

Lección 5

Matriz de cambio de base

5.1 Matriz de cambio de base/coordenadas

En esta lección veremos como un cambio de base en un subespacio o espacio vectorial se puede escribir como una operación producto matriz-vector, con $P \times \text{vector1} = \text{vector2}$, siendo vector1 y vector2 las coordenadas en la primera y en la segunda base, respectivamente, del vector¹ v y P la matriz de cambio de base. Deduciremos la expresión general para un subespacio H^2 de dimensión d del espacio vectorial V de dimensión n .

Sean $v \in H$ y las bases de H $B = \{b_1, b_2, \dots, b_d\}$ y $B' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_d\}$

Podemos escribir: $v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_d b_d$ $v = c'_1 b'_1 + c'_2 b'_2 + \dots + c'_d b'_d$

Igualando las expresiones anteriores:

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_d b_d = c'_1 b'_1 + c'_2 b'_2 + \dots + c'_d b'_d \quad [\mathbf{1a}]$$

Expresando los elementos de la primera base respecto de la segunda:

$$\begin{cases} b_1 = a_{11} b'_1 + a_{21} b'_2 + \dots + a_{d1} b'_d \\ b_2 = a_{12} b'_1 + a_{22} b'_2 + \dots + a_{d2} b'_d \\ \dots \\ b_d = a_{1d} b'_1 + a_{2d} b'_2 + \dots + a_{dd} b'_d \end{cases} \quad [\mathbf{1b}]$$

Sustituyendo estas expresiones de los b_i en la ecuación $[\mathbf{1a}]$, obtenemos:

$$\begin{aligned} c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_d b_d &= \\ c_1 a_{11} b'_1 + c_1 a_{21} b'_2 + \dots + c_1 a_{d1} b'_d &+ c_2 a_{12} b'_1 + c_2 a_{22} b'_2 + \dots + c_2 a_{d2} b'_d + \dots + \\ c_d a_{1d} b'_1 + c_d a_{2d} b'_2 + \dots + c_d a_{dd} b'_d &= \\ (c_1 a_{11} + \dots + c_d a_{1d}) b'_1 &+ (c_1 a_{21} + \dots + c_d a_{2d}) b'_2 + \dots + (c_1 a_{d1} + \dots + c_d a_{dd}) b'_d = \\ c'_1 b'_1 + c'_2 b'_2 + \dots + c'_d b'_d \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} c'_1 = c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_d a_{1d} \\ c'_2 = c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \dots + c_d a_{2d} \\ \dots \\ c'_d = c_1 a_{d1} + c_2 a_{d2} + \dots + c_d a_{dd} \end{cases} \quad [\mathbf{1c}], \text{ o matricialmente } \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \dots \\ c'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_d \end{bmatrix}$$

¹Entiéndase “vector” en el sentido amplio de elemento de un espacio vectorial

² H puede ser el propio espacio completo V

El vector de elementos $\vec{c}'_i$ son las coordenadas de v relativas a la base B' , denotadas $[v]_{B'}$, y el vector de los c_i son las coordenadas de v relativas a la base B , denotadas $[v]_B$, por tanto tenemos:

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{bmatrix} [v]_B$$

que podemos escribir como:

$$\boxed{[v]_{B'} = P [v]_B} \quad [2] \quad , \quad \text{con } P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{bmatrix}$$

Fijándonos en las ecuaciones [1b] vemos que los elementos de la columna j de P son las coordenadas del vector $b_j \in B$ respecto de la base B' , por tanto:

$$\boxed{P = [[b_1]_{B'} \ [b_2]_{B'} \ \dots \ [b_d]_{B'}]} \quad [3]$$

Llamamos a P **matriz de cambio de base o de cambio de coordenadas de la base B a la base B'** . El producto por la izda. por P transforma el vector de coordenadas $[v]_B$ en $[v]_{B'}$.

P es invertible (el SL [1c] es comp. det. ya que las coorden. relativas a una base son únicas). Multiplicando [2] por P^{-1} por la izquierda, obtenemos:

$$P^{-1} [v]_{B'} = [v]_B$$

P^{-1} es la matriz que transforma las coordenadas relativas a la base B' en las coordenadas relativas a la base B . Las columnas de P^{-1} son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B .

