Lección 4

Intersección y suma de subespacios

4.1 Intersección y suma de dos subespacios

4.1.1 Intersección

Definición 4.1. *Sean H y F subespacios de V, se define intersección de H y F así :*
$H \bigcap F = \{v \in V / \ \ v \in H \ \ \text{y} \ \ v \in F\}$

Obviamente, $H \bigcap F \subseteq H$, $H \bigcap F \subseteq F$, $H \bigcap F = H \Leftrightarrow H \subseteq F$.

Teorema 4.1. *La intersección de dos subespacios H y F de V es un subespacio vectorial de V.*

Teorema 4.2. $dim(H \bigcap F) \leq dim\ H$ *y* $dim(H \bigcap F) \leq dim\ F$

Teorema 4.3. *Los elementos de $H \bigcap F$ cumplen a la vez las ecuaciones implícitas de H y las ecuaciones implícitas de F, por tanto la forma implícita de $H \bigcap F$ se obtiene uniendo la forma implícita de H y la de F, y eliminando en el sistema lineal homogéneo resultante las ecuaciones que sean combinación lineal de otras.*

Las ecuaciones redundantes se convierten en filas de ceros en la eliminación gaussiana

Ejemplo 4.1. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ z = 0\}$ *Plano XY*
$F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ y = 0\}$ *Plano XZ*

$H \bigcap F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ *Eje X*

Ejemplo 4.2. $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ *Eje X*
$T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ x = 0 \ , \ z = 0\}$ *Eje Y*

$G \bigcap T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0\} = \{(0,0,0)\}$

Ejemplo 4.3. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ z = 0\}$ *Plano XY*
$S \subset \mathbb{R}^3 =< (1,1,1) >$ *Recta no incluida en el Plano XY*
Las ecs. implícitas de S son $x = y$, $x = z$

$H \bigcap S \subset \mathbb{R}^3 = \{(0,0,0)\}$ *;* $x = y = z = 0$

4.1.2 Suma

Definición 4.2. *Sean H y F subespacios de V, se define suma de H y F así :*
$H + F = \{v \in V \ \ / \ \ v = v_1 + v_2 \ \text{ con } \ v_1 \in H \ \text{ y } \ v_2 \in F\}$

OJO: $H + F \neq H \bigcup F$

(se puede analizar por ejemplo tomando H : eje X y F : eje Y en $\mathbb{R}^3$. La suma es el plano XY pero la unión no lo es.)

$H \subseteq H + F$, $F \subseteq H + F$, $H + F = H \Leftrightarrow F \subseteq H$.

Teorema 4.4. *La suma de dos subespacios H y F de V es subespacio vectorial de V.*

Teorema 4.5. *$dim(H + F) \geq dim\ H$ y $dim(H + F) \geq dim\ F$.*

Teorema 4.6. *La unión de una base de H y una base de F es un s.g. de $H + F$.*

Podemos escribir la afirmación del teorema así: Dadas B_H base de H y B_F base de F, entonces $H + F = < B_H \bigcup B_F >$

$S = \{B_H \bigcup B_F\}$ es s.g de $H + F$ y el subconjunto de S con el mayor número de elementos l.i. posible es base de $H + F$.

dim $(H + F) \leq$ dim$H$ + dim$F$, con la igualdad en el caso de que la unión de las bases de H y F sea directamente base.

Definición 4.3. *Se dice que la* **suma** $H + F$ **es directa** *si para cada $v \in H + F$ existen $v_1 \in H$, $v_2 \in F$ únicos, tales que $v = v_1 + v_2$. Se denota $H \bigoplus F$.*

Otra forma de expresar la definición es la siguiente. La suma de H y F es directa si:
$v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, con $v_1, v_1' \in H$, $v_2, v_2' \in F \ \Rightarrow \ v_1 = v_1'$ y $v_2 = v_2'$.

