multiplicando la ecuación [1] por $(A^t A)^{-1}$ por la izquierda, obtenemos:

$$(A^t A)^{-1} A^t \vec{y} = \vec{c} \Rightarrow A(A^t A)^{-1} A^t \vec{y} = A \vec{c} = \hat{\vec{y}}$$

$$\boxed{\text{Matriz proyección ortogonal} = A (A^t A)^{-1} A^t \quad : \quad \hat{\vec{y}} = A (A^t A)^{-1} A^t \vec{y}}$$

La matriz $A^t A$ es simétrica pues $(A^t A)^t = A^t A$

$$A^t A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_m] = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_m \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_m \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_m \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_m \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_m \cdot \vec{a}_m \end{bmatrix}$$

(también podríamos deducir de aquí que como el producto escalar es conmutativo, la matriz $A^t A$ es simétrica.)

Caso particular: si la base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ es ortonormal entonces $A^t A = I$. En efecto el elemento (i, j) es $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$, 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. La matriz de proyección ortogonal se simplifica entonces:

$$\boxed{\text{Matriz proyección ortogonal} = A A^t \quad (\text{orden } n) \quad : \quad \hat{\vec{y}} = A A^t \vec{y}}$$

Propiedades de la matriz de proyección ortogonal

1. Llamando M_W a la matriz de proyección ortogonal sobre W y $M_{W^\perp}$ a la matriz de proyección ortogonal sobre $W^\perp$, $M_W + M_{W^\perp} = I$

$$M_W \vec{y} = \hat{\vec{y}}, \quad M_{W^\perp} \vec{y} = \vec{z},$$

$$M_W \vec{y} + M_{W^\perp} \vec{y} = \hat{\vec{y}} + \vec{z} = \vec{y} \Rightarrow M_W + M_{W^\perp} = I,$$

2. M_W es simétrica

$$\text{Demostración: } (M_W)^t = (A(AA^t)^{-1}A^t)^t = A[(AA^t)^{-1}]^t A^t = A(AA^t)^{-1}A^t = M_W$$

En la Unidad Temática 1 vimos que dada P invertible $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$, por tanto $[(AA^t)^{-1}]^t = [(AA^t)^t]^{-1} = (AA^t)^{-1}$

3. M_W es idempotente, es decir $M_W^2 = M_W$

Demostración: $A(AA^t)^{-1}A^tA(AA^t)^{-1}A^t = A(AA^t)^{-1}A^t$

Ejemplo 6.20 En $\mathbb{R}^2$ calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre $\langle (4, 2) \rangle$. Utiliza dicha matriz para calcular la proyección ortogonal del vector $(7, 6)$. Comprueba que el resultado es similar al obtenido en el ejemplo 6.15.

El subespacio sobre el que queremos proyectar es de dimensión uno, por tanto la base se puede considerar ortogonal, y sólo hay que dividir el vector por su norma.

$(4, 2)/\sqrt{20}$ es el vector base

$$AA^t = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{20} \\ 2/\sqrt{20} \end{bmatrix}_{2 \times 1} [4/\sqrt{20} \quad 2/\sqrt{20}]_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 16/20 & 8/20 \\ 8/20 & 4/20 \end{bmatrix} = 4/20 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^t \vec{y} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 28 + 12 \\ 14 + 6 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.21 En $\mathbb{R}^3$ calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre $W = \langle (0, 10, 2), (4, 10, 2) \rangle$. Utiliza dicha matriz para calcular la proyección ortogonal del vector $(2, 4, 12)$. Comprueba que el resultado es similar al obtenido en el ejemplo 6.17.

$$\bullet A^t A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 26 \\ 26 & 30 \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = 1/f \begin{bmatrix} 30 & -26 \\ -26 & 26 \end{bmatrix} \quad f = 26(30 - 26) = 26 * 4$$

$$(A^t A)^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} 15/13 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 1/4 \begin{bmatrix} 15/13 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25/26 & 5/26 \\ 0 & 5/26 & 1/26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25/26 & 5/26 \\ 0 & 5/26 & 1/26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 80/13 \\ 16/13 \end{bmatrix}$$

• Calculamos la matriz $M_{W^\perp}$ y posteriormente $M_W = I - M_{W^\perp}$

$W^\perp = \langle (0, -1, 5) \rangle$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = [26] \quad (A^t A)^{-1} = 1/26$$

$$M_{W^\perp} = A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} 1/26 [0 \quad -1 \quad 5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/26 & -5/26 \\ 0 & -5/26 & 25/26 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que $M_W + M_{W^\perp} = I$

6.15 Resolución de sistemas lineales incompatibles. Método de mínimos cuadrados

Partimos de un sistema $A\vec{x} = \vec{y}$, incompatible, con $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_m]$. El hecho de que el SL sea incompatible significa que $\vec{y}$ no es combinación lineal de las columnas de A , es decir,

$$\vec{y} \text{ no pertenece a } \langle \vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_m \rangle.$$

Aunque no podemos resolver el SL $A\vec{x} = \vec{y}$, sí tiene solución el SL $A\vec{x} = \hat{\vec{y}}$. Y como $\hat{\vec{y}}$ es la mejor aproximación de $\vec{y}$, consideramos que la solución del nuevo SL, compatible, y que denotamos $\vec{x}^*$ es la mejor aproximación a la solución del SL original, incompatible.

$\vec{x}^*$, tal que $A\vec{x}^* = \hat{\vec{y}}$, siendo $\hat{\vec{y}}$ la proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre las columnas de A , es la solución de mínimos cuadrados o aproximación de mínimos cuadrados del sistema incompatible.

La solución de mínimos cuadrados del SL incompatible $A\vec{x} = \vec{y}$ es $\vec{x}^*$, tal que $\boxed{A\vec{x}^* = \hat{\vec{y}}}$

La ecuación [1] de la sección 6.14, que reescribimos abajo, es el sistema de mínimos cuadrados, directamente en función de la matriz A y del vector $\vec{y}$:

$$\boxed{A^t A \vec{x}^* = A^t \vec{y}}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $\vec{x}^*$.

Si las columnas de A son linealmente independientes, $A^t A$ es inversible y podemos despejar $\vec{x}^*$:

$$\boxed{\vec{x}^* = (A^t A)^{-1} A^t \vec{y}}$$

Ejemplo 6.22 Demuestra que el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ siguiente no tiene solución. Encuentra la solución de mínimos cuadrados.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = (3, 5, 7, -3)$$

Solución:

$$\text{Ampliada} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ sistema incompatible. } \vec{b} \text{ no es}$$

combinación lineal de las columnas de A .

La mejor aproximación de $\vec{b}$ se obtendrá como la proyección ortogonal de $\vec{b}$ sobre el subespacio generado por las columnas de A , $\text{proy}_{\text{ColA}} \vec{b}$

• **Método 1**

- Obtener una base ortogonal de ColA
- Utilizar la fórmula

$$\hat{\vec{b}} = \text{proy}_{\text{ColA}} \vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 + \dots + \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}_p}{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_p} \vec{v}_p,$$

siendo p la dimensión de ColA.

Al obtener la forma escalonada por filas ya hemos visto que $\text{Col}A$ tiene dimensión 3, pues tenemos 3 columnas pivotaes en A .

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 3 & 3 & t \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & x \\ 0 & -2 & -5 & y-x \\ 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & z-y+t-x \end{bmatrix}$$

Ec. implícita de $\text{Col}A$: $z-y+t-x=0$ Forma paramétrica: $(x, y, z, x+y-z)$

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 1)$$

$\vec{v}_2$ debe cumplir $t = x + y - z$ y además ser ortogonal al anterior, por tanto

$(1, 0, 0, 1) \cdot (x, y, z, x+y-z) = x + x + y - z = 2x + y - z = 0$, por tanto $z = 2x + y$.
Por tomar z este valor se obtiene $t = x + y - 2x - y = -x$.

$\vec{v}_2$ tiene la forma $(x, y, 2x + y, -x)$

tomando $x = 0$ $y = 1$ se tiene $z = 1$ $t = 0$ $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$

$\vec{v}_3$ debe cumplir $t = -x$, $z = 2x + y$ por pertenecer al subespacio y ser ortogonal a $\vec{v}_1$. Como además debe ser ortogonal a $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$ deberá cumplir

$(0, 1, 1, 0) \cdot (x, y, 2x + y, -x) = y + 2x + y = 2x + 2y = 0$ por tanto $y = -x$.

De esta ecuación y las anteriores obtenemos: $y = -x$, $z = x$, $t = -x$. Por tanto $\vec{v}_3$ ha de tener una forma $(x, -x, x, -x)$, por ejemplo $\vec{v}_3 = (1, -1, 1, -1)$.

$B = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$ es base ortogonal de $\text{Col}A$

$$\vec{b}^* = \frac{(3, 5, 7, -3) \cdot (1, 0, 0, 1)}{2} \vec{v}_1 + \frac{(3, 5, 7, -3) \cdot (0, 1, 1, 0)}{2} \vec{v}_2 + \frac{(3, 5, 7, -3) \cdot (1, -1, 1, -1)}{4} \vec{v}_3 =$$

$$\frac{0}{2} \vec{v}_1 + \frac{12}{2} \vec{v}_2 + \frac{8}{4} \vec{v}_3 = 6 \vec{v}_2 + 2 \vec{v}_3 = 6(0, 1, 1, 0) + 2(1, -1, 1, -1) = (2, 4, 8, -2)$$

Ahora hay que resolver el sistema compatible de matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es compatible determinado, y la solución de mínimos cuadrados es $(10, -6, 2)$

Forma alternativa de calcular $\hat{\vec{b}}$:

Estamos en $\mathbb{R}^4$ y queremos proyectar ortogonalmente sobre un subespacio de dimensión 3. Será más sencillo proyectar sobre $(\text{Col}A)^\perp$, que tiene dimensión 1, y después obtener $\hat{\vec{b}} = \vec{b} - \text{proyección}$.

– Ec. implícita de $\text{Col}A$: $z - y + t - x = 0 \Rightarrow \vec{v} = (-1, -1, 1, 1)$ es base de $(\text{Col}A)^\perp$

$$\text{proy} = \frac{(3, 5, 7, -3) \cdot (-1, -1, 1, 1)}{4} \vec{v} = \frac{-4}{4} \vec{v} = (1, 1, -1, -1)$$

$$\hat{\vec{b}} = (3, 5, 7, -3) - (1, 1, -1, -1) = (2, 4, 8, -2)$$

– Otra forma: $(\text{Col}A)^\perp$ será el espacio con vectores (x, y, z, t) ortogonales a $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 3)$ y $(5, 0, 2, 3)$, por tanto las variables x, y, z, t verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (1, 1, 1, 1) \cdot (x, y, z, t) = x + y + z + t = 0 \\ (3, 1, 1, 3) \cdot (x, y, z, t) = 3x + y + z + 3t = 0 \\ (5, 0, 2, 3) \cdot (x, y, z, t) = 5x + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el SL de matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ mediante eliminación

gaussiana se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando t como parámetro, $z = t$, $y = -t$, $x = t - t - t = -t$, por tanto $(-t, -t, t, t)$ es el vector genérico y $\{(-1, -1, 1, 1)\}$ una base de $\text{Col}A^\perp$. Una vez obtenida la base la proyección se calcula como en el subapartado anterior.

- Método 2. Resolvemos este ejercicio aplicando la fórmula $A^t A \vec{x}^* = A^t \vec{b}$, que da directamente la solución de mínimos cuadrados.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 8 & 20 & 26 \\ 10 & 26 & 38 \end{bmatrix} \vec{x}^* = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

La solución que se obtiene es $x^* = (10, -6, 2)$

6.16 Ajuste de datos (x, y) mediante polinomios

Modelo polinomio de grado p : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p$

Datos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

Si los valores y_i cumplieran el modelo, el siguiente SL sería compatible.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 (x_1)^2 + \dots + a_p (x_1)^p = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 (x_2)^2 + \dots + a_p (x_2)^p = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 (x_n)^2 + \dots + a_p (x_n)^p = y_n \end{cases}$$

Sistema en notación matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & (x_1)^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & (x_2)^p \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & (x_n)^p \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Si los puntos no cumplen el modelo, la solución de mínimos cuadrados, es decir, el vector de coeficientes del polinomio de grado p que mejor ajusta los datos, se obtiene resolviendo el sistema $A^t A \bar{c}^* = A^t \bar{y}$

$$\begin{aligned} (\text{Deducción sencilla: } (A\bar{c}^*) \cdot (\bar{y} - A\bar{c}^*) = 0 &\Rightarrow (\bar{c}^*)^t A^t (\bar{y} - A\bar{c}^*) = 0 \Rightarrow \\ (\bar{c}^*)^t (A^t \bar{y} - A^t A \bar{c}^*) = 0 &\Rightarrow A^t \bar{y} = A^t A \bar{c}^* \end{aligned}$$

Se puede demostrar que una matriz con la forma de A , es decir, $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & (x_1)^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & (x_2)^p \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & (x_n)^p \end{bmatrix}$

tiene columnas linealmente independientes siempre que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, es decir, si en los datos no se repite ningún valor de x . Entonces, $A^t A$ es inversible, y podemos despejar:

$$\bar{c}^* = (A^t A)^{-1} A^t \bar{y}$$

Ejemplo 6.23 *Obtén el sistema lineal compatible de cuya solución se obtienen los coeficientes del polinomio de grado 2 que mejor ajusta (en el sentido de mínimos cuadrados) los datos $\{(-3, 10), (-2, 8), (-1, 7), (0, 6), (1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$. Calcula dicho polinomio y el error de ajuste.*

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 (x_1)^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 (x_2)^2 = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_7 + a_2 (x_7)^2 = y_7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 - 3 a_1 + 9 a_2 = 10 \\ a_0 - 2 a_1 + 4 a_2 = 8 \\ a_0 - 1 a_1 + 1 a_2 = 7 \\ a_0 + 0 a_1 + 0 a_2 = 6 \\ a_0 + 1 a_1 + 1 a_2 = 4 \\ a_0 + 2 a_1 + 4 a_2 = 5 \\ a_0 + 3 a_1 + 9 a_2 = 6 \end{cases} \quad [Ec.1]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A \\ \bar{c} \\ \bar{y} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 10 \\ 1 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 3 & -9 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Haciendo la eliminación gaussiana en cuatro filas ya vemos que el sistema es incompatible. Debemos pues resolver el sistema de mínimos cuadrados, que es:

$$\boxed{A^t A \bar{c}^* = A^t \bar{y}}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{bmatrix}$$

$$A^t \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ -21 \\ 207 \end{bmatrix}$$

El sistema de mínimos cuadrados es:

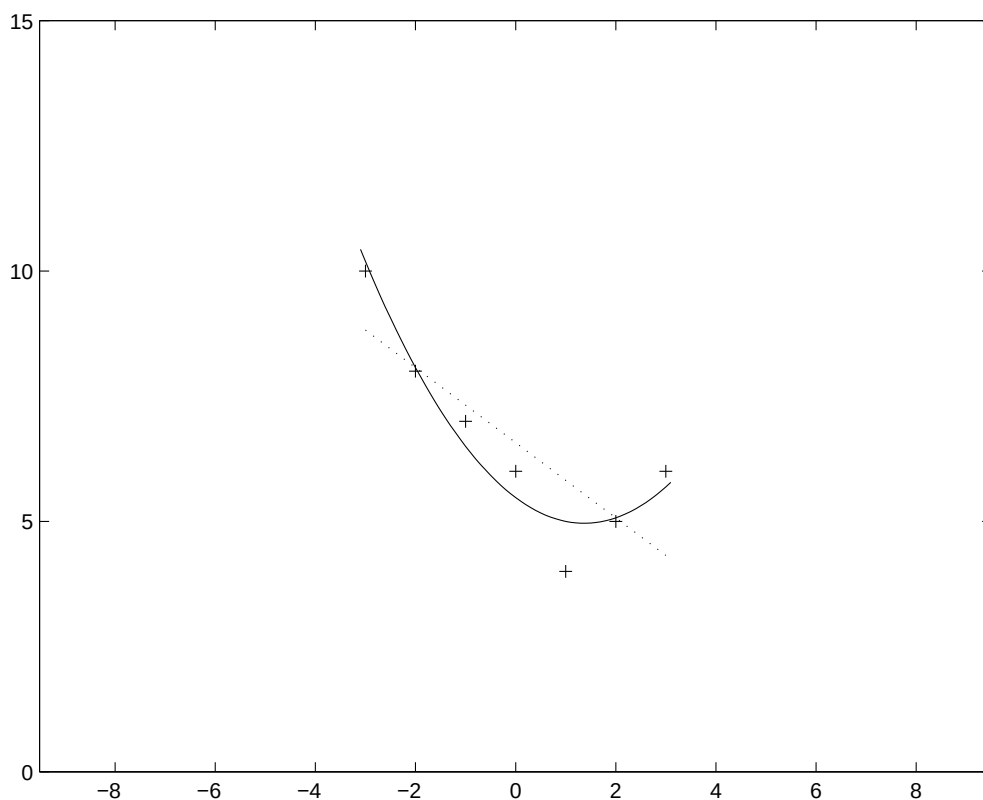
$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ -21 \\ 207 \end{bmatrix} \quad [Ec.2]$$

$\vec{c}^*$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 28 & 46 \\ 0 & 28 & 0 & -21 \\ 28 & 0 & 196 & 207 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 28 & 46 \\ 0 & 28 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 84 & 23 \end{array} \right] \quad \text{Aquí ya podemos despejar las incógnitas:}$$

$$\begin{cases} a_2 = 23/84 = 0.2738 \\ a_1 = -21/28 = -0.75 \\ a_0 = (46 - 28a_2)/7 = 5.4762 \end{cases}$$

El polinomio resultante: $p(x) = 5.4762 - 0.75x + 0.2738x^2$



La línea discontinua muestra el ajuste mediante una recta (Ejercicio 6.10)

Vamos a calcular ahora el error del ajuste. Sustituyendo los coeficientes en la ec. 1, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.4762 \\ -0.75 \\ 0.2738 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.19 \\ 8.07 \\ 6.50 \\ 5.48 \\ 5 \\ 5.07 \\ 5.69 \end{bmatrix} \quad a \text{ comparar con } \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon} = (0.19, 0.07, -0.50, -0.52, 1.00, 0.07, -0.31)$$

$$\varepsilon = \sqrt{(0.19)^2 + (0.07)^2 + (0.50)^2 + (0.52)^2 + (1.00)^2 + (0.07)^2 + (0.31)^2} = 1.29$$

$$\varepsilon_{\text{medio}} = 1.29/7 = 0.18$$

Ejemplo 6.24 Ajusta los datos de la tabla mediante una función de la forma $y = a e^{b x}$

x	2	4	6	8	10
y	5	8	11	21	36

Solución:

1. Obtenemos el logaritmo de la función del ajuste:

$$\log y = \log a + b x$$

2. Hacemos el cambio de variable $y' = \log y \Rightarrow y' = \log a + b x = c + b x$, siendo $c = \log a$

x	2	4	6	8	10
y	5	8	11	21	36
$y' = \log y$	1.61	2.08	2.40	3.04	3.58

3. Ajustamos los pares de puntos (x, y') mediante una recta, $y' = c + b x$. Para calcular (c, b) hay que resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.61 \\ 2.08 \\ 2.40 \\ 3.04 \\ 3.58 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.715 \\ 86.115 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $c = 1.069$ y $b = 0.2456$

$$a = e^c = e^{1.069} = 2.91$$

La función que mejor ajusta los datos es $y = 2.91 e^{0.2456 x}$

6.17 Endomorfismos ortogonales

En los capítulos 4 y 5 introducimos y analizamos las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ o endomorfismos en $\mathbb{R}^n$

Definición 6.13 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ es endomorfismo ortogonal si y sólo si $f(\vec{x}) = \vec{y} = Q\vec{x}$ siendo Q una matriz ortogonal.