Ejemplo 5.1. Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, con $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- a) Obtén la matriz P de cambio de base de B a la estándar.
 b) Sabiendo que un vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $(5, 2)$ respecto de la base B , obtén sus coordenadas en la base estándar.
 c) Obtén la matriz de cambio de base Q desde la estándar a B .
 d) Encuentra las coordenadas de $\vec{x} = \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}$ respecto de la base B .

a) $P_B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base B en coordenadas estándar por tanto es la matriz de cambio de base pedida: $P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$

En efecto, si (c_1, c_2) son las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base B , entonces:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\vec{b}_1} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\vec{b}_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\vec{x}}, \text{ lo que implica } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\vec{b}_1 \ \vec{b}_2} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{[\vec{x}]_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\vec{x}}, \text{ es decir, } P_B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz de cambio de base P tal que $P[\vec{x}]_B = \vec{x}$ es P_B .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_{[\vec{v}]_B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}_{\vec{v}}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

c)

$[\vec{x}]_B = P_B^{-1}\vec{x}$ partiendo de que la matriz de cambio de base en el apartado a) es P_B .

(si P_B pasa de coord. relativas a base B a coord. canónicas, P_B^{-1} pasa de coord. canónicas a coord. relativas a la base B).

$$\text{Por tanto } Q = P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La matriz Q se podría haber obtenido directamente de la definición [3]. La matriz pasa de base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, por tanto la primera columna de Q son las coordenadas de $\vec{e}_1$ respecto de $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ y la segunda columna las coordenadas de $\vec{e}_2$ respecto de $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

Los sistemas lineales a resolver son:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

De forma conjunta se resuelve: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_f \dots \sim_f \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & | & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

sol: $(1/2, -1/2) = \text{col 1 de } Q$

sol: $(1/2, 1/2) = \text{col 2 de } Q$

d)

$\begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}$ son las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^2$ o coordenadas estándar de $\vec{x}$

Método 1: Podemos obtener $[\vec{x}]_B$ directamente mediante la matriz Q de cambio de base del apartado anterior.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 42 \\ 2 \end{bmatrix} \\ Q & \vec{x} & [\vec{x}]_B \end{array}$$

Método 2: Si no conociéramos Q , podríamos obtener $[\vec{x}]_B$ como se mostró en la Lección 3:

Para obtener las coordenadas $[\vec{x}]_B = (c_1, c_2)$ del vector $\vec{x} = (4, 5)$ hay que resolver la ecuación:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\vec{b}_1} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\vec{b}_2} = \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}_{\vec{x}} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\vec{b}_1 \ \vec{b}_2} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{[\vec{x}]_B} = \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}_{\vec{x}} \quad , \quad P_B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Resolviendo mediante eliminación gaussiana:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 40 \\ 1 & 1 & 44 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 40 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 40 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

La solución es: $\boxed{[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 42 \\ 2 \end{bmatrix}}$

Comprobación $\vec{x} = 42\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$, $42 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}$

Nótese que la matriz de coeficientes del sistema es $P_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, que es una matriz invertible, y que por tanto la solución $[\vec{x}]_B$ del sistema de matriz ampliada $[P_B \mid \vec{x}]$ también se puede obtener como el producto $P_B^{-1}\vec{x}$. $[\vec{x}]_B = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 40 \\ 44 \end{bmatrix}$

En esta expresión la matriz $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$ es obviamente la matriz Q .

Ejemplo 5.2. Sean las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 2)\}$ y $B' = \{(-1, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 1, 2)\}$.

- a) Obtén la matriz de paso P tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$, para cualquier $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
 b) Obtén la matriz de paso Q tal que $Q[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_B$, para cualquier $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
 c) Sabiendo que un vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $(1, 6, 2)$ respecto a la base B , determina sus coordenadas respecto a la base B' .

Sol.:

a) En este apartado se pide determinar la matriz P tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$

Método 1

Recordamos la notación habitual: $P_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, que nos permite escribir:

$$P_B[\vec{x}]_B = \vec{x} \quad , \quad P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = \vec{x} \quad \text{e igualar:} \quad P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'} \quad [4]$$

Por ser B y B' bases de un espacio completo, en este caso $\mathbb{R}^3$, P_B y $P_{B'}$ son cuadradas e invertibles. Podemos entonces premultiplicar la expresión [4] por $P_{B'}^{-1}$, obteniendo:

$$\underline{P_{B'}^{-1} P_B} [\vec{x}]_B = P_{B'}^{-1} P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = [\vec{x}]_{B'},$$

de donde resulta que la matriz de cambio de base de B a B' es: $P = P_{B'}^{-1} P_B$

$$P = P_{B'}^{-1} P_B = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método 2