Definición 4.4. *Sea H un subespacio vectorial de V. Se dice que G es un subespacio vectorial* **complementario** *de H si $V = H \bigoplus G$*

Teorema 4.7. *Todo subespacio vectorial H de un espacio vectorial de dimensión finita V, admite complementario.*

Definición 4.5. *Si V_1 y V_2 son dos subespacios complementarios ($V_1 \bigoplus V_2 = V$), entonces, dado $v \in V$ con $v = v_1 + v_2$ siendo $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, se dice que v_1 es la proyección de v sobre V_1 paralelamente a V_2 y que v_2 es la proyección de v sobre V_2 paralelamente a V_1.*

Teorema 4.8. *La suma de H y F es directa si y sólo si* $\boxed{dimH + dimF = dim(H + F)}$ *(La suma es directa si al unir una base de H y una base de F obtenemos una base de $H + F$).*

Demostración: "$\Rightarrow$"

Tomando la base $B = \{\ b_1, b_2, ..., b_d\ \}$ de H y la base $C = \{b_{d+1}, ..., b_{d+k}\}$ de F, consideremos la siguiente combinación lineal:
$c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_db_d + c_{d+1}b_{d+1} + c_{d+2}b_{d+2} + ... + c_{d+k}b_{d+k} = 0_V$

La primera parte del sumando es un elemento de H y la segunda un elemento de F. Sabemos que $0_V+0_V=0_V$, y como la descomposición es única, se deduce que los dos sumandos anteriores han de ser cada uno el elemento 0_V.

$$\begin{cases} c_1b_1+c_2b_2+...+c_db_d=0_V \\ c_{d+1}b_{d+1}+c_{d+2}b_{d+2}+...+c_{d+k}b_{d+k}=0_V \end{cases}$$

Como los b_i de cada igualdad son l.i., por ser base, los c_i de dada ecuación serán nulos, por tanto $c_1=c_2=...=c_d=c_{d+1}=...c_{d+k}=0$ y por tanto el conjunto $\{b_1,b_2,...,b_d,b_{d+1},...,b_{d+k}\}$ es l.i. Al ser s.g. de $H+F$ y l.i. es base, y por tanto $\dim(H+F)=$ d + k = $\dim H+\dim F$.

"$\Leftarrow$"

Tomando la base $B=\{\ b_1,b_2,...,b_d\ \}$ de H y la base $C=\{b_{d+1},...,b_{d+k}\}$ de F, si $v\in H+F$ se expresa de dos formas distintas como suma de $v_1\in H$ y $v_2\in F$, tendremos que dichas formas serán:

$v=c_1b_1+c_2b_2+...+c_db_d+c_{d+1}b_{d+1}+...+c_{d+k}b_{d+k}$ y

$v=c_1'b_1+c_2'b_2+...+c_d'b_d+c_{d+1}'b_{d+1}+...+c_{d+k}'b_{d+k}$.

Igualando las dos expresiones y sacando los b_i como factor común tenemos:

$(c_1-c_1')b_1+(c_2-c_2')b_2+...+(c_d-c_d')b_d+(c_{d+1}-c_{d+1}')b_{d+1}+(c_{d+2}-c_{d+2}')b_{d+2}+...+(c_{d+k}-c_{d+k}')b_{d+k}=0_V$

Por ser el conjunto $\{\ b_1,b_2,...,b_d,b_{d+1},...,b_{d+k}\}$ l.i. tenemos que cada coeficiente (c_i-c_i') será nulo, por tanto $c_i=c_i'$ y las dos descomposiciones son iguales, o lo que es lo mismo, la descomposición es única. □

Teorema 4.9. *Sean H y F <u>dos</u> subespacios vectoriales de V. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) La suma $H+F$ es directa

2) Si $v_1+v_2=0_V$, con $v_1\in H$ y $v_2\in F$, entonces $v_1=v_2=0_V$

3) $H\bigcap F=\{0_V\}$

4) Todo conjunto $\{v_1,v_2\}$ con $v_1\neq 0_V\in H$ y $v_2\neq 0_V\in F$ es linealmente independiente. Se dice también que <u>los subespacios H y F son linealmente independientes</u>.

Demostración:

- $1\Rightarrow 2$ Supongamos $v_1+v_2=O_V$.