Teorema 6.9 *El endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ es ortogonal si y sólo si deja invariante el producto escalar, es decir $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$*

Demostración: $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x}^t A^t A \vec{y} = \vec{x}^t \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$

La tercera igualdad se tiene si y sólo si $A^t A = I$ es decir, si y sólo si A es ortogonal ■

PROPIEDADES:

- Todo endomorfismo ortogonal es biyectivo, pues la matriz Q es regular y por tanto $\text{rango } Q = n$
- Todo endomorfismo ortogonal transforma bases ortonormales en bases ortonormales. En efecto, por la invarianza del producto escalar, si en el conjunto inicial $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \delta_{ij}$, $f(\vec{x}_i) \cdot f(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$

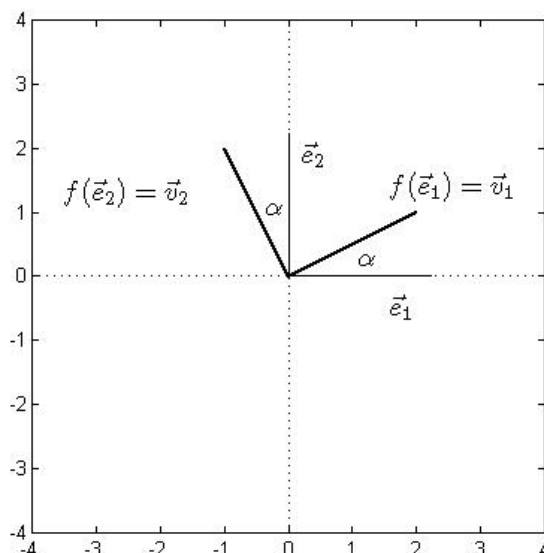
Recuerde que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

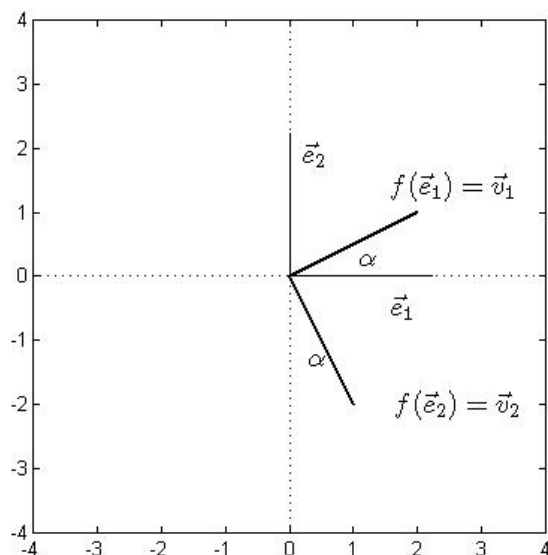
Esta es una relación de equivalencia o “si y sólo si”, es decir, f endomorfismo es ortogonal si y sólo si transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

- Todo endomorfismo ortogonal conserva la norma de un vector: $\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\|$
- Todo endomorfismo ortogonal conserva el ángulo formado por dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Se entiende fácilmente teniendo en cuenta la expresión del ángulo, que sólo depende del producto escalar y de las normas.

6.18 Los endomorfismos ortogonales del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$

Teniendo en cuenta que las imágenes de la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ deben ser base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, tenemos dos posibilidades y ambas están representadas en la figura.



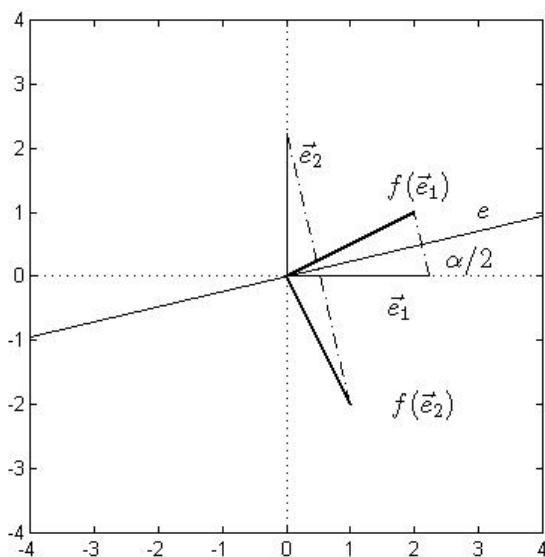


Las matrices de estos endomorfismos respecto de la base canónica son:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

La interpretación geométrica es muy sencilla. En el primer caso es un **giro de centro 0 y amplitud α** .

La segunda es la **simetría axial respecto del eje e** , que también podíamos definir como **simetría ortogonal respecto de la recta e** . Para la matriz anterior el eje e forma un ángulo $\alpha/2$ con el eje X_1 . La simetría axial respecto del eje e asigna al vector $\vec{OX}$ el vector $\vec{OY}$ tal que el eje e esté en la mediatriz de los dos vectores. Ver figura.



CONCLUSION: Un endomorfismo ortogonal f definido en $\mathbb{R}^2$ se representa en un diagrama cartesiano de ejes perpendiculares (sistema estándar) por un giro de centro 0 o por una simetría axial cuyo eje e pase por 0.

6.19 Ejercicios

Ejercicio 6.1 a) Dado el vector $\vec{v} = (3, 1, -1)$, descomponerlo como suma de un vector de W y otro de $W^\perp$, siendo W el plano dado por la ecuación $-x + y + z = 0$.

b) Obtén el **vector simétrico de $\vec{v}$ respecto de W** , definiendo como $\vec{v}' = \text{proy}_W \vec{v} - \text{proy}_{W^\perp} \vec{v}$

c) Calcula el área del triángulo de vértices $\vec{0}$, $\vec{v}$ y $\vec{v}'$.

Ejercicio 6.2 Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$: $W_1 = \{x + 3y = 0, x + z = 0\}$, $W_2 = \{x = 0, y = 0\}$, $W_3 = \{x + 2y + 3z = 0\}$, $W_4 = \{x + 2y + 3z = 0, 2x + 4y + 6z = 0\}$. Hallar una base de estos subespacios y calcular los correspondientes complementos ortogonales.

Ejercicio 6.3 En $\mathbb{R}^4$ hallar la proyección ortogonal del vector $(0, 2, 1, -1)$ sobre el subespacio $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0\}$

Ejercicio 6.4 En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z - t = 0\}$

a) Calcula una base ortonormal de S .

b) Calcula una base ortonormal de $S^\perp$.

c) Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (1, 0, 1, 1)$ sobre S .

d) Calcula la distancia de $\vec{v}$ a S .

Ejercicio 6.5 Encuentra la distancia de $\vec{y}$ a $W = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, donde $\vec{y} = (-1, -5, 10)$, $\vec{u}_1 = (5, -2, 1)$ y $\vec{u}_2 = (1, 2, -1)$.

Ejercicio 6.6 Supongamos dos clases de alimento, A y B , con las cantidades de vitamina C , calcio y magnesio dadas en la tabla siguiente. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	2
Calcio	5	4
Magnesio	3	2

Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener un aporte exacto $\vec{v} = (17 \text{ mg de vitamina } C, 54 \text{ mg de calcio}, 31 \text{ mg de magnesio})$

Determina el aporte más cercano al aporte exacto que se podría conseguir combinando los dos alimentos.

Ejercicio 6.7 Sea $B = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ base del subespacio W . Calcula una base ortonormal de W y la ecuación implícita de W .

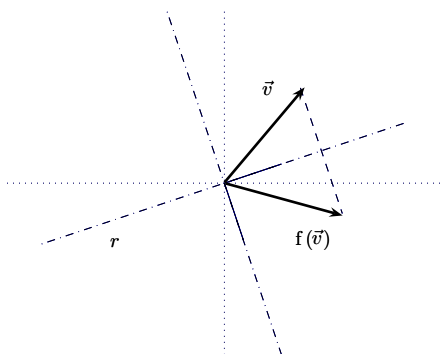
Ejercicio 6.8 Demuestra que no es posible expresar el vector $\vec{v} = (30, 20, 6, -10)$ como combinación lineal de los vectores de la base B , siendo $B = \{(-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2)\}$. Obtén los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de B que dan el vector más cercano a $\vec{v}$. (EXAMEN CONVOCATORIA DE FEBRERO, CURSO 04-05)

Ejercicio 6.9 Obtén la recta que mejor aproxima (en el sentido de mínimos cuadrados), los siguientes pares de puntos:

x	y
2	1
5	2
7	3
8	3

Ejercicio 6.10 Obtén la recta que mejor aproxima (en el sentido de mínimos cuadrados), los pares de puntos del Ejemplo 6.23. Determina el error total del ajuste y el error promedio.

Ejercicio 6.11 (EXAMEN 05-06 SEPTIEMBRE) Considérese la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la simetría ortogonal respecto de la recta r , siendo la ecuación vectorial paramétrica de r $\vec{x} = (0, 0) + \lambda(3, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



- Determine la matriz M asociada a esta aplicación lineal respecto de la base $B = \{(3, 1), (1, -3)\}$ (0.5 puntos)
- Determine la matriz A asociada respecto de la base canónica. (0.8 puntos)
- La imagen por f del vector $OP = (5, 6)$, siendo $O = (0, 0)$ (0.25 puntos)
- La imagen por f del vector $OQ = (6, 8)$, siendo $O = (0, 0)$ (0.25 puntos)
- La ecuación de la recta que contiene a los puntos P y Q , en la forma $y = ax + b$ (0.2 puntos)
- La ecuación de la recta que contiene a los puntos P' y Q' , siendo $OP' = f(OP)$ y $OQ' = f(OQ)$, expresándola como $y = ax + b$ (0.2 puntos)
- El vector proyección ortogonal de OP sobre r (0.5 puntos)
- La distancia del punto P a la recta r (0.25 puntos)
- El ángulo (en grados) formado por el vector OP con la recta r (0.25 puntos)
- La expresión del vector OP como suma de un vector de r y otro perpendicular a r . (0.5 puntos)

6.20 Soluciones

6.1

a) Los (x, y, z) de W verifican $-x + y + z = 0$

$n = (-1, 1, 1)$ es ortogonal a todo vector de W , por tanto $W^\perp = \langle (-1, 1, 1) \rangle$.

$$\vec{v} = (3, 1, -1) = \text{proy}_W \vec{v} + \text{proy}_{W^\perp} \vec{v}$$

$$\text{proy}_{W^\perp} \vec{v} = \frac{(3, 1, -1) \cdot (-1, 1, 1)}{3} (-1, 1, 1) = \frac{-3 + 1 - 1}{3} (-1, 1, 1) = (1, -1, -1)$$

$$(3, 1, -1) - (1, -1, -1) = (2, 2, 0)$$

$$(3, 1, -1) = \underbrace{(1, -1, -1)}_{\in W^\perp} + \underbrace{(2, 2, 0)}_{\in W}$$

b) vector simétrico $\vec{v}' = (2, 2, 0) - (1, -1, -1) = (1, 3, 1)$

$$\text{c) Área} = \sqrt{3}\sqrt{8} = \sqrt{24}$$

6.3 Solución: $(-1, 1, 1, -1)$

6.4

a) S tiene 4 variables y una ecuación implícita por tanto $\dim S = 3$. Vamos a obtener a continuación una base ortogonal.

El vector más simple de S es $\vec{v}_1 = (0, 1, 0, 0)$, que además ya tiene norma 1.

Un vector de S ortogonal a $\vec{v}_1$ tiene que verificar:

$$\begin{cases} x = z + t \\ (z + t, y, z, t) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + t \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Como ejemplo simple: } \vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$$

A continuación tenemos que calcular un vector de S ortogonal a los dos anteriores. Por tanto cumplirá las dos ecuaciones anteriores y además:

$$(z + t, 0, z, t) \cdot (1, 0, 1, 0) = 0 \Rightarrow z + t + z = 2z + t = 0 \Rightarrow t = -2z$$

Por tanto: $y = 0$, $x = z + t = z - 2z = -z$, $t = -2z$. El vector genérico será $(-z, 0, z, -2z)$ y el más sencillo $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1, -2)$

Comprobaciones:

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1, 0) = 0$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 1, -2) = 0$$

$$(1, 0, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1, -2) = -1 + 1 = 0$$

Base ortonormal:

$$B = \left\{ (0, 1, 0, 0), \frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1, 0, 1, -2)}{\sqrt{6}} \right\}$$

b) Base ortonormal de $S^\perp$

Un vector genérico de S cumple: $x - z - t = 0$, que puedo expresar como $(x, y, z, t) \cdot (1, 0, -1, -1) = 0$, por tanto un vector $(x, y, z, t) \in S$ es aquel que es ortogonal a $(1, 0, -1, -1)$.

$\alpha(1, 0, -1, -1)$ será también ortogonal a $(x, y, z, t) \in S$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, por tanto:

$$S^\perp = \langle (1, 0, -1, -1) \rangle$$

Base ortonormal:

$$B = \left\{ \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} \right\}$$

c) $\vec{v} = \text{proy}_S \vec{v} + \text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$

Es más fácil calcular la proyección sobre $S^\perp$ que la proyección sobre S , puesto que $S^\perp$ tiene dimensión uno (una recta en $\mathbb{R}^4$) mientras que S tiene dimensión 3. Por tanto obtendremos en primer lugar $\text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$ y a continuación $\text{proy}_S \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$.

$$\text{proy}_{S^\perp} \vec{v} = (1, 0, 1, 1) \cdot \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{1 - 1 - 1}{\sqrt{3}} \frac{(1, 0, -1, -1)}{\sqrt{3}} = \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3}$$

$$\text{proy}_S \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{S^\perp} \vec{v} = (1, 0, 1, 1) - \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3} = \frac{(4, 0, 2, 2)}{3}$$

d) La distancia de $\vec{v}$ a S es igual a la norma de $\text{proy}_{S^\perp} \vec{v}$

$$d = \|\text{proy}_{S^\perp} \vec{v}\| = \left\| \frac{(-1, 0, 1, 1)}{3} \right\| = \frac{1}{3} \sqrt{1+1+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

6.6

Para determinar si el aporte (17,54,31) se puede obtener combinando x unidades de alimento A con aporte (1,5,3) e y unidades de B con aporte (2,4,2) hay que resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$x(1, 5, 3) + y(2, 4, 2) = (17, 54, 31)$$

Por tanto el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y = 17 \\ 5x + 4y = 54 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases}$$

, con matriz ampliada $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 17 \\ 5 & 4 & | & 54 \\ 3 & 2 & | & 31 \end{bmatrix}$

$$A^* \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 17 \\ 0 & -6 & | & -31 \\ 0 & -4 & | & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 17 \\ 0 & -6 & | & -31 \\ 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 17 \\ 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & -6 & | & 31 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 17 \\ 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

El SL es incompatible pues $\text{rg}A=2$ y $\text{rg}A^*=3$

Esto significa que $\vec{v}$ no es combinación lineal de $\vec{a} = (1, 5, 3)$ y $\vec{b} = (2, 4, 2)$. O dicho de otra forma, que $\vec{v}$ no pertenece al plano $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

El vector más cercano a $\vec{v} = (17, 54, 31)$ que se puede obtener combinando los alimentos A y B será la proyección de $\vec{v}$ sobre el subespacio generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto tenemos que obtener:

$$\text{proy}_W \vec{v}, \text{ siendo } W = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

Tomamos $W = \langle (1, 5, 3), (2, 4, 2) \rangle$, y nos falta un vector $(z_1, z_2, z_3) \in W^\perp$.

$$(1, 5, 3) \cdot (z_1, z_2, z_3) = 0$$

$$(2, 4, 2) \cdot (z_1, z_2, z_3) = 0$$

$$\begin{cases} z_1 + 5z_2 + 3z_3 = 0 \\ z_1 + 2z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 \\ 0 & -3 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$-3z_2 - 2z_3 = 0 \Rightarrow z_2 = -2/3z_3$$

$$z_1 = -5z_2 - 3z_3 = 10/3z_3 - 3z_3 = 1/3z_3$$

$$W^\perp = \langle (1/3, -2/3, 1) \rangle \text{ o más simple } W^\perp = \langle (1, -2, 3) \rangle$$

Expresando $(17, 54, 31)$ en la base $B = \{(1, 5, 3), (1, 2, 1), (1, -2, 3)\}$ obtenemos:

$$(17, 54, 31) = 48/7(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1) + 1/7(1, -2, 3)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{proy}_W \vec{v}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{proy}_{W^\perp} \vec{v}}$$

$$\text{proy}_W \vec{v} = 48/7(1, 5, 3) + 10(1, 2, 1) = (118/7, 380/7, 214/7) = (16.8571, 54.2857, 30.5714)$$

Este es el aporte más cercano posible

6.7

Para calcular la base ortonormal utilizaremos el método de Gram-Schmidt

Reordenamos la base poniendo los vectores con más ceros al principio, por tanto $B = \{(0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.

$$\vec{v}_1 = \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \vec{x}_2 - \vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1 \vec{v}_1$$

ya que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 1$ por ser $\vec{v}_1$ unitario

$$\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 1) - (0, 1, 1, 1) \cdot \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}} \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}} = (0, 1, 1, 1) - \sqrt{2} \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}} =$$

$$(0, 1, 1, 1) - (0, 0, 1, 1) = (0, 1, 0, 0)$$

este vector ya está normalizado

$$\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 = \vec{x}_3 - \vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1 \vec{v}_1 - \vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_3 = (1, 1, 1, 1) - (1, 1, 1, 1) \cdot \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}} \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}} - (1, 1, 1, 1) \cdot (0, 1, 0, 0) (0, 1, 0, 0) =$$

$$= (1, 1, 1, 1) - \sqrt{2} \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}} - (0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1) - (0, 0, 1, 1) - (0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

El vector ya está normalizado

$$B' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}}\}$$

Obtención de la ecuación implícita de W :

Sea $(x, y, z, t) \in W$, entonces (x, y, z, t) es combinación lineal de los vectores de cualquier base de W . Tomaremos la base B' por ser más simple.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & t - z \end{bmatrix} \text{ compatible } \Leftrightarrow (t - z) = 0$$

Por tanto la ecuación implícita es $t - z = 0$

OBSERVACIÓN: También podríamos haber resuelto el problema con los siguientes pasos:

- 1) Obtención de la ec. implícita utilizando la base B , con lo que obtendríamos $t = z$
- 2) Obtención de una base ortonormal a partir de la ec. implícita:

- $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$ verifica $t = z$ y tiene norma 1
- $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$ verifica $t = z$, es ortogonal a $\vec{v}_1$ y tiene norma 1
- $\vec{v}_3 = \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$ verifica $t = z$, es ortogonal a los dos primeros, y tiene norma 1

6.8

La solución es: $c_1 = 11/2$, $c_2 = 17/2$

6.9

Resolveremos este ejercicio de ajuste de una nube de puntos en el plano (x, y) mediante una recta, por mínimos cuadrados, sin utilizar las fórmulas de la sección 6.17 que nos dan directamente los coeficientes a y b de la recta.