De acuerdo con [3] P de paso de B a B' es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base B expresados en coordenadas relativas a la base B' . Para obtener las 3 columnas hay que resolver los 3 sistemas lineales correspondientes, cuyas matrices ampliadas son:

$$[\vec{b}'_1 \ \vec{b}'_2 \ \vec{b}'_3 \mid \vec{b}_1] \text{ para despejar } [\vec{b}_1]_{B'}$$

$$[\vec{b}'_1 \ \vec{b}'_2 \ \vec{b}'_3 \mid \vec{b}_2] \text{ para despejar } [\vec{b}_2]_{B'}$$

$$[\vec{b}'_1 \ \vec{b}'_2 \ \vec{b}'_3 \mid \vec{b}_3] \text{ para despejar } [\vec{b}_3]_{B'}$$

Agrupamos los tres SLs resolviendo el SL con la matriz ampliada múltiple:

$$[\vec{b}'_1 \ \vec{b}'_2 \ \vec{b}'_3 \mid \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3] \quad [5]$$

Mediante eliminación gaussiana se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$\text{Por tanto:} \quad P = [\vec{b}_1]_{B'} \ [\vec{b}_2]_{B'} \ [\vec{b}_3]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente se obtiene la misma matriz P que con el Método 1.

Comentario: Nótese que el SL con la matriz ampliada múltiple [5] corresponde a la ecuación matricial $P_{B'} P =$

P_B , por lo que obviamente en este ejemplo, con $P_{B'}$ cuadrada y por tanto invertible, la solución encontrada es $P = P_{B'}^{-1}P_B$, que es la expresión que habíamos obtenido también con el Método 1.

b) Método 1. La matriz que se pide es $Q = P^{-1}$. Por tanto no hay más que calcular la inversa de la matriz P obtenida en el apartado anterior.

La inversa se obtiene fácilmente por el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método 2. Por construcción (aplicando [3]) Q se obtendría así: $Q = [[\vec{b}'_1]_B \ [\vec{b}'_2]_B \ [\vec{b}'_3]_B]$

c) En este apartado tenemos como dato $[\vec{v}]_B = (1, 6, 2)$ y se pide calcular $[\vec{v}]_{B'}$.

Método 1. El resultado se obtiene sin más que premultiplicar las coordenadas en B por la matriz P obtenida en el apartado a).

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$P \qquad \qquad [\vec{v}]_B$

Método 2. Este apartado se puede resolver en dos pasos sencillos sin necesidad de usar la matriz de cambio de base de B a B' , transformando primero de B a base estándar y después de base estándar a base B' .

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$P_B \qquad [\vec{v}]_B \qquad \vec{v}$

Calculamos ahora las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B' resolviendo el siguiente SL:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right], \text{ obteniendo } [\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$P_{B'} \qquad \qquad \vec{v}$

Teniendo en cuenta que $P_{B'}$ es invertible, en el segundo paso se puede optar por resolver, como hemos hecho, o por premultiplicar por $P_{B'}^{-1}$: $[\vec{v}]_{B'} = P_{B'}^{-1}\vec{v}$

Comentario: Sustituyendo en la expresión anterior $\vec{v} = P_B[\vec{v}]_B$ se obtiene $[\vec{v}]_{B'} = P_{B'}^{-1}P_B[\vec{v}]_B$, encontrando que hemos aplicado, en dos pasos, la matriz P .

Ejemplo 5.3. Considera las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ de un subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^3$.

a) Determina la matriz de cambio de base P tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$.

b) Calcula las coordenadas del vector $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ respecto de la base B' .

Sol.

a) Nos piden determinar la matriz de transformación $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$ para cualquier vector $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$P = [[\vec{b}_1]_{B'} \quad [\vec{b}_2]_{B'}]$$

P tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto a la base B' . Para obtener cada columna hay que resolver el correspondiente sistema lineal.

$$\left. \begin{array}{l} [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \mid \vec{b}_1] \text{ para despejar } [\vec{b}_1]_{B'} \\ [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \mid \vec{b}_2] \text{ para despejar } [\vec{b}_2]_{B'} \end{array} \right\}$$

Resolvemos los sistemas conjuntamente, ya que la eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan en la matriz de coeficientes es la misma.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} [\vec{b}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [\vec{b}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Método 1. Lo resolvemos en primer lugar usando la matriz P obtenida en el apartado a).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{La solución es: } [\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método 2. (si no disponemos de la matriz de paso, podemos usar este procedimiento).