  Como por otra parte $0_V+0_V=0_V$, con $=0_v\in H$ y $O_v\in F$, y la suma es directa, entonces $v_1=0_V$ y $v_2=0_V$.

- $2\Rightarrow 1$ Consideremos $v_1+v_2=v_1'+v_2'$, con $v_1,v_1'\in H$ y $v_2,v_2'\in F$. Entonces $(v_1-v_1')+(v_2-v_2')=0_V$, perteneciendo el primer sumando a H y el segundo a F. Por la propiedad 2) $v_1-v_1'=0_V$ y $v_2-v_2'=0_V$, y por tanto $v_1=v_1'$ y $v_2=v_2'$, es decir, la suma es directa.

- $2\Rightarrow 3$ $v\in H\bigcap F$ implica $v\in H$ y $v\in F$. $v\in F\Rightarrow -v\in F$ y $v+-v=0_V$ es la suma de un vector de H y un vector de F. Por 2), al ser la suma nula cada uno de ellos es nulo, por tanto $v=0_V$

- $3\Rightarrow 2$ Sean dos vectores $v_1\in H$ y $v_2\in F$ tales que $v_1+v_2=0_V$. Reordenando la ecuación obtenemos $v_1=-v_2$, es decir, uno es el opuesto de otro y por tanto ambos, v_1 y v_2 pertenecen al subespacio intersección. Como este subespacio es el subespacio cero, $v_1=v_2=0_V$.

- $2\Rightarrow 4$ Consideramos el par de elementos no nulos $v_1\in H$ y $v_2\in F$. En la combinación lineal $\alpha v_1+\beta v_2=0_V$ el primer sumando pertenece a H y el segundo a F, y de acuerdo con 2) esto implica que $\alpha v_1=0_V$ y $\beta v_2=0_V$. Por hipótesis ni v_1 ni v_2 son el elemento nulo, por tanto se concluye que $\alpha=\beta=0$, y que el par $\{v_1,v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.

- $4\Rightarrow 2$ Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos $v_1+v_2=0_V$ con $v_1\neq 0\in H$ y $v_2\neq 0\in F$. Entonces $v_1=-v_2$ y el conjunto de vectores no es l.i.

□

4.1.3 Relación de dimensiones en la suma e intersección de dos subespacios

Teorema 4.10. *La relación general entre las dimensiones de la suma y de la intersección de dos subespacios cualesquiera es:* $\boxed{dimH \ + \ dimF \ = \ dim(H+F) \ + \ dim \ (H \bigcap F)}$

En el caso de la suma directa la dimensión de la intersección es 0 y la relación se reduce a la presentada en el Teorema 8.

4.1.4 Ejemplos de suma e intersección de dos subespacios

Ejemplo 4.4. *Determina los subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^2$ $A+B$ *y* $A \bigcap B$*, siendo* A *y* B *los subespacios de* $\mathbb{R}^2$ *siguientes:*

$A = \{\ (x_1, 0)\ /\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ *es el eje* X *de* $\mathbb{R}^2$
$B = \{\ (0, x_2)\ /\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ *es el eje* Y *de* $\mathbb{R}^2$

$A + B = \{\ (x_1, x_2)\ /\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$
En efecto $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$ *con* $(x_1, 0) \in A$ *y* $(0, x_2) \in B$
Por tanto $A + B = \mathbb{R}^2$

Tomando las bases $\vec{b}_1 = (1, 0)$ *y* $\vec{b}_2 = (0, 1)$ *de* A *y* B *respectivamente, se observa que la unión de las dos bases es un conjunto l.i., por tanto la base de* $A + B$ *es* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ *y* $A + B = \mathbb{R}^2$

Ejemplo de vector de $A + B = (7, 6) = (7, 0) + (0, 6)$

Ejemplo de vectores de A: $(7, 0), (-4, 0), (1/3, 0)$
Ejemplo de vectores de B: $(0, 4), (0, -200.2), (0, -4/7)$

$A \bigcap B$: *La forma implícita de los elementos de* A *es* $x_2 = 0$
La forma implícita de los elementos de B *es* $x_1 = 0$

Por tanto la forma implícita de los vectores comunes es: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, *y* $A \bigcap B = \{(0, 0)\}$

Ejemplo 4.5. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\} =< (2, 0, 0), (1, 1, 0) >$ *Plano XY*
$F \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ y = 0\} =< (3, 0, 4), (0, 0, 3) >$ *Plano XZ*
Estudia $H + F$ *y* $H \bigcap F$.