Si los pares de puntos (x_i, y_i) se encontraran en una recta, con pendiente a y corte con el eje de ordenadas b , cada par verificaría la ecuación de la forma $y = ax + b$, y el conjunto de puntos verificaría el sistema:

$$\begin{cases} b + ax_1 = y_1 \\ b + ax_2 = y_2 \\ b + ax_3 = y_3 \\ b + ax_4 = y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Si los puntos no pasan por una recta, no existe ninguna solución (a, b) del sistema anterior, o dicho de otra forma, el sistema es incompatible.

Para la nube de puntos del enunciado, la matriz ampliada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{array} \right]$$

y el sistema es incompatible, $rgA = 2$, $rgA^* = 3$

La solución de mínimos cuadrados se obtiene resolviendo el sistema $A\vec{x} = \vec{b}^*$, siendo $\vec{b}^* = \text{proy}_{\langle (1,1,1,1), (2,5,7,8) \rangle} (1, 2, 3, 3)$

Calcularemos $\vec{b}^*$ por el siguiente método: obtenemos base ortogonal del subespacio sobre el que queremos proyectar utilizando Gram-Schmidt, y seguidamente utilizamos la fórmula de proyección ortogonal sobre un espacio del que conocemos base ortogonal.

Gram-Schmidt:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1),$$

$$(2, 5, 7, 8) - \text{proy}_{\langle(1,1,1,1)\rangle}(2, 5, 7, 8) = (2, 5, 7, 8) - \frac{2+5+7+8}{1+1+1+1}(1, 1, 1, 1) =$$

$$(2, 5, 7, 8) - \frac{22}{4}(1, 1, 1, 1) = (2, 5, 7, 8) - \frac{11}{2}(1, 1, 1, 1) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow v_2 = (-7, -1, 3, 5)$$

$$\vec{b}^* = \frac{(1, 2, 3, 3) \cdot (1, 1, 1, 1)}{4}(1, 1, 1, 1) + \frac{(1, 2, 3, 3) \cdot (-7, -1, 3, 5)}{49 + 1 + 9 + 25}(-7, -1, 3, 5) =$$

$$\frac{9}{4}(1, 1, 1, 1) + \frac{-7 - 2 + 9 + 15}{49 + 1 + 9 + 25}(-7, -1, 3, 5) = \frac{9}{4}(1, 1, 1, 1) + \frac{15}{84}(-7, -1, 3, 5) =$$

$$\frac{9}{4}(1, 1, 1, 1) + \frac{5}{28}(-7, -1, 3, 5) = \left(1, \frac{29}{14}, \frac{39}{14}, \frac{22}{7}\right)$$

Resolviendo el SL de matriz ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 29/14 \\ 1 & 7 & 39/14 \\ 1 & 8 & 22/7 \end{array} \right]$, que ya es compatible, obtenemos

$b = 2/7$ (incógnita de la primera columna) y $a = 5/14$ (incógnita de la segunda columna). Por tanto la ecuación de la recta de mínimos cuadrados es:

$$y = \frac{5}{14}x + \frac{2}{7}$$

El ajuste es el mejor posible en el sentido de que la distancia entre los valores de las ordenadas (y_1, y_2, y_3, y_4) y los valores esperados para la recta $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ es mínima.

6.10

La ecuación de la recta es $y = b + ax$

Si todos los datos están en la recta, el sistema siguiente es compatible:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Comenzamos su resolución por eliminación gaussiana.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

sumando fila 1 y fila 7 tenemos $2b = 16$

sumando fila 2 y fila 6 tenemos $2b = 13$, por tanto confirmado que el SL es incompatible.

La solución más cercana se obtiene resolviendo el sistema:

$$A^t A \vec{c} = A^t \vec{y}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$A^t \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hay que resolver } \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 46 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & | & 46 \\ 0 & 28 & | & -21 \end{bmatrix} \Rightarrow a = -21/28 = -0.75, \quad b = 46/7 = 6.57$$

$$p(x) = 6.57 - 0.75x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.57 \\ -0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.82 \\ 8.07 \\ 7.32 \\ 6.57 \\ 5.82 \\ 5.07 \\ 4.32 \end{bmatrix} = \vec{y}_{\text{ajuste}}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{y} - \vec{y}_{\text{ajuste}} = (1.179, -0.071, -0.321, -0.571, -1.821, -0.071, 1.679)$$

$$\|\vec{\varepsilon}\| = 2.82$$

$$\|\vec{\varepsilon}\| / 7 = 0.40$$

El error es mayor que el obtenido para el ajuste mediante un polinomio de grado 2.

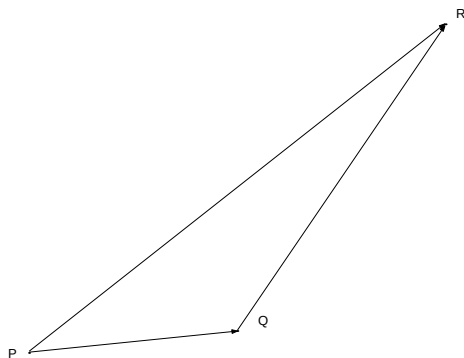
CAPÍTULO 7

Geometría en el espacio afín

7.1 Espacio afín

Definición 7.1 El espacio afín (tridimensional) está constituido por los siguientes elementos. Un conjunto E_3 (a cuyos elementos se les llama puntos), el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y una aplicación, que a cada par de puntos (P, Q) le asigna un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, que se denota $\vec{v} = \vec{PQ}$, todo ello de manera que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

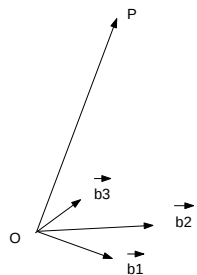
- Para cada punto $P \in E_3$ y cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, existe un único $Q \in E_3$ que satisface $\vec{v} = \vec{PQ}$.
- Dados tres puntos P, Q , y $R \in E_3$, se tiene $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$.



$$\vec{v} = \vec{PQ}$$

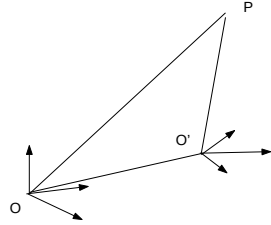
El concepto de distancia entre puntos se hereda de la estructura de espacio Euclídeo:
 $d(P, Q) = \| \vec{PQ} \|$

Definición 7.2 Dado un punto origen $O \in E_3$ y una base de $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, se dice que $\{O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es una **referencia cartesiana** de E_3 . Cuando la base es ortonormal la referencia se denomina **rectangular**. Se definen las **coordenadas cartesianas** de un punto $P \in E_3$ respecto a dicha referencia como las coordenadas del vector $\vec{OP}$ en la base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.



Cambio de sistema de referencia

El cambio de coordenadas en el espacio afín es una consecuencia directa de los cambios de bases en espacios vectoriales. Supongamos un punto P con coordenadas (x_1, x_2, x_3) en un sistema de referencia $\{O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ y (x'_1, x'_2, x'_3) en otra referencia $\{O'; \vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$. La relación entre ambas coordenadas viene dada por



$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \quad [1]$$

$$\underbrace{x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3}_{\vec{OP}} = \underbrace{w_1 \vec{b}_1 + w_2 \vec{b}_2 + w_3 \vec{b}_3}_{\vec{OO'}} + \underbrace{x'_1 \vec{b}'_1 + x'_2 \vec{b}'_2 + x'_3 \vec{b}'_3}_{\vec{O'P}}$$

(x'_1, x'_2, x'_3) son las coordenadas de $\vec{O'P}$ respecto de la base $\{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\}$. Es decir, $[\vec{O'P}]_{B'} = (x'_1, x'_2, x'_3)$.

El cambio de coordenadas de la base B' a la base B se realiza a través de la correspondiente matriz de cambio de base Q :

$$Q[\vec{O'P}]_{B'} = [\vec{O'P}]_B$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}x'_1 + q_{12}x'_2 + q_{13}x'_3 \\ q_{21}x'_1 + q_{22}x'_2 + q_{23}x'_3 \\ q_{31}x'_1 + q_{32}x'_2 + q_{33}x'_3 \end{bmatrix}$$

$$Q \quad [\vec{O'P}]_{B'} \quad [\vec{O'P}]_B$$

Una vez que conocemos las coordenadas de todos los vectores de la ecuación [1] respecto de la base B , podemos escribir la ecuación, respecto a esta base, como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

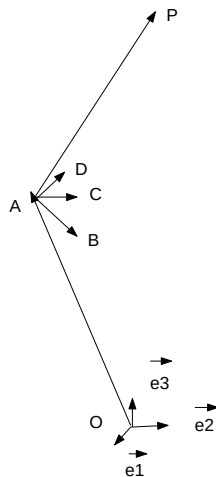
P en ref O, B

O' en ref O, B

P en ref O', B'

Ejemplo 7.1 En el espacio afín, respecto de una base cartesiana $\{\vec{0}; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideran los puntos $A = (3, 1, -2)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (1, 0, -1)$ y $D = (4, 3, -2)$. Las coordenadas de un punto P en el nuevo sistema de referencia $\{A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ son (x', y', z') . Hallar las coordenadas en el sistema original.

Solución:



$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (2, 2, 0) - (3, 1, -2) = (-1, 1, 2) \\ \vec{AC} &= (1, 0, -1) - (3, 1, -2) = (-2, -1, 1) \\ \vec{AD} &= (4, 3, -2) - (3, 1, -2) = (1, 2, 0)\end{aligned}$$

$$\vec{AP} = x' \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

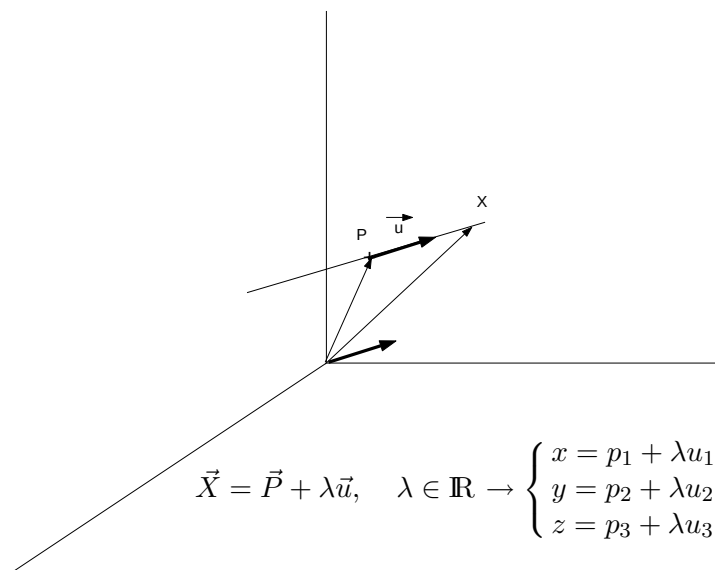
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

7.2 Ecuaciones de rectas y planos

Obtendremos las ecuaciones de rectas y planos, la intersección entre rectas y planos y sus posiciones relativas.

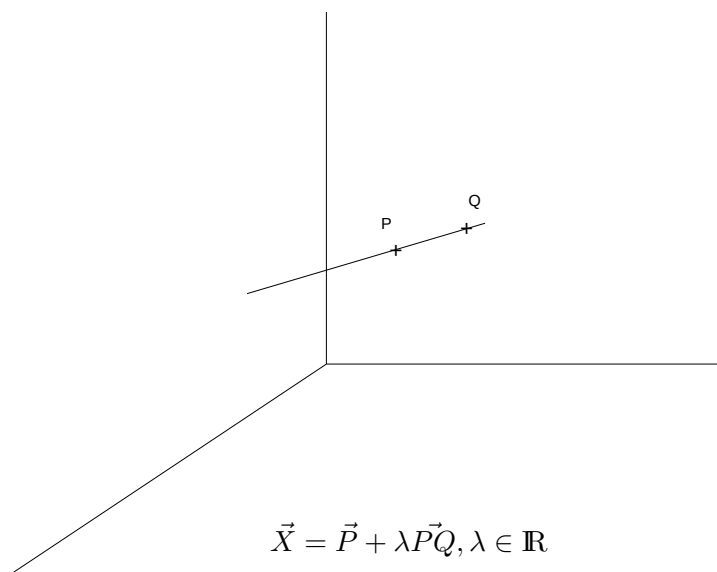
7.2.1 Ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuación continua de una recta

Definición 7.3 Dados un punto P y un vector no nulo $\vec{u}$, la **recta** que pasa por P y tiene la dirección de $\vec{u}$ está formada por los puntos $X = (x, y, z)$ tales que $\vec{PX} = \lambda \vec{u}$, es decir:



Estas son la **ecuación vectorial paramétrica** y las **ecuaciones (escalares) paramétricas** de la recta.

Otra forma de definir una recta es a través de su paso por dos puntos P y Q . La ecuación vectorial de esta recta será:



A partir de las ecuaciones paramétricas, despejando λ obtenemos la ecuación de la recta en **forma continua**:

$$\frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3} \quad \text{si } u_1, u_2, u_3 \neq 0$$

Si $u_1 = 0$ de la ec. paramétrica se deduce $x = p_1$

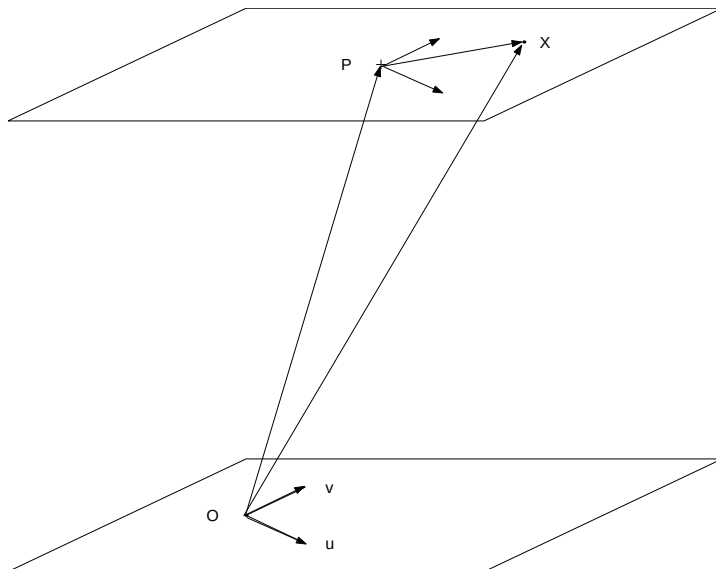
Si $u_2 = 0$ de la ec. paramétrica se deduce $y = p_2$

Si $u_3 = 0$ de la ec. paramétrica se deduce $z = p_3$

u_1, u_2, u_3 no pueden ser simultáneamente cero, pues si el vector director es $(0,0,0)$ la recta se reduciría al punto P .

7.2.2 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de un plano

Definición 7.4 Dados un punto P y dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el **plano** que pasa por P y tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como sus vectores dirección está formada por los puntos $X = (x, y, z)$ tales que $\vec{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$



$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Estas son la **ecuación vectorial paramétrica** y las **ecuaciones (escalares) paramétricas** del plano.

Otra forma de definir un plano es a través de su paso por tres puntos P , Q y R . La ecuación vectorial de este plano será por ejemplo:

$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{PQ} + \mu\vec{PR}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

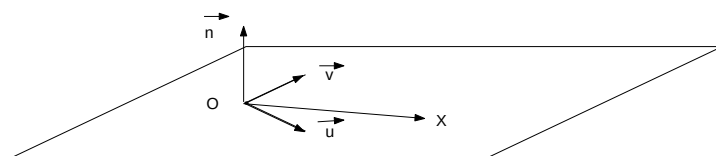
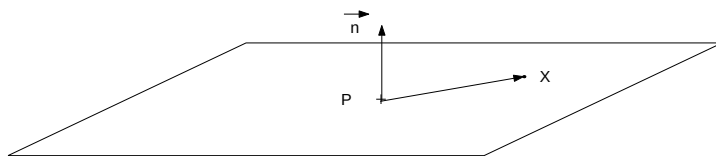
7.2.3 Ecuación general del plano o ec. implícita del plano. Vector normal

En la sección anterior vimos que $\vec{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, lo que implica que el determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante nos queda una ecuación de la forma: $Ax + By + Cz + D = 0$, que es la **Ecuación general del plano**, también denominada **ecuación en forma implícita del plano**.

Veremos a continuación como (A, B, C) nos da precisamente la dirección perpendicular al plano.



Los planos π_0 y π_1 que pasan por $\vec{0}$ y por P , respectivamente, tienen el mismo vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$, y por tanto son paralelos entre sí.