A partir de $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ obtengamos $\vec{v}$ (es importante darse cuenta de que esto no es un cambio de base, porque $\vec{v}$ se expresa en coordenadas relativas a la base estándar de $\mathbb{R}^3$, y los cambios de base se refieren a bases del mismo subespacio):

$$\vec{v} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A continuación obtenemos las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B' , resolviendo el sistema siguiente (esto tampoco es un cambio de base):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{Por tanto: } c_1 = 5, c_2 = 1$$

$$\text{Comprobación: } 5(1, 1, 0) + 1(0, 1, 2) = (5, 6, 2) \quad [\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con este procedimiento hemos partido de las coordenadas $[\vec{v}]_B$ de un vector de H , relativas a la base

B de H , y hemos obtenido sus coordenadas $[\vec{v}]_{B'}$, relativas a la base B' de H , lo que sí ha sido un cambio de base.

Comentario al apartado a):

En este ejercicio también se pueden escribir las ecuaciones $P_B[\vec{x}]_B = \vec{x}$, $P_{B'}[\vec{x}]_{B'} = \vec{x}$ e igualar:

$$P_B[\vec{x}]_B = P_{B'}[\vec{x}]_{B'} \quad [4]$$

Sin embargo, por ser B y B' bases de un subespacio estricto (no completo), las matrices P_B y $P_{B'}$ no son invertibles (no son cuadradas), por lo que a partir de [4] no podemos despejar una expresión que nos dé P . El único método para obtener la matriz de cambio de base en un subespacio estricto es aplicar la fórmula [3] (como se ha hecho en a)).

5.2 Ejercicios

Ejercicio 5.1. Manualmente y con MATLAB. Encuentra el vector $\vec{x}$ correspondiente a las coordenadas dadas y la base dada:

$$a) B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.2. MATLAB. Encuentra el vector de coordenadas $[\vec{x}]_B$ de $\vec{x}$ respecto a la base dada. Obtén la matriz de paso P_1 de la base canónica a la base B . Obtén la matriz de paso P_2 de la base B a la base canónica.

$$a) B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.3. Sean $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, y las bases $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ y $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$. a) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de B a C . b) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de C a B . c) Sabiendo que las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $(2, 5)$, obtén sus coordenadas respecto de la base C .

Ejercicio 5.4.

Considera la matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & -4/3 \\ * & 1 \end{bmatrix}$ y las bases de $\mathbb{R}^2$ siguientes:

$$B1 = \{(1, 2), (0, 1)\}, \quad B2 = \{(3, 0), (4, 1)\}, \quad B3 = \{(5, 2), (0, 1)\}.$$

Señala cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) P es la matriz de cambio de coordenadas tal que $P[\vec{x}]_{B1} = [\vec{x}]_{B2}$
- b) P es la matriz de cambio de coordenadas tal que $P[\vec{x}]_{B3} = [\vec{x}]_{B2}$
- c) P es la matriz de cambio de coordenadas tal que $P[\vec{x}]_{B3} = [\vec{x}]_{B1}$
- d) Las tres afirmaciones anteriores son falsas.

Lección 6

Subespacios $\text{Col}(A)$ y $\text{Nul}(A)$

6.1 Subespacio de columnas y subespacio nulo de una matriz A

Definición 6.1. Se denomina **subespacio de columnas de una matriz** $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ al subespacio generado por las columnas de A , es decir, al conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A . Se denota como $\text{Col}A$.

$$A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] \quad \text{Col}A = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$$

Nótese que $\text{Col}A$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$, pues las columnas de A son vectores de m componentes.

Obviamente $\dim(\text{Col} A) = \text{rg}(A)$

Definición 6.2. Se denomina **subespacio nulo de una matriz** $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y lo denotamos $\text{Nul}A$, al conjunto $\text{Nul}A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$.

$\text{Nul}A$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$, y obviamente $\dim(\text{Nul} A) = n - \text{rg}(A)$.

Se obtiene entonces:

$$\dim(\text{Nul} A) + \dim(\text{Col} A) = n$$

Todo subespacio H de $\mathbb{R}^n$ es el subespacio nulo de una matriz $A_{m \times n}$, siendo A la matriz de coeficientes de la denominada forma implícita de H .