Es inmediato comprobar que la unión de las bases de H y F genera $\mathbb{R}^3$.

$$\text{El SL} \ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & | \ x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | \ y \\ 0 & 0 & 4 & 3 & | \ z \end{bmatrix}}_{s.g. \ de \ H+F} \ \text{es en efecto compatible para todo vector } \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Observamos que el SL es compatible indeterminado, y por tanto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *se puede expresar de infinitas formas como suma de un vector de H y un vector de F. La suma no es directa.*

Mostramos dos descomposiciones posibles en el siguiente ejemplo:

$$(6, 1, 7) = (3, 1, 0) + (3, 0, 7) \ \textit{con} \ (3, 1, 0) \in H \ \textit{y} \ (3, 0, 7) \in F$$
$$(6, 1, 7) = (5, 1, 0) + (1, 0, 7) \ \textit{con} \ (5, 1, 0) \in H \ \textit{y} \ (1, 0, 7) \in F$$

El sistema es indeterminado porque la unión de la base de F y la base de H es un conjunto l.d., o dicho de otra forma, porque la dimensión del subespacio suma es menor que la suma de las dimensiones de los dos subespacios.

Una base sencilla de $H + F$ *se obtiene eliminando de la matriz A el vector de la columna no pivotal. La base resultante es* $B = \{(2, 0, 0), (1, 1, 0), (3, 0, 4)\}$. *Sin embargo, puesto que* $H + F$ *es* $\mathbb{R}^3$, *la base más sencilla es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

En este caso la dimensión del subespacio suma es 3, y la suma de las dimensiones de los subespacios es 4.

Uniendo las ecs. implícitas obtenemos la forma implícita de $H \bigcap F$: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Resolviendo la forma implícita de $H \bigcap F$ *obtenemos una base sencilla de* $H \bigcap F$, *que es* $B = \{(1, 0, 0)\}$, *y dim* $H \bigcap F$ *= 1*

Comprobamos que se cumple la relación de dimensiones: $2 + 2 = 3 + 1$

Ejemplo 4.6. $G \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ y = 0 \ , \ z = 0\} =< (1,0,0) >$ *Eje X*
$T \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ x = 0 \ , \ z = 0\} =< (0,1,0) >$ *Eje Y*
Estudia $G + T$ *y* $G \bigcap T$

Es inmediato comprobar que $G + T$= *Plano* XY *de* $\mathbb{R}^3$. *En efecto el SL* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & | \ x \\ 0 & 1 & | \ y \\ 0 & 0 & | \ z \end{bmatrix}$ *es compatible si y sólo si* $z = 0$, *es decir, para los vectores* $(x,y,0) \in \mathbb{R}^3$

Otra forma sencilla de verlo sería sumando las formas paramétricas:
$G + T = \{(x,0,0) + (0,y,0) = (x,y,0) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \ \}$

La unión de las bases de G *y* T *es un conjunto l.i. por tanto la suma es directa, con la dimensión del espacio suma igual a la suma de las dimensiones. Una posible base de* $G + T$ *es* $B = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Uniendo las implícitas tenemos $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ *(la repetida la quitamos), por tanto* $G \bigcap T = \{\vec{0}\}$ *y* *dim*$G \bigcap T$ = *0.*

Comprobamos que se cumple la relación de dimensiones: $1 + 1 = 2 + 0$

Ejemplo 4.7. $H \subset \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ / \ z = 0\} =< (1,0,0),(0,1,0) >$ *Plano XY*
$S \subset \mathbb{R}^3 =< (1,1,1) >$ *Recta no incluida en el Plano XY*
Estudia $H + S$ *y* $H \bigcap S$