- π_0

Los puntos $X = (x, y, z)$ del plano π_0 serán tales que $\vec{n} \cdot \vec{OX} = 0$, por tanto

$$(A, B, C) \cdot (x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$$

La ecuación implícita es: $Ax + By + Cz = 0$

- π_1

Los puntos $X = (x, y, z)$ del plano π_1 serán tales que $\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$, por tanto

$$(A, B, C) \cdot (x - p_1, y - p_2, z - p_3) = Ax + By + Cz - Ap_1 - Bp_2 - Cp_3 = 0$$

La ecuación implícita de π_2 es: $Ax + By + Cz + D = 0$,

con $D = -Ap_1 - Bp_2 - Cp_3$

El conjunto de todos los planos paralelos, con vector normal (perpendicular) $\vec{n} = (a_1, a_2, a_3)$, viene dado por la ecuación: $a_1x + a_2y + a_3z + a = 0, \quad a \in \mathbb{R}$

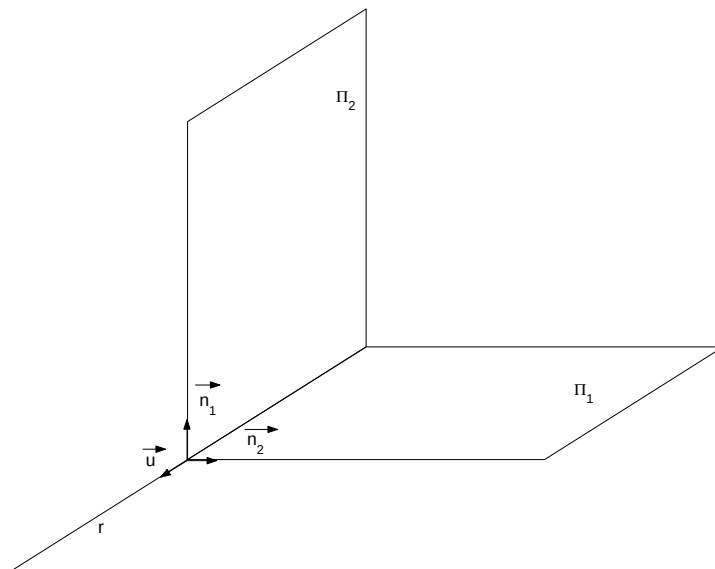
7.2.4 Recta mediante ecuaciones implícitas

Una recta siempre se podrá escribir como la intersección de dos planos, a cada plano le corresponde una ecuación implícita y el sistema formado por estas dos ecuaciones constituye la expresión de la recta en forma implícita. El sistema tendrá la forma:

$$r = \begin{cases} a + a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b + b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

La matriz formada por los vectores (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) tendrá rango 2, a fin de que los planos no se solapen, ni sean paralelos.

Por comodidad, para la representación gráfica tomamos los planos como perpendiculares.



- La dirección $\vec{u}$ de la recta r se puede obtener a partir del producto vectorial de $\vec{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Comprobación de que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{n}_1$ y a $\vec{n}_2$:

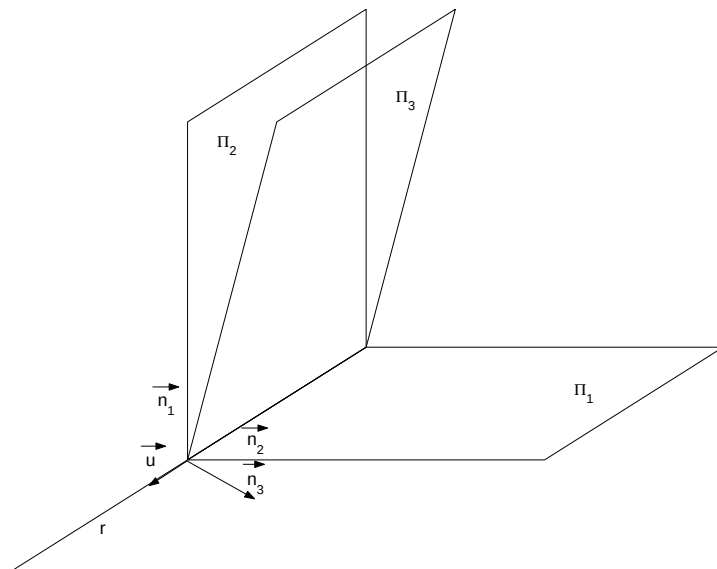
$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_1, a_2, a_3) = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (b_1, b_2, b_3) = b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 + b_2a_3b_1 - b_2a_1b_3 + b_3a_1b_2 - b_3a_2b_1 = 0$$

- El plano perpendicular a r que pasa por P tiene de ecuación vectorial paramétrica:
 $\pi : \vec{X} = \vec{P} + \lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2$

7.2.5 Haz de planos que tienen por arista la recta r

Considerando la recta de la sección anterior, definida por la intersección de los planos π_1 y π_2 , un plano del haz definido por la recta habrá de cumplir las siguientes condiciones:



- Ha de tener como vector normal $\vec{n}$, un vector que sea combinación lineal de $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, es decir

$$\vec{n} = \lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2 = (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3)$$

por tanto su ecuación será

$$(\lambda a_1 + \mu b_1)x + (\lambda a_2 + \mu b_2)y + (\lambda a_3 + \mu b_3)z + D = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

que también podemos escribir como:

$$\lambda(a_1x + a_2y + a_3z) + \mu(b_1x + b_2y + b_3z) + D = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad [2a]$$

- La recta r está incluida en él. Los puntos de la recta r verifican

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = -a \\ b_1x + b_2y + b_3z = -b \end{cases},$$

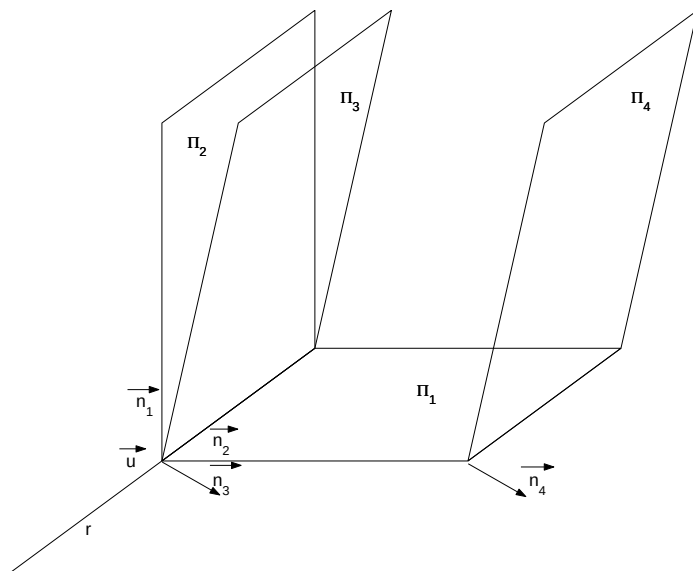
y sustituyendo en [2a] se obtiene $\lambda(-a) + \mu(-b) + D = 0$, por tanto $D = \lambda a + \mu b$ y la ecuación [2a] pasa a

$$\lambda(a + a_1x + a_2y + a_3z) + \mu(b + b_1x + b_2y + b_3z) = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad [2]$$

La última ecuación es la ecuación general del haz de planos que pasa por r . Observaciones:

- π_1 se obtiene para $\lambda = 1$ y $\mu = 0$
- π_2 se obtiene para $\lambda = 0$ y $\mu = 1$
- El plano Π_3 es un plano del haz ya que $\vec{n}_3$ está en el plano definido por $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, que es un plano perpendicular a la recta r y además contiene a esta recta.

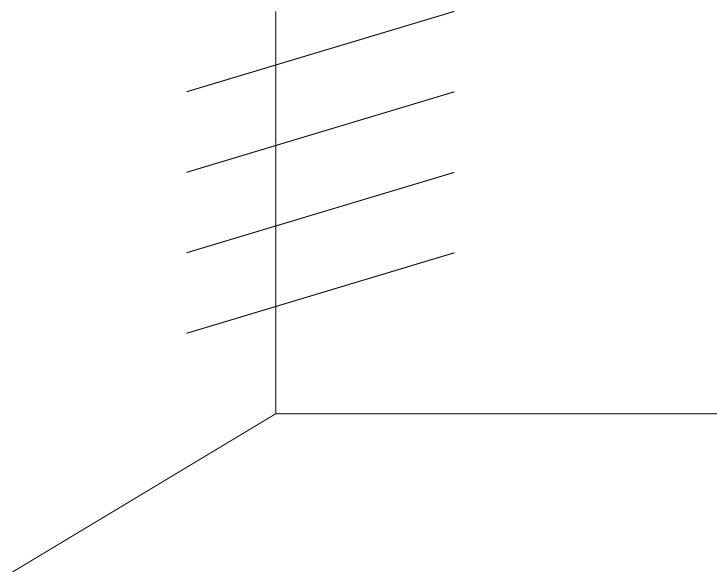
- El plano π_4 no pertenece al haz de planos de arista r . Aunque su vector normal $\vec{n}_4$ se encuentra en el plano definido por $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, es decir, tiene la forma $\vec{n}_4 = \lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2$, la recta r no está incluida en π_4 . π_4 es paralelo a r (su vector normal es perpendicular al vector director de r , o dicho de otra forma, la dirección de su vector normal pertenece al plano perpendicular a la recta r).



7.3 Posiciones relativas de rectas y planos

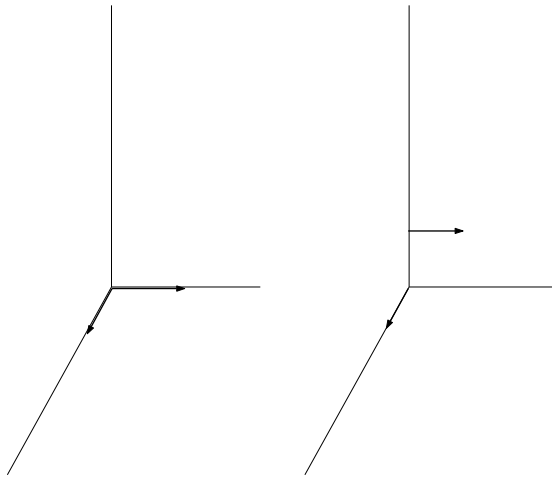
7.3.1 Resumen de las condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre rectas y planos

- Dos rectas se dicen paralelas si tienen la misma dirección

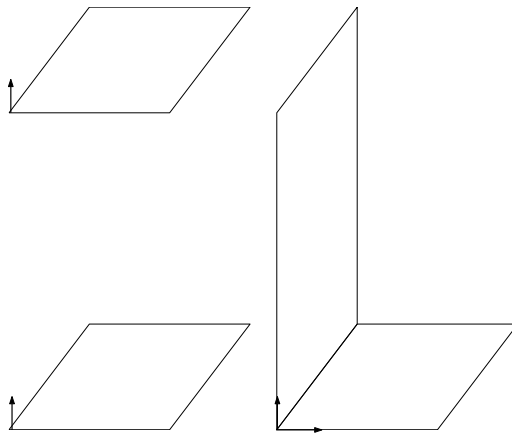


$\vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{u}$, variando $\vec{P}$, determina todas las rectas paralelas de dirección $\vec{u}$

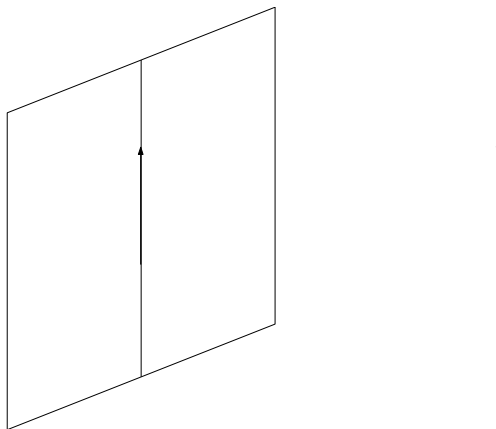
- Dos rectas con direcciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se dice que son perpendiculares si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



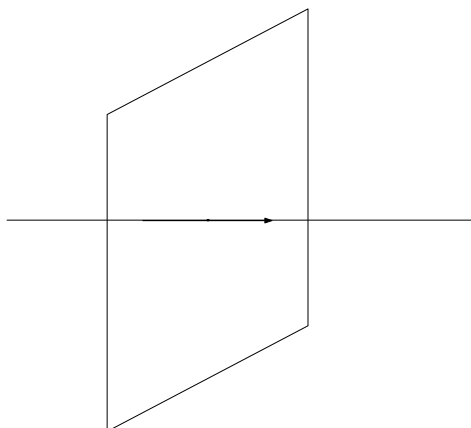
- Dos planos con vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, respectivamente, son paralelos si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ tienen la misma dirección, y son perpendiculares si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$



- Una recta de dirección $\vec{u}$ es paralela a un plano de vector normal $\vec{n}$ si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Otra forma de expresarlo: Una recta es paralela a un plano si su dirección está contenida en el plano



- Una recta de dirección $\vec{u}$ es perpendicular a un plano de vector normal $\vec{n}$ si $\vec{n}$ y $\vec{u}$ tienen la misma dirección.



7.3.2 Posiciones relativas de dos planos en el espacio (implícitas)

$$\Pi_1 = a + a_1x + a_2y + a_3z = 0 \text{ y } \Pi_2 = b + b_1x + b_2y + b_3z = 0$$

La intersección de los planos es la solución del sistema de dos ecuaciones cuya matriz ampliada es $M^* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b \end{bmatrix}$. La matriz de coeficientes es $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$. Se podrán dar los siguientes casos:

rango M	rango M^*
1	1
1	2
2	2

1. $\text{rango } M = \text{rango } M^* = 1$. Sistema compatible indeterminado con dos parámetros libres. Los dos planos son iguales, coincidentes (en M^* sobra una de las dos ecuaciones). La intersección es cualquiera de los planos.
2. $\text{rango } M = 1$ y $\text{rango } M^* = 2$. Sistema incompatible. No existe ningún punto común. La intersección de los dos planos es el conjunto vacío. Los planos son paralelos y no se cortan.
3. $\text{rango } M = 2$ (en cuyo caso $\text{rango } M^* = 2$). Sistema compatible indeterminado con un parámetro libre. Los planos se cortan en la recta de ecuación:

$$r = \begin{cases} a + a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b + b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

7.3.3 Posiciones relativas de una recta y un plano (implícitas)

$$r : \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b = 0 \end{cases}, \quad \Pi : c_1x + c_2y + c_3z + c = 0$$

$$\text{con } rango \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$$

para garantizar que la recta lo es en realidad, pues una intersección de dos planos también podría ser un plano (si coinciden) o el conjunto vacío (si son paralelos).

Tomando las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad M^* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b \\ c_1 & c_2 & c_3 & -c \end{bmatrix},$$

tenemos:

1. $\text{rango} M = \text{rango} M^* = 2$. S.C. indeterminado con un parámetro libre. La intersección de la recta y el plano es la recta, o dicho de otra forma, la recta está contenida en el plano, o lo que es lo mismo el plano Π es un plano del haz definido por la recta r . El sistema se reduce a las dos primeras ecuaciones.
2. $\text{rango} M = 2$ y $\text{rango} M^* = 3$. Sistema incompatible, la intersección es el conjunto vacío. Las recta y el plano son paralelos, pues la dirección normal al plano es perpendicular a la recta, es decir, $(c_1, c_2, c_3) \in \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$.
3. $\text{rango} M = \text{rango} M^* = 3$. El sistema es compatible determinado: r y Π se cortan en un punto.

7.3.4 Posiciones relativas de dos rectas en el espacio (implícitas)

$$r_1 = \begin{cases} a + a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b + b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}, \quad r_2 = \begin{cases} c + c_1x + c_2y + c_3z = 0 \\ d + d_1x + d_2y + d_3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{con } rango \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad rango \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} = 2,$$

para garantizar que las rectas lo son en realidad, pues una intersección de dos planos también podría ser un plano (si coinciden) o el conjunto vacío (si son paralelos).

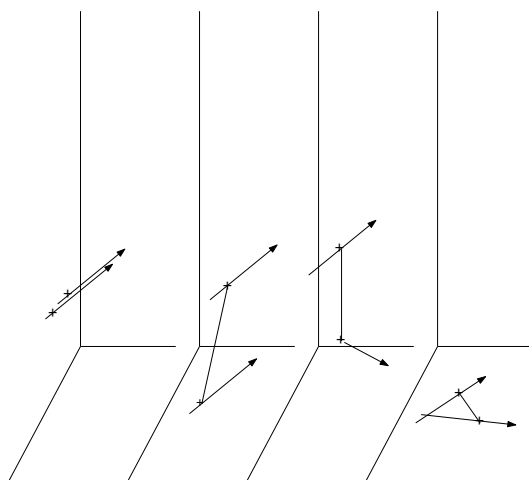
La intersección de las rectas es la solución del sistema de cuatro ecuaciones cuyas matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}, \quad M^* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a \\ b_1 & b_2 & b_3 & -b \\ c_1 & c_2 & c_3 & -c \\ d_1 & d_2 & d_3 & -d \end{bmatrix},$$

Se podrán dar los siguientes casos:

$\text{rango } M$	$\text{rango } M^*$
2	2
2	3
3	3
3	4

1. $\text{rango}M = 2 = \text{rango}M^* = 2$. S.C. indeterminado con un parámetro libre. La intersección de las dos rectas es una de las rectas, por tanto las rectas son iguales. $r_1 = r_2$. El sistema se reduce a las dos primeras ecuaciones. Los planos tercero y cuarto son planos del haz definido por la recta r_1 .
2. $\text{rango}M = 2$ y $\text{rango}M^* = 3$. Sistema incompatible, no hay ningún punto común. Las rectas son paralelas, pues ambas tienen el mismo plano perpendicular. $\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = \langle (c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3) \rangle$
3. $\text{rango}M = \text{rango}M^* = 3$. El sistema es compatible determinado: las rectas se cortan en un punto.
4. $\text{rango}M = 3$ y $\text{rango}M^* = 4$. Sistema incompatible, no hay ningún punto común. Las rectas se cruzan (tienen distinta dirección pues $\text{rango}M=3$).



De izquierda a derecha las rectas se solapan, son paralelas, se cruzan y se cortan

7.3.5 Posiciones relativas de dos rectas (paramétricas)

$$r_1 = \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad r_2 = \begin{cases} x = q_1 + \mu w_1 \\ y = q_2 + \mu w_2 \\ z = q_3 + \mu w_3 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

La intersección de las dos rectas se obtiene de la resolución de la ecuación siguiente:

$$\vec{x} \in r_1 \Rightarrow \vec{x} = \vec{P} + \lambda \vec{v} \text{ para algún } \lambda$$

$$\vec{x} \in r_2 \Rightarrow \vec{x} = \vec{Q} + \mu \vec{w} \text{ para algún } \mu.$$

Luego si $\vec{x} \in r_1 \cap r_2$ existirán λ y μ tales que:

$$\vec{P} + \lambda \vec{v} = \vec{Q} + \mu \vec{w} \quad \text{o} \quad \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} = \vec{Q} - \vec{P}$$

Dicho de otra forma, existirá solución del SL de matriz ampliada $M^* = [\vec{v} \ \vec{w} \ \vec{Q} - \vec{P}]$

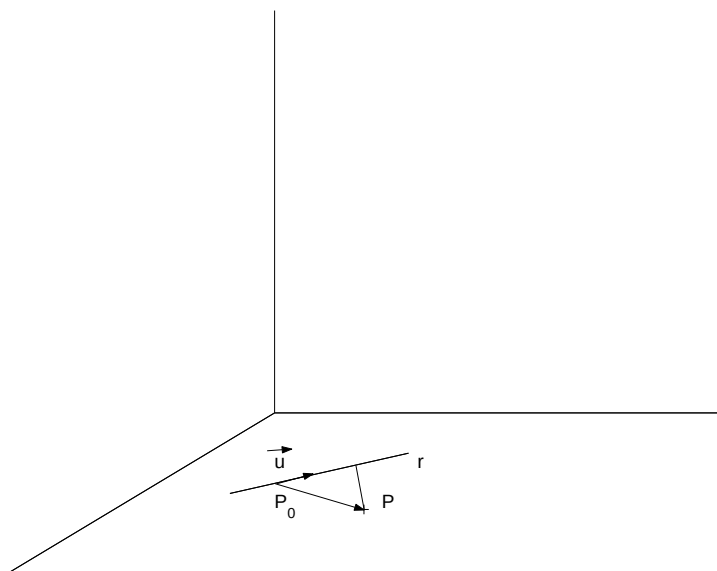
$$M^* = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 & q_1 - p_1 \\ v_2 & w_2 & q_2 - p_2 \\ v_3 & w_3 & q_3 - p_3 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{bmatrix},$$

1. $\text{rango} M = \text{rango} M^* = 1$. Sistema compatible con un parámetro libre. Las rectas coinciden. $\vec{PQ}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tienen la misma dirección.
2. $\text{rango} M = 1$ y $\text{rango} M^* = 2$. Sistema incompatible, no hay ningún punto común. Las rectas tienen la misma dirección, que no coincide con la dirección $\vec{PQ}$, por tanto las rectas son paralelas.
3. $\text{rango} M = \text{rango} M^* = 2$. Sistema compatible determinado. Las rectas tienen distinta dirección y se cortan, son secantes.
4. $\text{rango} M = 2$ y $\text{rango} M^* = 3$. Sistema incompatible. $\vec{PQ}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Las rectas tienen distinta dirección y se cruzan, sin cortarse.

7.4 Distancia entre puntos, rectas y planos

7.4.1 Distancia de un punto a una recta



Método 1

$$d(P, r) = \| \vec{P_0P} - \text{proy}_{\vec{u}} \vec{P_0P} \|$$

P_0 es un punto auxiliar de la recta, que utilizamos para calcular la distancia.

Método 2

1. Calculamos la ecuación implícita del plano π perpendicular a $\vec{u}$ y que pasa por P
2. Obtenemos el punto P' intersección de la recta r y el plano π
3. La distancia $d(P, r) = \| \vec{PP'} \|$

Ejemplo 7.2 *Calcula la distancia del punto $P = (2, 1, 4)$ a la recta r definida por:*

$$r : \begin{cases} 2x + 4y - z + 5 = 0 \\ x + y + 6z - 8 = 0 \end{cases}$$

Solución por el método 1:

Primero obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta, resolviendo el sistema dado por sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x = 37/2 - 25/2\lambda \\ y = -21/2 + 13/2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Podemos tomar como vector director $\vec{u} = (-25, 13, 2)$, y como punto de la recta el correspondiente a $\lambda = 1$:

$$x = 37/2 - 25/2 = 12/2 = 6$$

$$y = -21/2 + 13/2 = -8/2 = -4$$

$$z = 1$$

$$\text{Es decir, } P_0 = (6, -4, 1)$$

$$\vec{P_0P} = (2, 1, 4) - (6, -4, 1) = (-4, 5, 3)$$

$$\text{proy}_{\vec{u}}\vec{P_0P} = \frac{(-4, 5, 3) \cdot (-25, 13, 2)}{625 + 169 + 4}(-25, 13, 2) = \frac{100 + 65 + 6}{798}(-25, 13, 2) =$$

$$= 57/266(-25, 13, 2) = (-75/14, 39/14, 3/7)$$

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} - \text{proy}_{\vec{u}}\vec{P_0P} &= (-4, 5, 3) - (-75/14, 39/14, 3/7) = \\ &= (19/14, 31/14, 18/7) = 1/14(19, 31, 36) \end{aligned}$$

$$d = 1/14\sqrt{19^2 + 31^2 + 36^2} = \sqrt{187/14} = 3.65$$

Solución por el método 2:

El plano π perpendicular a la recta tendrá como vector normal un vector director de la recta, por tanto podemos tomar $\vec{n} = (-25, 13, 2)$. Otra forma de obtener el vector director de la recta sería a través del producto vectorial de $(2, 4, -1)$ y $(1, 1, 6)$, cuyo resultado es $(25, -13, -2)$.

La ecuación implícita del plano π será:

$$-25x + 13y + 2z + D = 0$$

D se obtiene a partir de la condición de que $P \in \pi$,

$$-25 * 2 + 13 * 1 + 2 * 4 = -D \Rightarrow D = 29$$

por tanto $\pi : -25x + 13y + 2z = -29$

A continuación obtenemos el punto P' resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y - z + 5 = 0 \\ x + y + 6z - 8 = 0 \\ -25x + 13y + 2z = -29 \end{cases}$$

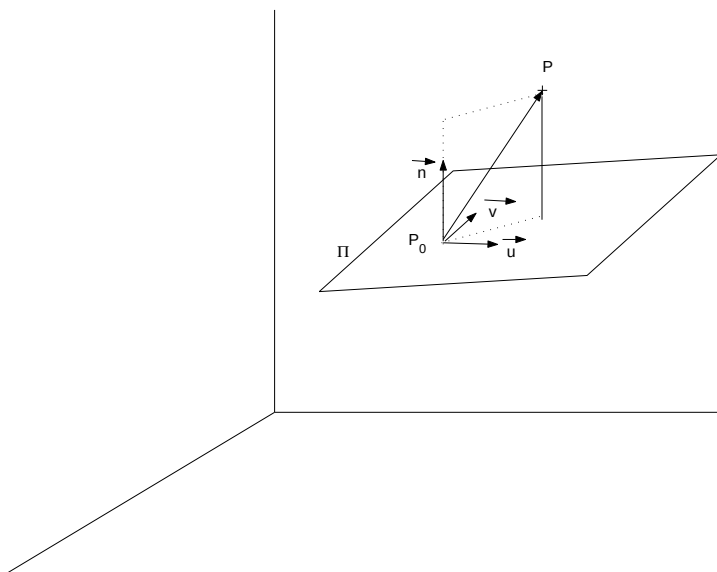
$$\text{La solución es: } P' = (9/14, -17/14, 10/7)$$

$$P = (2, 1, 4) \quad P' = (9/14, -17/14, 10/7)$$

$$\vec{PP'} = P' - P = (-19/14, -31/14, -18/7)$$

$$\|\vec{PP'}\| = 3.65$$

7.4.2 Distancia de un punto a un plano

Método 1

$$d(P, \Pi) = \| P_0 \vec{P} - \text{proy}_{\Pi} P_0 \vec{P} \|$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto auxiliar del plano, que utilizamos para calcular la distancia.

o más sencillo:

$$d(P, \Pi) = \| \text{proy}_{\vec{n}} P_0 \vec{P} \|, \quad \text{siendo } \vec{n} \text{ un vector normal al plano } \Pi$$

Desarrollemos esta última expresión. Tomando $\vec{n} = (a, b, c)$ y la ecuación general del plano $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{n}} P_0 \vec{P} &= \frac{P_0 \vec{P} \cdot (a, b, c)}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) = \\ &= \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c)}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) = \\ &= \frac{ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) \end{aligned}$$

$(x_0, y_0, z_0) \in \Pi \Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{n}} P_0 \vec{P} &= \frac{ax + by + cz + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) \\ d(P, \Pi) &= \left\| \frac{ax + by + cz + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) \right\| = \left| \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \end{aligned}$$

Método 2

1. Calculamos la ecuación de la recta r perpendicular a π y que pasa por P
2. Obtenemos el punto P' intersección de la recta r y el plano π
3. La distancia $d(P, \pi) = \| P \vec{P}' \|$

7.4.3 Distancia entre dos rectas disjuntas

r_1 y r_2 paralelas

$d(r_1, r_2) = d(P_1 \in r_1, r_2)$ siendo P_1 cualquier punto de la recta r_1

r_1 y r_2 se cruzan

Si las rectas se cruzan $\Rightarrow$ existen $P_1 \in r_1$ y $P_2 \in r_2$ únicos, tales que la recta que pasa por P_1 y P_2 es perpendicular a ambas. $\| \vec{P_1 P_2} \|$ es además la distancia mínima entre un punto de r_1 y un punto de r_2 , y se considera por tanto la distancia entre r_1 y r_2

Justificación de que existe una única recta perpendicular a r_1 y r_2 que además corta a las dos rectas:

La dirección dada por el producto vectorial de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ es perpendicular a las dos rectas. Llamando a esta dirección $\vec{n} = (a, b, c)$, demostraremos que sólo una de las infinitas rectas con esta dirección corta simultáneamente a las rectas r_1 y r_2 .

Supongamos una recta r de dirección (a, b, c) que corte a la recta r_1 , su ecuación vectorial será:

$$r : \vec{X} = \underbrace{\vec{Q}_1 + \lambda \vec{u}_1}_{P_1} + \beta \vec{n}$$

El término $\vec{Q}_1 + \lambda \vec{u}_1$ viene de exigir que la recta pase por r_1 y el término $\beta \vec{n}$ de que tenga la dirección de $\vec{n}$.

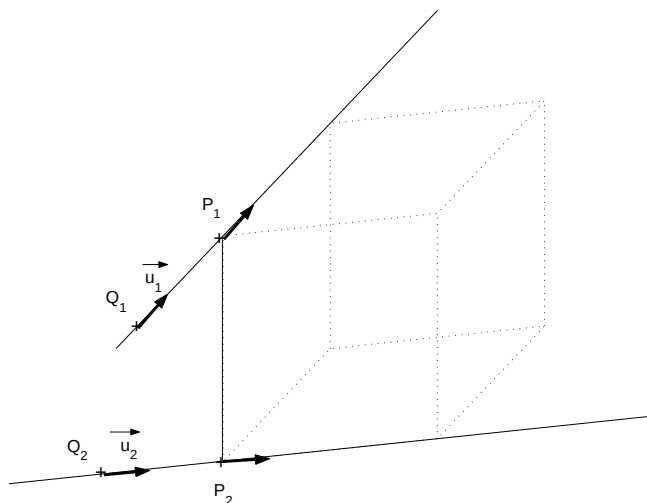
Como r ha de cortar también a r_2 , una posible solución $\vec{X}$ será un punto de r_2 , y por tanto podemos escribir:

$$\vec{Q}_1 + \lambda \vec{u}_1 + \beta \vec{n} = \underbrace{\vec{Q}_2 - \gamma \vec{u}_2}_{P_2} \quad [1]$$

Reordenando esta ecuación vectorial obtenemos: $\lambda \vec{u}_1 + \beta \vec{n} + \gamma \vec{u}_2 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$

Como $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{n}$ son linealmente independientes, el sistema es compatible determinado, y las soluciones λ , β y γ son únicas. Por tanto existe un único punto $\vec{X}_1 = \vec{Q}_1 + \lambda \vec{u}_1 = P_1 \in r_1$ y un único punto $\vec{X}_2 = \vec{Q}_2 - \gamma \vec{u}_2 = P_2 \in r_2$, tales que la recta que los une es a la vez perpendicular a r_1 y r_2 . Sobre esta recta es sobre la que se determina la distancia (que es la mínima) entre r_1 y r_2 . La distancia es la norma del vector $P_2 - P_1$

Fijándonos en [1] observamos que $P_2 - P_1 \propto \vec{n}$



7.4.4 Distancia entre dos planos paralelos

$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1 \in \Pi_1, \Pi_2)$ siendo P_1 cualquier punto de Π_1

7.4.5 Distancia entre una recta y un plano paralelos

$d(r, \Pi) = d(P_1 \in r, \Pi)$ siendo P_1 cualquier punto de la recta r

7.5 Ángulos entre rectas y planos

El ángulo que forman dos rectas es el ángulo α que forman sus vectores directores, tomando éstos en el mismo cuadrante del plano que definen. Dicho de otra forma, tomando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

El ángulo que forman dos planos es el ángulo α que forman sus vectores normales, tomando éstos en el mismo cuadrante. Dicho de otra forma, tomando $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ tales que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \geq 0$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

El ángulo α que forman un plano y una recta se obtiene de su ángulo complementario $\beta = \pi/2 - \alpha$, correspondiendo β al ángulo formado por el vector director de la recta y el vector normal al plano, tomando estos dos vectores en el mismo cuadrante. Dicho de otra forma, tomando $\vec{u}$ y $\vec{n}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{n} \geq 0$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

7.6 Ejercicios

Ejercicio 7.1 Dados los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (0, 1, 2)$ y los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (1, -1, 1)$, hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes rectas:

1. recta que pasa por P con dirección $\vec{u} - \vec{v}$.
2. recta que pasa por P y por Q .
3. recta que pasa por Q con dirección $3\vec{v}$.

Ejercicio 7.2 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por $P = (1, 1, 1)$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 7.3 Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas de $\mathbb{R}^3$:

1. $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \alpha(4, 3, 2)$ $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 3, 2)$
2. $\frac{x+4}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-4}$ $\frac{x+9}{-5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$
3. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 3 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$

Ejercicio 7.4 Dados los puntos $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-1, -2, -3)$ y $R = (0, 1, -1)$ y los vectores $\vec{u} = (0, 1, -1)$ y $\vec{v} = (5, 1, 2)$, hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de los siguientes planos de $\mathbb{R}^3$:

1. plano que pasa por P , Q y por R .
2. plano que pasa por P y R y es paralelo a la recta que pasa por Q con dirección $\vec{u} - \vec{v}$.
3. plano que contiene a R y con direcciones $\vec{u} + 2\vec{v}$, $2\vec{u} + \vec{v}$.

Ejercicio 7.5 Determinar el plano que contiene a la recta $x = \frac{y-1}{2} = z+3$, y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 7.6 Determinar, si es posible, la intersección de los siguientes planos en $\mathbb{R}^3$:

1. $\Pi_1 : x - y + z = 1$ $\Pi_2 : 2x + 2y - 3z = 4$
2. $\Pi_1 : (x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(0, 1, -2)$
 $\Pi_2 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(0, 1, -1) + \mu(2, 3, 5)$

Ejercicio 7.7 Obtén la intersección de los planos siguientes en función de los parámetros a y b .

$$\begin{aligned} \Pi_1 : x + 3y + 2z &= 1 \\ \Pi_2 : 2x + 3y + z &= 0 \\ \Pi_3 : x + 2y + bz &= a \end{aligned}$$

Ejercicio 7.8 Hallar un vector que tenga la dirección de la recta intersección de los planos Π_1 y Π_2 , sabiendo que el plano Π_1 pasa por los puntos $A1=(0, 1, -2)$, $B1=(1, 2, 1)$ y $C1=(2, -2, -1)$ y que el plano Π_2 pasa por los puntos $A2=(1, -1, 2)$, $B2=(4, 1, 1)$ y $C2=(2, 1, 3)$.

Ejercicio 7.9 a) Hallar el plano que contiene la recta

$$r : \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

y el punto $C = (1, 2, -4)$

b) Calcula el punto simétrico de C respecto de la recta r y perpendicularmente a ella.

Ejercicio 7.10 Sea la recta r de ecuación:

$$r : \begin{cases} bx - y + 3 - 2b = 0 \\ y + bz - 3 - 2b = 0 \end{cases}$$

y el plano $\Pi: x + y + z + h = 0$

Estudia según los valores de b y h la intersección de r y Π .

Ejercicio 7.11 Sean las rectas r y r' dadas por las intersecciones de los siguientes planos:

$$r : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -2y + az - 5 = 0 \end{cases}$$

Determinar el valor de a para que r y r' sean paralelas.

Ejercicio 7.12 Considera el plano π que contiene:

$$r_1 : (2, 2, 6) + \lambda(1, 0, 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r_2 : (2, 2, 6) + \mu(3, 1, -1) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Determina la distancia de $P = (10, 12, 15)$ a π y el punto $P' \in \pi$ más cercano a P .

Ejercicio 7.13 Sean las rectas r_1 y r_2 dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3\mu \\ z = 3 + 2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallar $P_1 \in r_1$ y $P_2 \in r_2$ por donde pasa la perpendicular común, la ecuación de dicha perpendicular y la distancia entre r_1 y r_2 .

Ejercicio 7.14 Obtén la distancia entre las rectas r_1 y r_2

$$r_1 : (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r_2 : (4, 0, 3) + \mu(0, 1, 2), \mu \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 7.15 Obtén la distancia entre los planos π_1 y π_2

$$\pi_1 : 2x + 3y - z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : 4x + 6y - 2z - 3 = 0$$

Ejercicio 7.16 Calcula la distancia entre la recta r y el plano π

$$r : \begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi : -x - 5y + 5z = 19$$

Ejercicio 7.17 *Calcula el ángulo que forman dos rectas con vectores directores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, -6, 0)$*

Ejercicio 7.18 *Calcula el ángulo que forman $\Pi_1 : 2x + 3y + z = 0$ y $\Pi_2 : 3x - 5y + z - 1 = 0$*

Ejercicio 7.19 *Calcula el ángulo que forman el plano $\Pi : 2x + 3y - z = 6$ y la recta $\{(2 + \lambda, -\lambda, 3 + \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$*

Ejercicio 7.20 *Hallar el área del paralelogramo definido por los vértices $(0, 0, 0)$, $(3, 12, 7)$, $(1, 0, 2)$ y $(4, 12, 9)$.*

Ejercicio 7.21 *a) Hallar el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{v} = (3, 12, 7)$, $\vec{w} = (1, 0, 2)$ y $\vec{z} = (1, 2, -1)$. b) Calcula el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{y} = (-1, -2, -1)$*

Ejercicio 7.22 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(3/2, 2)$ y determina con los semiejes OX y OY un triángulo de área 6 unidades cuadradas.*

Ejercicio 7.23 *a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de centro $(4, 3)$ y radio 5 en el punto de ésta situado, respecto del centro de la circunferencia, a 60° respecto a la dirección positiva del eje X (en sentido contrario al de las agujas del reloj).*

b) Calcula los puntos de corte con los ejes X e Y

Ejercicio 7.24 *a) Calcular la ecuación del plano tangente a la esfera centrada en $(0, 0, 0)$ y de radio 9, en el punto $P = (4, 4, 7)$.*

b) Resuelve el mismo problema pero tomando la esfera centrada en $(1, 0, -2)$ y $P = (5, 4, 5)$.

Ejercicio 7.25 *a) Calcula en el plano el punto simétrico de un punto genérico (x, y) respecto de la recta*

$$\frac{x-1}{2} = y+2$$

b) Dada la recta r' de ecuación

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3}$$

calcular la recta resultante de aplicarle la transformación anterior.