La unión de las bases de H *y* S *genera* $\mathbb{R}^3$. *En efecto el SL* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | \ x \\ 0 & 1 & 1 & | \ y \\ 0 & 0 & 1 & | \ z \end{bmatrix}$ *es compatible para todo* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

La unión de las bases de H *y* S *es un conjunto l.i. por tanto la suma es directa, y la dimensión del subespacio suma es igual a la suma de las dimensiones. La base más sencilla de* $H + S$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

Uniendo las ecs. implícitas tenemos $\begin{cases} z = 0 \\ x = y = z \end{cases}$ *, por tanto* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$H \bigcap S = \{\vec{0}\}$ *y por tanto dim*$H \bigcap S$ = *0.*

4.1.5 Tres ejercicios resueltos (todos en $\mathbb{R}^4$)

Ejemplo 4.8. *Considera en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x+2y+z-t = 0\;;\; z-t = 0\}$ y $T =< (1,1,1,1) >$. a) Obtén una base de $S+T$, b) razona por qué la suma $S+T$ es directa, c) determina si $\vec{v} = (7,1,5,5)$ pertenece a $S+T$ y en caso afirmativo descompón $\vec{v}$ como suma de un vector $\vec{v}_S$ en S y un vector $\vec{v}_T$ en T, d) ¿ son S y T complementarios uno del otro?*

Solución:

a) En primer lugar obtenemos una base de S, resolviendo sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | \; 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | \; 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | \; 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | \; 0 \end{bmatrix}. \text{ La solución tiene la forma paramétrica } \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = t \\ t = t \end{cases},$$

que también puede escribirse como $(-2y, y, t, t)$. Una base sencilla es: $\{(-2,1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

Disponemos los vectores base de T y S por columnas y hacemos la eliminación gaussiana para determinar las columnas pivotales.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las tres columnas son pivotales, por lo tanto una posible base de $S+T$ es la formada por los tres vectores de partida: $B = \{(1,1,1,1),(-2,1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

Por menores en la primera matriz por la izquierda vemos que $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+2) \neq 0$ *(por cofactores de tercera columna). Podríamos haber usado este resultado para deducir que el rango es 3.*

b) La suma es directa porque el conjunto formado uniendo las bases de los dos subespacios es linealmente independiente. Eso garantiza que un vector de la suma se escribirá de forma única como suma de un vector de S y un vector de T (sistema compatible determinado).

Observación: *Podríamos haber adelantado que la dimensión de la suma es 3, sin más que comprobar que $(1,1,1,1)$ no está incluido en S, ya que no cumple las ecuaciones de S, y que por tanto $(1,1,1,1)$ forma con la base de S un conjunto de tres vectores linealmente independientes.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | \; 7 \\ 1 & 1 & 0 & | \; 1 \\ 1 & 0 & 1 & | \; 5 \\ 1 & 0 & 1 & | \; 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 7 \\ 0 & 3 & 0 & | & -6 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 7 \\ 0 & 3 & 0 & | & -6 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

El SL es compatible, por tanto $\vec{v}$ pertenece al subespacio suma, y se puede expresar cómo:

$$\vec{v} = \underbrace{3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}_{\vec{v}_T} \underbrace{- 2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}_{\vec{v}_S}$$

$$\vec{v_T} = 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\\3\end{bmatrix} \qquad \vec{v_S} = -2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-2\\2\\2\end{bmatrix}$$

d) Los subespacios no son complementarios entre sí porque, aunque su suma es directa, la suma no es igual al espacio completo $\mathbb{R}^4$. Sin hacer ninguna operación ya se deduce directamente del enunciado que los subespacios no pueden ser complementarios, porque su suma no es $\mathbb{R}^4$. En efecto las dos ecuaciones independientes en S determinan que su dimensión es 2, y T, con un solo vector base, tiene dimensión 1. Por tanto su suma no puede tener dimensión 4.

Ejemplo 4.9. *Dados en* $\mathbb{R}^4$ *los subespacios* $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + 2y + z - t = 0\}$ *y* $T =< (1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 0) >$*, obtén una base de* $S + T$ *y una base* $S \bigcap T$.

Solución:

S tiene dimensión 3 por estar definido por una sola ecuación en $\mathbb{R}^4$.

T tiene dimensión 2, ya que su base tiene dos vectores (el s.g. del enunciado es l.i. - un vector no es múltiplo del otro - y por tanto base).

De acuerdo con las dimensiones posibles de los subespacios suma e intersección y con la relación entre las dimensiones de suma e intersección, los escenarios posibles son:

	$dim\ S+T$	$dim\ S\bigcap T$
A)	3	2
B)	4	1

Las reglas concretas son:
El subespacio suma tiene como mínimo la dimensión del subespacio de mayor dimensión.
El subespacio intersección tiene como máximo la dimensión del subespacio de menor dimensión.
La dimensión máxima del subespacio suma es igual a la dimensión del espacio total $\mathbb{R}^4$.
Se ha de cumplir la relación de dimensiones.

Si se diera el escenario B no tendríamos que calcular la base del subespacio suma, porque la suma sería $\mathbb{R}^4$ *y daríamos directamente la base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *como respuesta.*

Obtención de la base de la intersección:

La forma implícita del subespacio intersección está constituida por las ecuaciones implícitas de los dos subespacios, eliminando del conjunto de ecuaciones resultante aquellas que desaparezcan en la eliminación gaussiana, a fin de tener el mínimo número posible de ecuaciones.

- *La forma implícita de S la conocemos del enunciado.*
- *A continuación obtenemos la forma implícita de T, imponiendo que sea compatible el siguiente SL:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ 1 & 1 & | \ y \\ 1 & 0 & | \ z \\ 1 & 0 & | \ t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ 0 & -1 & | \ y-x \\ 0 & -1 & | \ z-y \\ 0 & 0 & | \ t-z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ 0 & -1 & | \ y-x \\ 0 & 0 & | \ x-2y+z \\ 0 & 0 & | \ t-z \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones implícitas de T son: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$

Para obtener una base de la intersección hay que resolver el SL formado por las tres ecuaciones (una que aporta S y las dos que aporta T): $\begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$

Lo resolvemos mediante eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{21(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{13(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{2(-1/4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$F_{12(-2)}$

$x = -t/2$, $y = t/4$, $z = t$, $t = t$

Forma paramétrica $(-t/2, t/4, t, t)$ *Base más sencilla de posible de* $S \bigcap T$: $\{(-2, 1, 4, 4)\}$

Suma:

El resultado anterior, con $dim S \bigcap T = 1$ *nos dice que estamos en el caso B.*

En efecto dim $(S + T) = 3 + 2 - 1 = 4$, *y por tanto* $S + T = \mathbb{R}^4$.

Habíamos adelantado ya que de darse el caso B podríamos escoger como base de $\mathbb{R}^4$ *la más sencilla posible, que es la canónica,* $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Con el propósito de confirmar el resultado anterior, y también a fin de presentar un ejemplo más de suma de subespacios, vamos a calcular la base de la suma a partir de la unión de las dos bases. La unión de las dos bases produce un s.g. de la suma, del que seguidamente se eliminan los vectores linealmente dependientes.

La base de T *es clara, puesto que los dos vectores son linealmente independientes. La base de* S *se obtiene sin más que resolver la ecuación implícita de* S:

$x = -2y - z + t \Rightarrow (-2y - z + t, y, z, t) \Rightarrow$

Una base sencilla es: $B = \{(1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, 1), (-2, 1, 0, 0)\}$.

Disponemos en columnas los vectores de las dos bases a fin de seleccionar los correspondientes a columnas pivotales, efectuando la eliminación gaussiana.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]_{\underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{S}\ \underbrace{\hphantom{xxx}}_{T}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} & -4 \end{bmatrix}$$

Hay cuatro columnas pivotales, por tanto confirmamos que $S + T$ *es* $\mathbb{R}^4$ *y que es correcto dar como base del subespacio suma la base canónica de* $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo 4.10. *Obtén una base de un subespacio* G *complementario de* $F =< (1,1,1,1),(1,2,3,4) >$.