Ejercicio 7.26 *Considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la recta $r : y = 3x + 1$ y determina los vectores directores de las rectas s_1 y s_2 que pasan por el punto $P = (-2, 1)$ y forman con la recta r un ángulo de 60 grados.*

Ejercicio 7.27 *Obtén los 8 vértices de un paralelepípedo que cumpla las siguientes condiciones, si es que existe:*

- i) Tres vértices son $(0, 0, 0)$, $(3, 1, 1)$, $(0, 1, 6)$*
- ii) Todos los vértices están situados en el primer cuadrante*
- iii) El volumen es de $144 u^3$*
- iv) Ningún lado tiene longitud mayor de 20 u*

7.7 Soluciones

7.1.1

Recta que pasa por P con dirección $\vec{u} - \vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-1, 2, 0) - (1, -1, 1) = (-2, 3, -1)$$

$$\text{Paramétricas} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Continúa

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Implícitas

Igualando primer y segundo término, y primer y tercer término

$$3x - 3 = -2y + 2 \Rightarrow 3x + 2y = 5$$

$$-x + 1 = -2z + 2 \Rightarrow -x + 2z = 1$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$$

7.1.2

$$\vec{PQ} = Q - P = (0, 1, 2) - (1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$$

$$\text{Paramétricas} \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Implícitas

A partir de las paramétricas observamos $t = -x$ por tanto $z = 2 - x$. Las ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

7.1.3

$$\text{Paramétricas} \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Implícitas

A partir de las paramétricas observamos $t = x$ por tanto $y = 1 - x$ y $z = 2 + x$. Las ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$

7.2

Se calcula el vector director de la recta a partir del producto vectorial de $(3, -1, 1)$ y $(1, 1, -3)$, obteniéndose:

$$\vec{u} = (2, 10, 4), \text{ simplificado a } (1, 5, 2)$$

$$\vec{x} = (1, 1, 1) + \lambda(1, 5, 2)$$

7.3.1

Las rectas no tienen la misma dirección pues $(4, 3, 2)$ no es múltiplo de $(1, 3, 2)$, por tanto las rectas se cruzan o se cortan.

La intersección será el conjunto vacío en el primer caso y un punto en el segundo.

Intersección:

$$(-1, 2, 1) + \alpha(4, 3, 2) = (0, 1, 0) - \lambda(1, 3, 2)$$

$$\alpha(4, 3, 2) + \lambda(1, 3, 2) = (0, 1, 0) - (-1, 2, 1)$$

Si el último vector es combinación lineal de $(4, 3, 2)$ y $(1, 3, 2)$ las rectas se cortan, si no es combinación lineal se cruzan.

Para obtener el rango del conjunto de vectores $(4, 3, 2)$, $(1, 3, 2)$ y $(1, -1, -1)$ podemos recurrir a la eliminación gaussiana o al determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots$$

Se obtiene rango 3, por tanto las rectas se cruzan

7.3.2

De nuevo las direcciones no son proporcionales, por tanto las rectas se cortan o se cruzan. El rango a calcular ahora es el del conjunto de vectores $(5, 2, -4)$, $(-5, 3, 2)$ y $(-9, 1, 3) - (-4, 3, -1) = (-5, -2, 4)$. El rango es 2 y por tanto las rectas se cortan. Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que se obtiene a partir de las dos ecuaciones en forma continua, obtenemos que el punto de corte es $(-9, 1, 3)$

7.3.3

La matriz de ampliada y una forma escalonada del sistema son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}M = 3$, $\text{rg}M^* = 4$ Se cruzan

Se puede confirmar que las rectas no son paralelas (el otro caso de sistema incompatible) demostrando que sus direcciones no son proporcionales. Las direcciones se obtienen mediante los productos vectoriales siguientes:

$$\vec{u} = (2, -3, -1) \times (1, -3, 0) = (-3, -1, -3)$$

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \times (0, 1, -1) = (-1, 1, 1)$$

7.4.1

Del plano que pasa por los 3 puntos $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-1, -2, -3)$ y $R = (0, 1, -1)$, obtener la ecuación paramétrica y las ecuaciones implícitas.

$RP = (1, 1, 4)$, tenemos un vector director del plano

$QP = (2, 4, 6)$, simplificando a $(1, 2, 3)$ tenemos otro vector director del plano, que además no es múltiplo del anterior.

$$\pi: \vec{x} = (0, 1, -1) + \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 1, 4)$$

La ecuación implícita se obtendrá por cualquiera de estos dos métodos:

a) El SL de matriz ampliada A^* es compatible.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y-1 \\ 4 & 3 & z+1 \end{bmatrix}$$

O lo que es equivalente, $\text{Det}A^* = 0$, pues si el sistema es compatible, la columna tercera es combinación lineal de las dos primeras.

De la condición de que el SL sea compatible o de que el determinante anterior sea nulo se infiere la ec. implícita $-5x + y + z = 0$

b) El plano tendrá de ecuación implícita $Ax + By + Cz + D = 0$ [1],

$$(A, B, C) = (1, 1, 4) \times (1, 2, 3) = (-5, 1, 1)$$

D se obtiene sustituyendo P, Q o R en la ecuación [1]

7.4.2

Dirección $\vec{u} - \vec{v} = (0, 1, -1) - (5, 1, 2) = (-5, 0, -3)$

$$\pi: \vec{x} = (0, 1, -1) + \lambda(1, 1, 4) + \mu(-5, 0, -3)$$

La ecuación implícita se obtiene a partir de la paramétrica como en el apartado anterior, obteniéndose: $22 - 3x - 17y + 5z = 0$

7.5

Por contener a la recta tiene vector director $(1, 2, 1)$ y pasa por el punto $(0, 1, -3)$. Por ser paralelo a la segunda recta contiene la dirección $(2, 1, 1) \times (1, -1, 2) = (3, -3, -3)$, que simplificaremos tomando $(1, -1, -1)$.

$$\pi: \vec{x} = (0, 1, -3) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(1, -1, -1)$$

7.6.1

$\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (2, 2, -3)$. Los planos no son paralelos ni coinciden, por tanto se cortan en una recta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \end{array} \right] \quad z = z \quad y = \frac{2+5z}{4}$$

$$x = 1 - z + y = 1 - z + \frac{2+5z}{4} = 3/2 - 1/4z$$

La intersección es la recta de ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 3/2 - 1/4z \\ y = 1/2 + 5/4z \\ z = z \end{cases}$$

7.6.2

La intersección es la solución del sistema de matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & \beta & \gamma & \mu & \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

La solución de este sistema es:

$$\alpha = 2\mu, \beta = -8\mu - 1, \lambda = -9\mu - 2$$

Por tanto un vector común tendrá la forma:

$$\vec{x} = 2\mu(1, 1, -1) - (1 + 8\mu)(0, 1, -2) = (2\mu, -1 - 6\mu, 2 + 14\mu) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Simplificando: (sustituyendo $2\mu \rightarrow \mu$ ya que μ es parámetro)

$$\vec{x} = (\mu, -1 - 3\mu, 2 + 7\mu)$$

Es la ecuación de la recta que pasa por $(0, -1, 2)$ y tiene vector director $(1, -3, 7)$

7.7

La intersección es la solución del sistema de matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & b & a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & b-2 & a-1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6-3b & 3-3a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3-3b & 1-3a \end{array} \right]$$

• $b = 1$

– $a = 1/3 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado, con un parámetro libre. La intersección es la recta r definida por los planos π_1 y π_2 (es obvio darse cuenta de que π_1 y π_2 se cortan en una recta, pues sus vectores normales son linealmente independientes). La última ecuación del sistema queda eliminada. El plano π_3 pertenece al haz de planos de la recta r . ($\vec{n}_3 \in \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$).

– $a \neq 1/3 \Rightarrow$ sistema incompatible. No hay ningún punto común. La recta r y el plano π_3 son paralelos.

• $b \neq 1$ Sistema compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

7.8

$$A_1\vec{B}_1 \times A_1\vec{C}_1 = (1, 1, 3) \times (2, -3, 1) = (10, 5, -5)$$

$$A_2\vec{B}_2 \times A_2\vec{C}_2 = (3, 2, -1) \times (1, 2, 1) = (4, -4, 4)$$

Simplificando tenemos $\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$ y $\vec{n}_2 = (1, -1, 1)$

La recta intersección de los planos tiene dirección $\vec{u} = (2, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (-2, -1, 1)$

7.9

- a) Sabemos obtener la ecuación del plano que pasa por tres puntos. Buscaremos dos puntos A y B de la recta, y tenemos el tercer punto $C = (1, 2, -4)$. El punto C no pertenece a la recta, por tanto estará definido un plano.

De las ecuaciones de la recta deducimos: $y = 2/3x$, $z = 3 - x$, tomando x como parámetro.

Para $x = 0$ obtenemos el punto $A = (0, 0, 3)$

Para $x = 3$ obtenemos el punto $B = (3, 2, 0)$

$$\vec{AB} = (3, 2, -3)$$

$$\vec{AC} = (1, 2, -7)$$

La ecuación implícita del plano será:

$$\vec{n} = (3, 2, -3) \times (1, 2, -7) = (4, -9, -2) \Rightarrow 4x - 9y - 2z + D = 0$$

Exigiendo que pase por $A = (0, 0, 3)$ obtenemos $-6 + D = 0$

La ecuación es $\boxed{4x - 9y - 2z + 6 = 0}$

- b)

El vector director de la recta ya lo tenemos, es $\vec{AB}$, y éste es precisamente el vector normal al plano perpendicular a la recta, por tanto $\vec{n}_1 = (3, 2, -3)$ y la ecuación del plano es

$$3x + 2y - 3z + D = 0$$

Como el plano pasa por $C = (1, 2, -4)$:

$3 * 1 + 2 * 2 - 3 * (-4) + D = 0 \rightarrow D = -19$ y la ecuación del plano es

$$\boxed{3x + 2y - 3z - 19 = 0}$$

La intersección de la recta y el plano será:

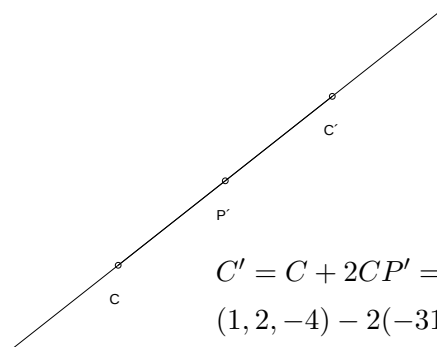
$$3x + 2(2/3x) - 3(3 - x) - 19 = 3x + 4/3x - 9 + 3x - 19 = 6x + 4/3x - 28 = 0$$

$$(22/3)x = 28 \Rightarrow x = 28 * (3/22) = 14 * 3/11 = 42/11$$

El plano perpendicular a la recta y que pasa por C corta a la recta en el punto $P' = (42/11, 2/3 * 42/11, 3 - 42/11) = (42/11, 28/11, -9/11)$

$$P'C = (1, 2, -4) - (42/11, 28/11, -9/11) = (-31/11, -6/11, -35/11)$$

El punto simétrico se obtiene así:



$$C' = C + 2CP' = C - 2P'C =$$

$$(1, 2, -4) - 2(-31/11, -6/11, -35/11) = (73/11, 34/11, 26/11)$$

- Otra forma de resolver el apartado b:

A es un punto de la recta

La proyección ortogonal de AC sobre la recta r , de vector director $AB = (3, 2, -3)$, es el vector $AP' = (42/11, 28/11, -42/11)$

$$AC' = AP' - P'C = AP' - (AC - AP') = 2AP' - AC = (73/11, 34/11, -7/11)$$

$$C' = OC' = OA + AC' = (0, 0, 3) + (73/11, 34/11, -7/11) = (73/11, 34/11, 26/11)$$

7.10

La recta viene dada como la intersección de dos planos, con vectores normales $\vec{n}_1 = (b, -1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (0, 1, b)$. Para que los planos se corten en una recta el rango de los dos vectores debe ser 2. El rango es $2 \Leftrightarrow b \neq 0$

- Caso $b = 0$. Las dos ecuaciones implícitas son iguales, es decir los dos planos son iguales. Su ecuación es $y = 3$

La intersección del plano $y = 3$ y del plano $\pi : x + y + z + h = 0$ tiene ecuación

$$\text{paramétrica: } \begin{cases} x = z - 3 - h \\ y = 3 \\ z = z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

Es una recta, y el parámetro tomado ha sido z

- Caso $b \neq 0$. La intersección es la solución del sistema

$$\begin{cases} bx - y + 3 - 2b = 0 \\ y + bz - 3 - 2b = 0, \\ x + y + z + h = 0 \end{cases}$$

$$\text{con matriz ampliada: } \begin{bmatrix} b & -1 & 0 & -3 + 2b \\ 0 & 1 & b & 3 + 2b \\ 1 & 1 & 1 & -h \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es: $b - b - b^2 = -b^2 \neq 0$. Por tanto el sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

Calculamos el punto de corte mediante eliminación gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -h \\ 0 & 1 & b & 3 + 2b \\ b & -1 & 0 & -3 + 2b \end{bmatrix} \sim F_{31}(-b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -h \\ 0 & 1 & b & 3 + 2b \\ 0 & -1 - b & -b & bh - 3 + 2b \end{bmatrix}$$

$$\text{Sumando las dos últimas ecuaciones } -by = bh + 4b \Rightarrow y = -4 - h$$

$$bz = 3 + 2b - y = 3 + 2b + 4 + h \Rightarrow z = (7 + h + 2b)/b$$

$$x = -h - y - z = -h + 4 + h - (7 + h + 2b)/b = (4b - 7 - h - 2b)/b = (-7 - h + 2b)/b$$

7.11

r y r' no son paralelas para ningún valor de a . Hay dos formas de verlo. Una es resolver el sistema formado por las cuatro ecuaciones. Al hacerlo se encuentra que la matriz de coeficientes tiene rango 3 lo que implica que r y r' no tienen la misma dirección y por tanto no pueden ser paralelas.

El otro procedimiento es determinar las direcciones de las dos rectas a partir del producto vectorial de los vectores normales a los planos que las definen:

$$\vec{n}_1 = (1, 0, -2), \vec{n}_2 = (0, 1, -1)$$

$$\vec{n}_3 = (1, 1, 1), \vec{n}_4 = (0, -2, a)$$

$$\vec{u}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 1, 1)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = (2 + a, -a, -2)$$

Para que uno sea múltiplo de otro, fijándonos en la última componente $-2\vec{u}_1 = \vec{u}_2$

$$\rightarrow \begin{cases} -6 - a = 0 \\ -2 + a = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

a no puede ser a la vez -6 y 2 por tanto no existe a tal que r y r' sean paralelas.

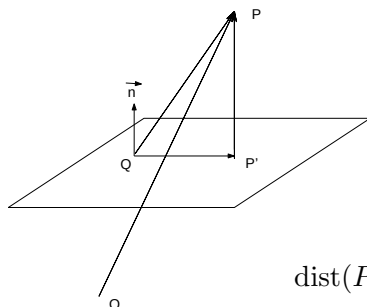
7.12

$\text{dist}(P, \pi) = \| \text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{QP} \|$ siendo Q un punto de π

$$Q = (2, 2, 6)$$

$$P = (10, 12, 15)$$

$$\vec{QP} = (8, 10, 9) \quad \vec{n} = (1, 0, 2) \times (3, 1, -1) = (-2, 7, 1)$$



$$\text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{QP} = \frac{(8, 10, 9) \cdot (-2, 7, 1)}{(-2, 7, 1) \cdot (-2, 7, 1)} (-2, 7, 1) =$$

$$\frac{7}{6} (-2, 7, 1)$$

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{7}{6} \sqrt{54} = \frac{21}{\sqrt{6}} = 8.57$$

$$OP' = OP - P'P$$

$$OP' = OP - \text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{QP} = (10, 12, 15) - \frac{7}{6} (-2, 7, 1) = \left(\frac{37}{3}, \frac{23}{6}, \frac{83}{6} \right)$$

7.13

$$\vec{u}_1 = (1, 3, 2) \quad Q_1 = (1, 0, 3) \quad \vec{u}_2 = (-2, 1, 1) \quad Q_2 = (2, -1, 0) \quad \vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (1, -5, 7)$$

$$P_2 - P_1 = \alpha \vec{n}$$

$$P_2 = Q_2 + \lambda \vec{u}_2 \quad P_1 = Q_1 + \mu \vec{u}_1$$

$$P_2 - P_1 = \boxed{Q_2 + \lambda \vec{u}_2 - Q_1 - \mu \vec{u}_1 = \alpha \vec{n}}$$

$$\lambda (-\vec{u}_2) + \mu \vec{u}_1 + \alpha \vec{n} = Q_2 - Q_1$$

$$\alpha \quad \lambda \quad \mu$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right]$$

La solución es $-1/5$, $4/5$ y $-2/5$

$$\text{Por tanto } P_1 = (1, 0, 3) - 2/5(1, 3, 2) = (3/5, -6/5, 11/5)$$

$$P_2 = (2, -1, 0) + 4/5(-2, 1, 1) = (2/5, -1/5, 4/5)$$

Comprobación de que $P_2 - P_1$ es proporcional a $\vec{n}$:

$$P_2 - P_1 = (-1/5, 1, -7/5)$$

$$(P_2 - P_1)(-5) = (1, -5, 7)$$

Ecuación de la perpendicular común

$$\vec{x} = (3/5, -6/5, 11/5) + \lambda(1, -5, 7)$$

$$d(r_1, r_2) = \| P_2 - P_1 \| = \| (-1/5, 1, -7/5) \| = 1/5 \sqrt{75} = \sqrt{3}$$

7.14

$$P = (4, 0, 3) \in r_2, \quad Q = (1, 2, 3) \in r_1$$

$\vec{QP} = (4, 0, 3) - (1, 2, 3) = (3, -2, 0)$. Las rectas son estrictamente paralelas, no coinciden.

$$d(r_2, r_1) = d(P \in r_2, r_1)$$

La distancia de $P \in r_2$ a r_1 se obtiene a través del vector:

$$\vec{QP} - \text{proy}_{r_1} \vec{QP} = (3, -2, 0) - (3, -2, 0) \cdot (0, 1, 2) / 5 (0, 1, 2) =$$

$$(3, -2, 0) + 2/5(0, 1, 2) = (3, -2 + 2/5, 4/5) = (3, -8/5, 4/5)$$

$$d(P \in r_2, r_1) = \| (3, -8/5, 4/5) \| = 1/5 \sqrt{15^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{61/5} = 3.4928$$

7.15

Los dos planos son paralelos, con vector normal $n = (2, 3, -1)$

Tenemos que medir la distancia sobre una recta perpendicular a ambos planos, por tanto con vector director $(2, 3, -1)$. De las infinitas rectas posibles tomamos por simplicidad la que pasa por el origen, es decir, $r : (x, y, z) = \lambda(2, 3, -1)$

$d(\pi_1, \pi_2) = \|P_1 P_2\|$, siendo P_1 la intersección de r con π_1 y P_2 la intersección de r con π_2 .