Sol.:

F *viene dado por un s.g.l.i. y por tanto una base, que llamaremos* B. *Los dos vectores de* B *son conjunto l.i. porque uno no es múltiplo del otro.*

Un subespacio G *complementario tiene que tener dimensión 2, con una base* B' *que unida a la base* B *forme un conjunto l.i., es decir con rango 4.*

Disponiendo la base B *de* F *como las columnas tercera y cuarta de una matriz, tenemos:*

$$\begin{bmatrix} - & - & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 2 \\ - & - & 1 & 3 \\ - & - & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Tomando para las columnas 1 y 2 los vectores $\vec{e}_1$ *y* $\vec{e}_2$ *vemos que el conjunto total es l.i., porque el determinante que resulta es:* $1 \times 1 \times (4-3) \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Por tanto una base de un posible subespacio G *es* $B' = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$.

4.2 Intersección y suma de $p > 2$ subespacios

La definición y propiedades de la intersección, suma y suma directa de más de dos subespacios se extienden de forma natural de lo establecido para dos subespacios, excepto en el caso de los teoremas 9 y 10. Respecto del teorema 9, la suma directa de $p > 2$ subespacios implica que la intersección de los p subespacios es el vector cero, pero el recíproco no se cumple. Por ejemplo las tres rectas generadas por (1,0,0), (1,1,0) y (0,1,0) en $\mathbb{R}^3$ tienen como intersección el vector $(0,0,0)$, sin embargo su suma no es directa, ya que los tres vectores no son linealmente independientes. Por esta razón el teorema 10 no se extiende a $p > 2$ subespacios.

Suma directa de $p > 2$ subespacios

Seguidamente presentamos explícitamente, por claridad, la definición de la suma directa de p subespacios y el desglose de sus propiedades:

Definición 4.6. *Se dice que la suma de los subespacios V_1, V_2, ..., V_p de V es directa y se escribe $V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus .... \bigoplus V_p$ si cualquier elemento de dicha suma puede expresarse de una única forma como suma de elementos de V_1, V_2, ... V_p, esto es, si:*

$$v_1 + v_2 + ... + v_p = v_1' + v_2' + ... + v_p' \quad \text{con } v_i,\ v_i' \in V_i, \quad i = 1, ..., p$$
$$\Rightarrow v_i = v_i' \quad i = 1, ..., p$$

Teorema 4.11. *La suma de los subespacios $V_1, V_2 \ldots V_p$ es directa si y sólo si se verifica:*

$$dim\ (V_1 + V_2 + \ldots + V_p) = dimV_1 + dimV_2 + \ldots + dimV_p$$

(Este teorema es la extensión del Teorema 8 a $p > 2$ subespacios)

Teorema 4.12. *Sean V_1, $V_2, \ldots, V_p$, subespacios vectoriales de V. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) La suma $V_1 + V_2 + \ldots + V_p$ es directa.

2) Si $v_1 + v_2 + \ldots + v_p = 0_V$, con $v_i \in V_i$ entonces $v_1 = v_2 = \ldots = v_p = 0_V$

3) Todo conjunto $\{v_1, ..., v_p\}$ con $v_i \in V_i$ y $v_i \neq 0_V$ para todo i (un elemento de cada subespacio y en ningún caso el elemento cero) es linealmente independiente.

Teorema 4.13. *Si $V_1 + V_2 + \ldots + V_p$ es suma directa, entonces $V_1 \bigcap V_2 \bigcap \ldots \bigcap V_p = \{O_V\}$*

(Estos dos últimos teoremas muestran como se aplican las propiedades del Teorema 9 al caso de $p > 2$ subespacios)

4.3 Ejercicios

En $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 4.1. *Halla los vectores comunes a los subespacios generados por los conjuntos* $\{(1,2,3),(3,2,1)\}$ *y* $\{(1,0,1),(3,4,3)\}$. *(Pista: Es lo mismo que pedir el subespacio intersección.)*

Ejercicio 4.2. *Sea el conjunto de vectores* $\{(4,-5,7),(3,-3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)\}$. *Halla un sistema mínimo de generadores del subespacio generado por ellos. Estudia si dicho subespacio es el mismo que el generado por los vectores* $\{(1,-2,3),(3,0,-1)\}$.

Ejercicio 4.3. *Sean U y V las rectas siguientes:*
$U =< (1,0,-1) >$, $V =< (1,2,3) >$

a) Obtén una base de $U+V$ y describe qué lugar geométrico representa
b) Argumenta si la suma anterior es o no suma directa

Ejercicio 4.4. *Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:* $U = \{(x,y,z)/x+y+z=0\}$, $V = \{(x,y,z)/x=y=0\}$ *y* $W = \{(x,y,z)/x=z\}$. *Demuestra que: a)* $\mathbb{R}^3 = U+V$, *b)* $\mathbb{R}^3 = U+W$, *c)* $\mathbb{R}^3 = V+W$ *y razona cuándo es directa la suma.*

Ejercicio 4.5. *Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (7,11,63)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano Π: $3x+6y-z=0$ y un vector $\vec{v}_2$ de la recta $r : \{(1,2,3)\lambda \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\}$. En caso de que sea posible:*

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano Π.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta r.

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

En $\mathbb{R}^4$

Ejercicio 4.6. *Considera el subconjunto F de $\mathbb{R}^4$ siguiente:*
$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x-y+2z+t=0\}$.
a) Justifica que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$
b) Halla una base y la dimensión de F
c) Halla la dimensión y una base de un subespacio complementario de F, denotándolo F'
d) Descompón $\vec{v} = (2,1,3,0) \in \mathbb{R}^4$ como suma de un vector de F y un vector de F'.

Ejercicio 4.7. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios* $U = \{(a+b,0,a,b) \;/\; a,b \in \mathbb{R}\}$ *y* $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \;/\; x_1 - x_4 = 0 \;;\; x_3 = 0\}$. *Se pide:*

a) Encuentra una base de U y las ecuaciones implícitas de U.
b) Encuentra una base de V.
c) Obtén una base y la dimensión de $U \bigcap V$.
d) Obtén una base y la dimensión de $U+V$.
e) En caso de que $U+V \neq \mathbb{R}^4$, halla un subespacio complementario de $U+V$.

Ejercicio 4.8. *Considera los subespacios* $U =< (1,0,-1,2),(0,1,1,0) >$ *y* $V = \begin{cases} 2x-2y+z+t=0 \\ 2x-t=0 \end{cases}$,

a) Obtén una base C *de* $U \bigcap V$.

b) Comprueba explícitamente que el/los vectores de esa base C *son combinación lineal de* $\{\ (1,0,-1,2),(0,1,1,0)\ \}$.

c) Comprueba explícitamente que el/los vectores de la base C *cumplen las ecuaciones de* V.

d) Obtén una base D *de* $U+V$.

Ejercicio 4.9. *Considera los siguientes subespacios de* $\mathbb{R}^4$*:*

$U :< (1,2,1,1),(2,0,-1,0) >$ $\qquad$ $V :< (3,2,0,a+2) >$

Señala cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) $U+V$ *no es suma directa para ningún* $a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ *b)* $U+V$ *es suma directa si y sólo si* $a \neq -1$

c) La suma es directa si y sólo si $a=-1$ $\qquad$ *d) Ninguna de las anteriores*

$p > 2$ subespacios

Ejercicio 4.10. *Sean* U, V *y* W *las rectas siguientes:*

$U =< (1,0,-1) >$, $V =< (1,2,3) >$, $W =< (-1,4,a) >$

a) Calcula una base de $U+V+W$ *y describe el lugar geométrico que representa, en función del parámetro* a

b) Argumenta si la suma anterior es o no suma directa, en función del parámetro a.