Intersección de r y π_1 : $2(2\lambda) + 3(3\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0$

resolviendo se obtiene $\lambda = -2/7$ y $P_1 = -2/7(2, 3, -1) = (-4/7, -6/7, 2/7)$

Intersección de r y π_2 : $4(2\lambda) + 6(3\lambda) - 2(-\lambda) - 3 = 0$

resolviendo se obtiene $\lambda = 3/28$ y $P_2 = (3/14, 9/28, -3/28)$

$$P_2 - P_1 = (11/14, 33/28, -11/28)$$

Su norma es $\frac{11}{2\sqrt{14}}$

7.16

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 5 & 19 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -6 & 6 & 21 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

incompatible por tanto r y π son paralelos

Comprobación:

La dirección de la recta es $(2, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, -3, -3)$. Para simplificar tomamos $\vec{u} = (0, 1, 1)$.

El vector normal al plano es $\vec{n} = (-1, -5, 5)$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, por tanto la recta es paralela al plano o está contenida en el plano. En el primer caso el sistema de tres ecuaciones sería incompatible (lo que hemos encontrado) y en el segundo compatible indeterminado

Ahora buscamos un punto P de la recta y determinamos su distancia al plano. Para ello debemos buscar también un punto auxiliar Q en el plano.

$Q = (-19, 0, 0)$ por ejemplo

Fijándonos en la eliminación gaussiana tenemos para la recta:

$$\begin{cases} 2x = -y + z - 4 \\ 3y = 3z - 8 \end{cases}$$

$$y = z - 8/3$$

$$x = -y/2 + z/2 - 2 = -z/2 + 4/3 + z/2 - 2 = -2/3$$

$$P = (x, y, z) = (-2/3, z - 8/3, z). \text{ Tomando } z = 8/3 : P = (-2/3, 0, 8/3)$$

La distancia es la norma de la proyección de QP sobre n :

$$QP = (-2/3, 0, 8/3) - (-19, 0, 0) = (55/3, 0, 8/3)$$

$$\frac{QP \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(-55/3 + 40/3)}{(1 + 25 + 25)} (-1, -5, 5) = \frac{-5}{51} (-1, -5, 5)$$

La norma es $5/51\sqrt{51} = 5/\sqrt{51} = 0.70$

7.17

$$u = (1, 2, 3), v = (4, -6, 0)$$

$$u.v = -8, \quad v' = -v, \quad u.v' = 8 \quad \text{y ya están en el mismo cuadrante.}$$

$$\cos \alpha = \frac{u.v'}{\sqrt{u.u}\sqrt{v'.v'}} = 0.2965$$

$$\arccos 0.2965 = 1.26977 \text{ radianes} = 72.7525 \text{ grados}$$

En la fórmula $\cos \alpha \dots$ podíamos haber tomado directamente $|\vec{u}.\vec{v}|$, en vez de invertir el vector. Este segundo método es más sencillo:

$$\cos \alpha = \frac{|u.v|}{\sqrt{u.u}\sqrt{v.v}} = 0.2965$$

7.18

$$\vec{n}_1 = (2, 3, 1), \vec{n}_2 = (3, -5, 1) \quad \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{\sqrt{\vec{n}_1.\vec{n}_1}\sqrt{\vec{n}_2.\vec{n}_2}} = 0.3614$$

$$\arccos 0.3614 = 1.2010 \text{ radianes} = 68.8136 \text{ grados}$$

7.19

$$\vec{n} = (2, 3, -1), \vec{u} = (1, -1, 1) \quad \cos \alpha = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{\sqrt{\vec{n}.\vec{n}}\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}} = 0.3086$$

$$\arccos 0.3086 = 1.2571 \text{ radianes} = 72.0247 \text{ grados}$$

El ángulo que forman la recta y el plano es 90 grados menos el ángulo anterior: $90 - 72.0247 = 17.98$ grados

7.20

$$\vec{a} = \vec{OA} = (3, 12, 7),$$

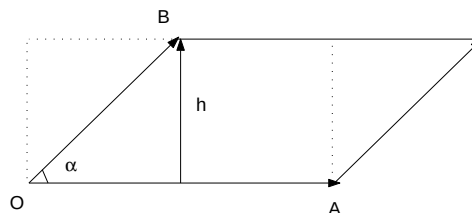
$$\vec{b} = \vec{OB} = (1, 0, 2)$$

$\vec{OA} + \vec{OB} = (4, 12, 9)$ que es el cuarto vértice del enunciado

Area = base $\times$ altura

Tomamos que la base es $\vec{OA}$

vector altura = $\vec{OB}$ - proyección ortogonal de $\vec{OB}$ sobre $\vec{OA}$



$$\vec{h} = \vec{b} - \frac{\vec{b}.\vec{a}}{\vec{a}.\vec{a}} \vec{a} = (151/202, -102/101, 285/202)$$

$$\text{area} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} \sqrt{\vec{h}.\vec{h}} = 26.8514$$

Otro método: $\text{area} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}.\vec{a}} \sqrt{\vec{b}.\vec{b}}} = 1.00638 \text{ rad} = 57.29 \text{ grad}$$

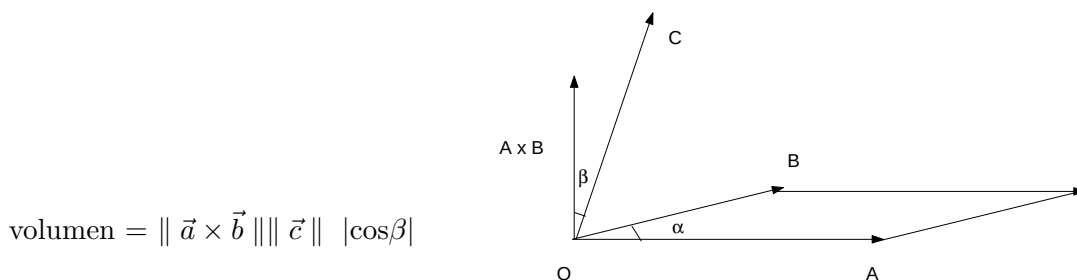
$$\text{area} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} \sqrt{\vec{b}.\vec{b}} \sin \alpha = 26.8514$$

Otro método: $\text{area} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{n}\|$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (24, 1, -12)$$

$$\text{area} = \|\vec{n}\| = \sqrt{24^2 + 1^2 + 12^2} = 26.8514$$

7.21



$$\text{volumen} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| |\cos\beta|$$

β es el ángulo que forman el vector producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ ($\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$) y el vector $\vec{c}$. $\beta \in [0, \pi]$. Se ha tomado el valor absoluto del coseno para que el volumen sea el mismo cuando $\vec{c}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ formen ángulo agudo (coseno positivo) y ángulo obtuso (coseno negativo).

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| |\cos\beta| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 38, \text{ volumen1} = 38 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 12 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -14, \text{ volumen2} = 14$$

7.22

Denominando x_o, y_o a los cortes con los ejes, se cumple la proporción:

$$\frac{y_o}{x_o} = \frac{2}{x_o - 3/2}$$

El área del triángulo es:

$$\frac{x_o y_o}{2} = 6 \Rightarrow y_o = \frac{12}{x_o}$$

La solución del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es:

$$\frac{12}{x_o^2} = \frac{2}{x_o - 3/2} \Rightarrow \frac{x_o^2}{6} = x_o - 3/2 \Rightarrow x_o^2 - 6x_o + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x_o = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3 \qquad y_o = \frac{12}{x_o} = 4$$

7.23

El punto P de la circunferencia tiene de coordenadas:

$$(x_p, y_p) = (4, 3) + (r \cos 60, r \sin 60) = (4, 3) + 5 (1/2, \sqrt{3}/2) = (13/2, 3 + 5\sqrt{3}/2)$$

La dirección tangente es perpendicular a la dirección $(a, b) = (\cos 60, \sin 60) = (1/2, \sqrt{3}/2) \rightarrow (1, \sqrt{3})$ simplificando

El vector perpendicular a (a, b) es $(b, -a) = (\sqrt{3}, -1)$

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P es por ejemplo:

$$(x, y) = (13/2, 3 + 5\sqrt{3}/2) + \lambda (\sqrt{3}, -1)$$

Punto del corte con el eje $X, y = 0$, por tanto $\lambda = 3 + 5\sqrt{3}/2, x = 13/2 + (3 + 5\sqrt{3}/2)\sqrt{3} = 13/2 + 3\sqrt{3} + 15/2 = 28/2 + 3\sqrt{3} = 19.1962 \rightarrow (19.1962, 0)$

Punto del corte con el eje $Y, x = 0$, por tanto $13/2 = -\lambda\sqrt{3} \rightarrow \lambda = -13/2/\sqrt{3}, y = 3 + 5\sqrt{3}/2 - \lambda = 3 + 5\sqrt{3}/2 + 13/2/\sqrt{3} = 11.0829 \rightarrow (0, 11.082919)$

7.24

a) Comprobamos que el punto pertenece a la esfera.

$$4^2 + 4^2 + 7^2 = 16 + 16 + 49 = 81 = 9^2$$

El vector normal es $\vec{n} = (4, 4, 7)$. La ecuación del plano es $4x + 4y + 7z + D = 0$. D se obtiene exigiendo que el plano pase por $P = (4, 4, 7)$, $D = -81$.

$$\text{Por tanto } 4x + 4y + 7z - 81 = 0$$

$$\text{b) } (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 81$$

$$(5-1)^2 + 4^2 + (5+2)^2 = 16 + 16 + 49 = 81$$

La dirección normal es la radial y ésta es: $OP - OC$ siendo P el punto sobre la esfera y C el centro de la esfera.

$$\vec{n} = (5, 4, 5) - (1, 0, -2) = (4, 4, 7)$$

$$4x + 4y + 7z + D = 0 \quad ; \quad 20 + 16 + 35 + D = 0 \Rightarrow D = -71$$

$$4x + 4y + 7z - 71 = 0$$

7.25

$$\text{a) } r : \frac{x-1}{2} = y+2$$

$r_{\perp}$ tendrá dirección $(1, -2)$ la recta perpendicular pasando por $P = (X, Y)$ es: $r_{\perp} : (x, y) = (X, Y) + \lambda(1, -2)$

La intersección de r y $r_{\perp}$ es el punto Q , que calculamos a continuación:

$$\frac{X+\lambda-1}{2} = Y-2\lambda+2 \Rightarrow X+\lambda-1 = 2Y-4\lambda+4 \Rightarrow X-2Y-5 = -5\lambda \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2Y-X+5}{5} \Rightarrow Q = (X, Y) + \frac{2Y-X+5}{5}(1, -2)$$

El punto simétrico P' se obtendrá así: $P' = P + 2\vec{PQ} = P + 2\frac{2Y-X+5}{5}(1, -2)$

$$P' = (X, Y) + (4/5Y - 2/5X + 2)(1, -2)$$

$$\begin{cases} P'_x = X + 4/5Y - 2/5X + 2 = 3/5X + 4/5Y + 2 \\ P'_y = Y - 8/5Y + 4/5X - 4 = 4/5X - 3/5Y - 4 \end{cases}$$

b) Dada r' :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3}$$

la puedo escribir como $y = 3/2(x+1)$

$$\begin{cases} P'_x = 3/5X + 4/5Y + 2 \\ P'_y = 4/5X - 3/5Y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 3/5X + 4/5 \cdot 3/2(X+1) + 2 \\ P'_y = 4/5X - 3/5 \cdot 3/2(X+1) - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P'_x = 3/5X + 6/5X + 16/5 \\ P'_y = 4/5X - 9/10X - 49/10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_x = 9/5X + 16/5 \\ P'_y = -1/10X - 49/10 \end{cases} \Rightarrow$$

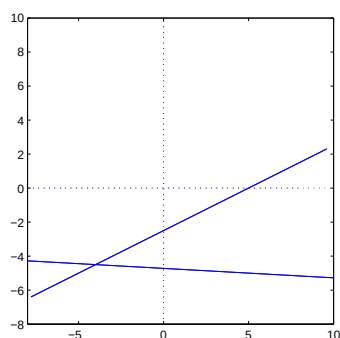
$$\text{Tomando } X = 0 : \begin{cases} P1_x = 16/5 \\ P1_y = -49/10 \end{cases}$$

$$\text{Tomando } X = 1 : \begin{cases} P2_x = 9/5 + 16/5 \\ P2_y = -1/10 - 49/10 \end{cases}$$

La substracción de los dos puntos $P2$ y $P1$ nos da el vector director de la recta: $(9/5, -1/10)$. Un vector director más sencillo (sin utilizar fracciones), sería $(18, -1)$

Como punto de la recta podríamos tomar $P2$, que se simplifica como: $P2_x = 9/5 + 16/5 = 5$, $P2_y = -1/10 - 49/10 = -5$

Por tanto: $r'' : (x, y) = (5, -5) + (18, -1)s \quad / \quad s \in \mathbb{R}$



7.26. Considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la recta $r : y = 3x + 1$ y determina los vectores directores de las rectas s_1 y s_2 que pasan por el punto $P = (-2, 1)$ y forman con la recta r un ángulo de 60 grados.

Un punto genérico de la recta $X = (x, 3x + 1)$

$$PX = X - P = (x + 2, 3x + 1 - 1) = (x + 2, 3x)$$

La recta r en forma implícita es $3x - y + 1 = 0$

El vector normal a la recta es $\vec{n} = (3, -1)$

$$|PX \cdot \vec{n}| = \sqrt{PX \cdot PX} \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cos 30$$

Para no usar raíces cuadradas elevamos todo al cuadrado.

$$(PX \cdot \vec{n})^2 = (PX \cdot PX)(\vec{n} \cdot \vec{n})(\cos 30)^2$$

$$PX \cdot \vec{n} = (x + 2, 3x) \cdot (3, -1) = 3x + 6 - 3x = 6$$

$$36 = ((x + 2)^2 + 9x^2) 10 (\sqrt{3}/2)^2$$

$$36 = (x^2 + 4 + 4x + 9x^2) 10 \cdot 3/4 = (10x^2 + 4x + 4) 15/2$$

$$36 = (5x^2 + 2x + 2) 15 \Rightarrow 12 = (5x^2 + 2x + 2) 5$$

$$25x^2 + 10x + 10 = 12 \Rightarrow 25x^2 + 10x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 200}}{50} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{3}}{50} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{5}$$

Punto de corte entre r y s_1 :

$$x_1 = 1/5 (-1 + \sqrt{3})$$

$$y_1 = 3x_1 + 1 = 3/5(-1 + \sqrt{3}) + 1$$

Punto de corte entre r y s_2 :

$$x_2 = 1/5 (-1 - \sqrt{3})$$

$$y_2 = 3x_2 + 1 = -3/5(1 + \sqrt{3}) + 1$$

Vectores directores:

- $(x_1, y_1) - (-2, 1) = (x_1 + 2, y_1 - 1)$
 $-1/5 + 1/5\sqrt{3} + 2 = 9/5 + 1/5\sqrt{3}$
 $3/5(-1 + \sqrt{3}) + 1 - 1 = -3/5 + 3/5\sqrt{3}$
 $\vec{u}_1 = (9 + \sqrt{3}, -3 + 3\sqrt{3})$
- $(x_2, y_2) - (-2, 1) = (x_2 + 2, y_2 - 1)$
 $-1/5 - 1/5\sqrt{3} + 2 = 9/5 - 1/5\sqrt{3}$
 $-3/5(1 + \sqrt{3}) + 1 - 1 = -3/5 - 3/5\sqrt{3}$
 $\vec{u}_2 = (9 - \sqrt{3}, -3 - 3\sqrt{3})$

Comprobación de que forman un ángulo de 60 grados con r . Vector director de la recta $\vec{u} = (1, 3)$

$$\bullet \vec{u}_1 \cdot \vec{u} = (9 + \sqrt{3}, -3 + 3\sqrt{3})(1, 3) = 9 + \sqrt{3} - 9 + 9\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$(\vec{u}_1 \cdot \vec{u})^2 = 100 \times 3 = 300$$

$$(\|\vec{u}\|)^2 = 10$$

$$(\|\vec{u}_1\|)^2 = 81 + 18\sqrt{3} + 3 + 9 - 18\sqrt{3} + 27 = 120$$

$$300 = 10 \times 120(\cos\alpha)^2 \Rightarrow 1/4 = 0.25 = (\cos\alpha)^2 \Rightarrow \alpha = 60 \text{ grados}$$

$$\bullet \vec{u}_2 \cdot \vec{u} = (9 - \sqrt{3}, -3 - 3\sqrt{3})(1, 3) = 9 - \sqrt{3} - 9 - 9\sqrt{3} = -10\sqrt{3}$$

$$(\vec{u}_2 \cdot \vec{u})^2 = 300$$

$$(\|\vec{u}_2\|)^2 = 81 - 18\sqrt{3} + 3 + 9 + 18\sqrt{3} + 27 = 120$$

Sale como el caso anterior, por tanto $\alpha = 60$ grados

7.27. Obtén los 8 vértices de un paralelepípedo que cumpla las siguientes condiciones, si es que existe:

- i) Tres vértices son $(0, 0, 0)$, $(3, 1, 1)$, $(0, 1, 6)$
- ii) Todos los vértices están situados en el primer cuadrante
- iii) El volumen es de $144 u^3$
- iv) Ningún lado tiene longitud mayor de $20 u$

Solución:

$$A = (0, 0, 0), B = (3, 1, 1), C = (0, 1, 6)$$

$$AB = (3, 1, 1)$$

$$AC = (0, 1, 6)$$

El producto mixto da el volumen total.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 5x - 18y + 3z = 180$$

Tenemos dos parámetros libres. Tomando $x = z = 0$ tenemos $-18y = 180 \Rightarrow y = -10$. Los vectores que definen el paralelepípedo serían:

$$AB = (3, 1, 1), AC = (0, 1, 6) \text{ y } AD = (0, 10, 0)$$

CAPÍTULO 8

Variedades cuadráticas

8.1 Diagonalización ortogonal de matrices simétricas

En el Capítulo 6 vimos que dada A real, A es simétrica si y sólo si existen Q ortogonal y D diagonal tales que $A = QDQ^t$. Por tanto son equivalentes los resultados siguientes (cada uno implica el otro):

- (i) A simétrica
- (ii) Existen Q ortogonal y D diagonal tales que $A = QDQ^t$

En el Capítulo 7 vimos que Q ortogonal si y sólo si sus columnas son base ortonormal. Por tanto la diagonalización es ortogonal ($Q^{-1} = Q^t$) si y sólo si existe base de vectores propios ortonormal.

Resumen de las propiedades que cumple toda matriz A_n real y simétrica:

- Tiene n valores propios reales, contando multiplicidades
- $\dim V_{\lambda_i} =$ multiplicidad de λ_i como autovalor, por tanto es diagonalizable
- Existen Q ortogonal y D diagonal tales que $A = QDQ^t$.
- Q tiene por columnas una base ortonormal de vectores propios $\Rightarrow$ todo par $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ con $\vec{u} \in V_{\lambda_i}$ y $\vec{v} \in V_{\lambda_j}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ es un conjunto ortogonal. Se dice por ello que los subespacios propios son mutuamente ortogonales. V_{λ_i} es ortogonal a V_{λ_j} para $\lambda_i \neq \lambda_j$. De la matriz A se dice que es ortogonalmente diagonalizable.

¿ Cómo obtener la base ortonormal en la práctica? Está garantizado que los vectores propios correspondientes a autovalores distintos serán ortogonales entre sí. Para el caso de subespacios propios de dimensión mayor o igual que uno hemos de escoger su base de forma que sea ortogonal. Para ello tomamos un primer vector base y al segundo, tercero, etc le exigimos que además de cumplir las ecuaciones del subespacio propio sea ortogonal al primer vector, al primero y al segundo, etc. A partir de la base ortogonal se obtiene la ortonormal sin más que dividir cada vector por su norma.

Ejemplo 8.1 Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Se obtiene que los valores propios son $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 6$. Por ser los tres valores propios distintos la matriz tiene 3 subespacios propios de dimensión 1:

Resolviendo los $SL [A - \lambda I | \vec{0}]$ para encontrar los vectores propios obtenemos:

$$V_8 = \langle (1, -1, 0) \rangle \quad V_3 = \langle (1, 1, 1) \rangle \quad V_6 = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

Se comprueba fácilmente que los tres vectores son ortogonales.

La matriz $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ es ortogonal, y por tanto la matriz A se puede

factorizar en la forma $A = PDP^t$.

Ejemplo 8.2 Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, cuya ecuación característica es $0 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$

La matriz A es real y simétrica por tanto sabemos que existe una base ortogonal de vectores propios.

$$V_7 = \{(\frac{2z-y}{2}, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

De aquí podemos obtener el vector $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$

Para obtener un vector $\vec{v}_2$ que pertenezca a V_7 y sea ortogonal a $\vec{v}_1$ tenemos que resolver la ecuación:

$$(\frac{2z-y}{2}, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 0$$

$$\frac{2z-y}{2} + z = 0$$

$$4z - y = 0 \Rightarrow y = 4z$$

y sustituir el resultado, $y = 4z$, en la expresión genérica de un vector de V_7 : $(\frac{2z-y}{2}, y, z)$

$$\vec{v}_2 = (\frac{2z-4z}{2}, 4z, z) = (-z, 4z, z) \text{ con } z \text{ parámetro}$$

$$\text{Tomando } z = 1 \quad \vec{v}_2 = (-1, 4, 1)$$

Normalizando $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ obtenemos:

$$\vec{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

$$\vec{u}_2 = (-1/\sqrt{18}, 4/\sqrt{18}, 1/\sqrt{18})$$

$V_{-2} = \{(-z, -1/2z, z)/z \in \mathbb{R}\}$, de donde $\vec{v}_3 = (-2, -1, 2)$ y $\vec{u}_3 = (-2/3, -1/3, 2/3)$.

Por ser la matriz A real y simétrica V_7 y V_{-2} son ortogonales, y por tanto $\vec{u}_3$ es ortogonal a $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, que además son ortogonales entre sí.

La matriz $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{bmatrix}$ es ortogonal, y se verifica $A = PDP^t$, con

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

8.2 Definición de forma cuadrática

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una función F definida en $\mathbb{R}^n$ cuyo valor en $\vec{x}$ es $F(\vec{x}) = (\vec{x})^t A \vec{x}$ siendo A simétrica. A se denomina matriz de la forma cuadrática.

El producto escalar definido en el Capítulo 6 es un caso particular de forma cuadrática, la que tiene $A = I$.

Otros ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad F(\vec{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad F(\vec{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$$

Comparando los ejemplos vemos que cuando la matriz es diagonal no hay términos cruzados. Cuando la matriz no es diagonal el coeficiente del término cruzado (i, j) es el doble de $a_{i,j}$.

Ejemplo 8.3 Dada la función $F(\vec{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$, escribe F como una forma cuadrática.

$$F = (\vec{x})^t A \vec{x} \text{ con } A = \begin{bmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8.4 Dada $F(\vec{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$. Calcula $F(-3, 1)$.

$$F(-3, 1) = 9 + 24 - 5 = 28$$

8.3 Diagonalización de una forma cuadrática

Sea la forma cuadrática $F(\vec{x}) = (\vec{x})^t A \vec{x}$. Considerando una nueva base B , $P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$, se obtiene:

$$F(\vec{x}) = (P_B[\vec{x}]_B)^t A P_B[\vec{x}]_B$$

$$F(\vec{x}) = ([\vec{x}]_B)^t P_B^t A P_B [\vec{x}]_B \quad [1]$$

A es simétrica $\Leftrightarrow$ existe base ortonormal de autovectores.

Tomando B base de este tipo, $A = P_B D P_B^{-1} = P_B D P_B^t$ (El hecho de que la base sea ortonormal es lo que permite igualar $P_B^{-1} = P_B^t$). Despejando D se obtiene $D = P_B^t A P_B$ y sustituyendo esta expresión en la ecuación [1] tenemos:

$$F(\vec{x}) = ([\vec{x}]_B)^t D [\vec{x}]_B.$$

Por tanto, tomando las coordenadas respecto de la base de vectores propios ortonormal B , la forma cuadrática es diagonal.

A las columnas de P se las denomina **ejes principales de la forma cuadrática** $(\vec{x})^t A \vec{x}$

8.4 Visión geométrica de los ejes principales

Supongamos que $F(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$, donde A es una matriz simétrica de orden 2, y sea c una constante. El conjunto de todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ que cumplen la ecuación $\vec{x}^t A \vec{x} = c$ corresponde a una elipse (o círculo), una hipérbola, dos rectas paralelas, un punto, o la ecuación no tiene solución. Si A es una matriz diagonal la gráfica estará en posición estándar, como en la Figura 2. Si A no es diagonal la gráfica estará rotada respecto de la posición estándar, como en la Figura 1. Encontrar los ejes principales (determinados por los vectores propios

de A), equivale a encontrar un nuevo sistema de coordenadas con respecto al cual la gráfica está en posición estándar.

Figura 1 $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$

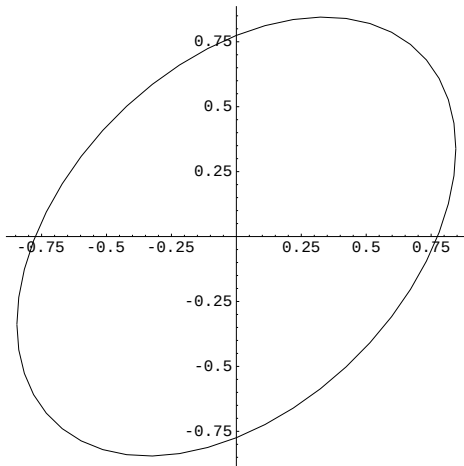
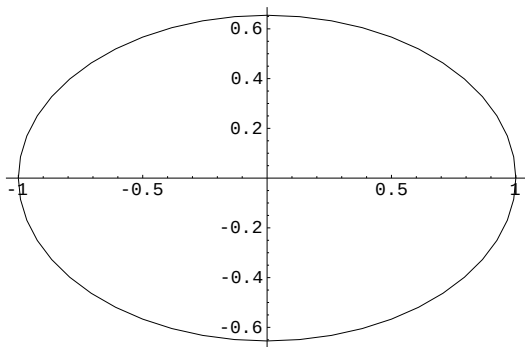


Figura 2 $3x^2 + 7y^2 = 3$



$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Autovalores de A : 3 y 7

Autovectores de A $\{(1, 1), (-1, 1)\}$

En las dos figuras siguientes vemos el caso de “hipérbolas”

Figura 3 $x^2 - 8xy - 5y^2 = 3$

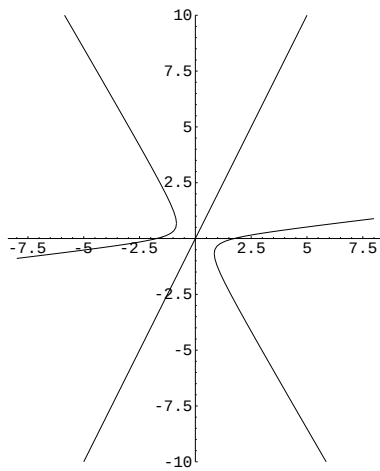
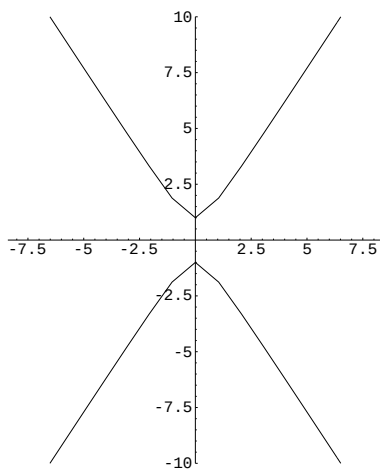


Figura 4 $-7x^2 + 3y^2 = 3$



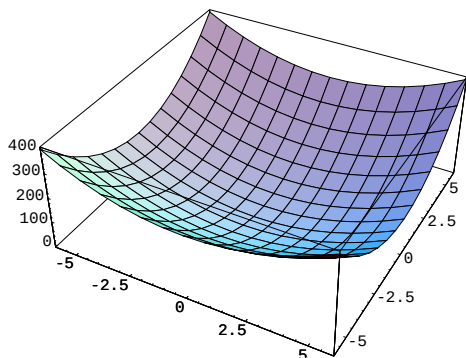
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Autovalores de A : -7 y 3

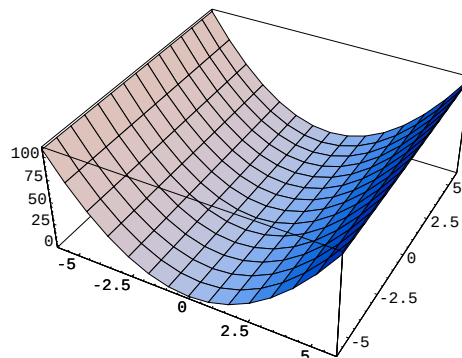
Autovectores de A $\{(1, 2), (-2, 1)\}$

8.5 Clasificación de las formas cuadráticas

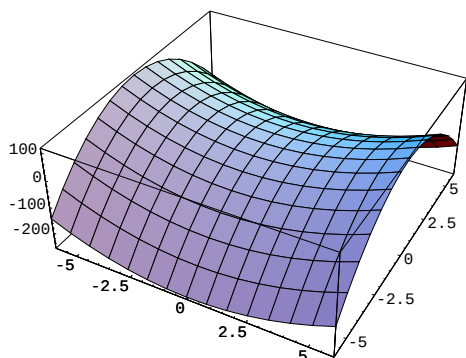
La Figura 5 representa la gráfica de cuatro formas cuadráticas. Para cada punto $\vec{x} = (x, y)$ en el dominio de la forma cuadrática F , se representa el punto (x, y, z) , con $z = F(\vec{x})$



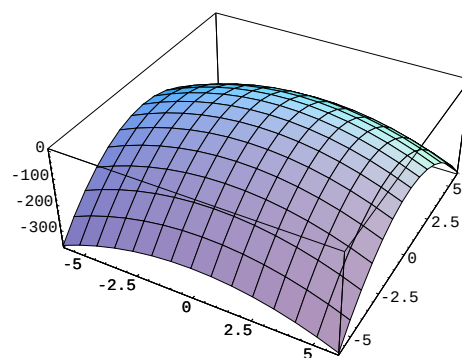
$$z = 3x^2 + 7y^2$$



$$z = 3x^2$$



$$z = 3x^2 - 7y^2$$



$$z = -3x^2 - 7y^2$$

En la Figura 5a todos los valores de $F(\vec{x})$ son positivos, excepto en $\vec{x} = \vec{0}$. Similarmente, en la Figura 5d todos los valores de $F(\vec{x})$ son negativos, excepto en $\vec{x} = \vec{0}$. El corte de las figuras con planos paralelos al XY produce elipses en las figuras 5a y 5d, rectas paralelas en la figura 5b e hipérbolas en la Figura 5c.

Estas figuras ilustran las siguientes definiciones. Una forma cuadrática F es

- “definida positiva” si $F(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$
- “definida negativa” si $F(\vec{x}) < 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$
- “indefinida” si $F(\vec{x})$ toma valores tanto positivos como negativos
- “semidefinida positiva” si $F(\vec{x}) \geq 0$ para todo $\vec{x}$
- “semidefinida negativa” si $F(\vec{x}) \leq 0$ para todo $\vec{x}$

Figura 5a definida positiva

Figura 5b semidefinida positiva

Figura 5c indefinida

Figura 5d definida negativa

La caracterización de las formas cuadráticas en función de los autovalores es la siguiente:
La forma cuadrática $F(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ es:

- definida positiva si A tiene todos los autovalores son positivos
- definida negativa si A tiene todos los autovalores son negativos
- indefinida si y sólo si A tiene tanto autovalores positivos como negativos

8.6 Aplicación: Ejes principales de una elipse

La ecuación general de una elipse en el plano y centrada en $(0,0)$ viene dada por una ecuación de la forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = cte$$

Donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, la matriz de la elipse, debe tener todos los valores propios positivos, si la cte es positiva, o todos negativos, si la cte es negativa.

Elipses con matriz asociada diagonal

Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ y $cte=8$. Es la elipse $2x^2 + 8y^2 = 8$,

que se puede escribir como $(x/2)^2 + y^2 = 1$. Esta elipse tiene semieje mayor 2, a lo largo del eje X, y semieje menor 1, a lo largo del eje Y.

Los semiejes en el eje X y en el eje Y son respectivamente $\sqrt{cte/d_1}$, $\sqrt{cte/d_2}$, siendo d_1 y d_2 los elementos de la diagonal principal.

La expresión de y en función de x es: $y = \pm \sqrt{1 - (x/2)^2}$

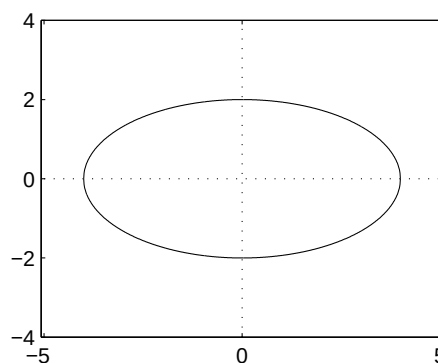
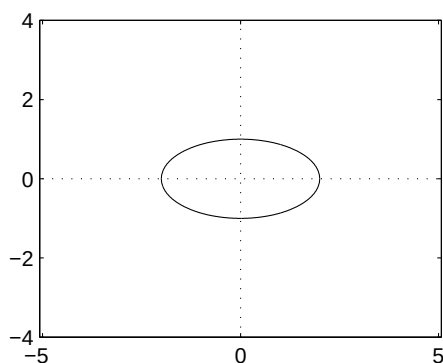
Por ejemplo $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ y $cte=-16$. Es la elipse $-x^2 - 4y^2 = -16$

que se puede escribir como $(x/4)^2 + (y/2)^2 = 1$. Esta elipse tiene semieje mayor 4, a lo largo del eje X, y semieje menor 2, a lo largo del eje Y.

Los semiejes en el eje X y en el eje Y son respectivamente $\sqrt{-16/-1}$, $\sqrt{-16/-4}$

La expresión de y en función de x es: $y = \pm 2 \times \sqrt{1 - (x/4)^2}$

Cuando la matriz asociada a la elipse es diagonal, la elipse tiene posición estándar: semiejes según los ejes X e Y.

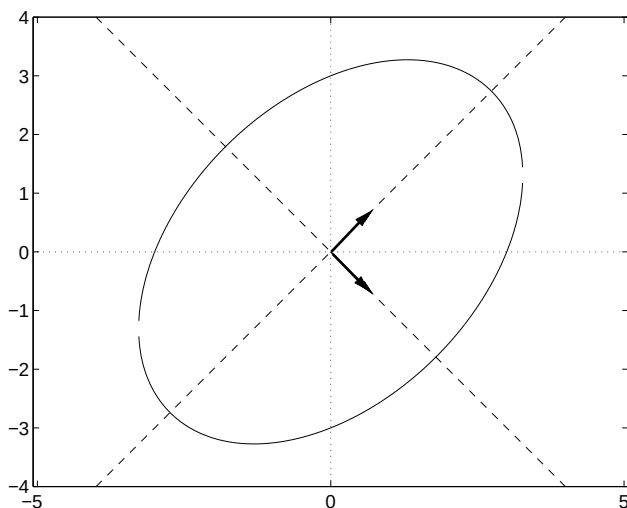


Elipses con matriz asociada no diagonal

Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, que tiene valores propios 3 y 7, y $\text{cte}=45$. Es la elipse $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 45$

La puedo escribir como la ecuación de segundo grado en y : $5y^2 - 4xy + (5x^2 - 45) = 0$

$$y = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 4 \times 5(5x^2 - 45)}}{10}$$



La elipse tendrá forma estándar tomando en vez de la base canónica, una base ortonormal de vectores propios de A .

$$|A - sI| = \begin{vmatrix} 5-s & -2 \\ -2 & 5-s \end{vmatrix} = (5-s)^2 - 4 = s^2 - 10s - 21 = 0$$

Las raíces son 3 y 7

$$[A - 3I|0] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \vec{u}_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$$

$$[A - 7I|0] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x - 2y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow \vec{u}_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$$

Respecto de la base ortonormal $B = \{(1, 1)/\sqrt{2}, (1, -1)/\sqrt{2}\}$ la ecuación de la elipse es $3(x')^2 + 7(y')^2 = 45$.

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 45$$

Las direcciones ortogonales $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son los ejes principales de la elipse.

Las longitudes de los semiejes son $\begin{cases} \sqrt{45/3} = \sqrt{15} = 3.87 \\ \sqrt{45/7} = 2.53 \end{cases}$

8.7 Ejercicios

Ejercicio 8.1 Encuentra los ejes principales del elipsoide y la longitud de los tres semiejes.

$$5x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xz = 24$$

8.8 Soluciones

8.1

La matriz asociada a la forma cuadrática es $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Obtenemos que los autovalores de A son 6, 4, 4.

La forma cuadrática diagonalizada es pues: $6(x')^2 + 4(y')^2 + 4(z')^2 = 24$

La base sobre la que se definen las coordenadas x', y', z' es una base ortonormal formada por los vectores propios $\vec{u}_1$ (asociado a $\lambda = 6$), $\vec{u}_2$ (a $\lambda = 4$) y $\vec{u}_3$ (a $\lambda = 4$).

$V_6 = \langle \vec{u}_1 \rangle$, siendo $\vec{u}_1 = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$

V_4 tiene dimensión dos, y su expresión paramétrica es $V_4 = \{ (z, y, z) \mid y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$. Dos vectores de V_4 ortogonales entre sí y unitarios son por ejemplo $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$ y $\vec{u}_3 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$

Los ejes principales son los dados por las direcciones de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ y los semiejes en esas direcciones son respectivamente: $\sqrt{24/6} = 2$, $\sqrt{24/4} = \sqrt{6}$, $\sqrt{24/4} = \sqrt{6}$