Lección 3

Sistema generador, base, coordenadas, ecuaciones implícitas

3.1 Subespacio generado

Definición 3.1. *Sea* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$*, siendo* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*. El conjunto de todas las combinaciones lineales de* $v_1, v_2, \ldots, v_p$ *se denomina* **subconjunto generado** *por* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$*, y se denota* $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$*.*

Es decir, $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$ *es el conjunto de todos los elementos que se pueden escribir de la forma:* $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p \quad , \quad$ *con* $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{K}$*.*

También se utiliza para el subespacio generado por S *la notación* $< S >$*.*

Teorema 3.1. *Dado* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$*,* $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$ *es subespacio de* V*.*

Demostración:

- $0_V = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_p$
- $u = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_pv_p \quad , \quad v = \mu_1v_1 + \mu_2v_2 + \ldots + \mu_pv_p \quad \Rightarrow$
  $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + (\lambda_2 + \mu_2)v_2 + \ldots + (\lambda_p + \mu_p)v_p$
- $u = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_pv_p \quad \Rightarrow \quad cu = (c\lambda_1)v_1 + (c\lambda_2)v_2 + \ldots + (c\lambda_p)v_p$

□

A partir de ahora al "subconjunto generado" lo denominaremos "subespacio generado". Así $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$ será el **subespacio generado** por el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.

3.2 Sistema generador

Definición 3.2. *Un conjunto de elementos* $S = \{v_1, v_2, \ \dots \ , v_p\} \subset H$*, siendo* H *subespacio vectorial de* V[1]*, espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*, es un sistema generador o sistema de generadores de* H*, si* $\forall v \in H$
$\exists \ c_1, c_2, \dots c_p \in \mathbb{K} \ / \ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = v$ **[1]**
es decir, si para todo $v \in H$*,* v *es combinación lineal de los elementos de* S*.*

Con frecuencia abreviaremos la expresión "sistema generador" como s.g.

Teorema 3.2. S *es s.g. de* $H \Leftrightarrow < S >= H$

Demostración: • $\Rightarrow$

Por una parte, $H \subset< S >$, ya que todo elemento de H puede generarse como c.l. de los elementos de S.

Por otra parte, $< S >\subset H$, ya que los elementos de S pertenecen a H, por definición de s.g., y por ser H subespacio vectorial todas las c.l. de sus elementos están contenidas en él.

Por cumplirse que $H \subset< S >$ y $< S >\subset H$, se deduce que $H =< S >$

• $\Leftarrow$

$H =< S >$, por tanto los elementos de S pertenecen a H, cumpliéndose la primera condición. Además S es s.g. de H, pues todos los elementos de H son combinaciones lineales de los elementos de S.

□

3.3 Ejemplos de sistemas generadores y sus subespacios generados

Subespacios de $\mathbb{R}^3$ **como subespacios generados**

• Sea $\vec{v}$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$. Entonces el subespacio $< \vec{v} >$ es la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\vec{0}$ y por el extremo del vector $\vec{v}$.

Los elementos del subespacio $< \vec{v} >$ tienen la forma paramétrica $\vec{x} = \alpha\vec{v}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

• Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, y $\vec{v}$ no es múltiplo de $\vec{u}$, es decir, si son l.i., entonces $< \vec{u}, \vec{v} >$ es el plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{0}$.

Los elementos del subespacio $< \vec{u}, \vec{v} >$ tienen la forma paramétrica $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

• Por otra parte, $< \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} >= \mathbb{R}^3$ si cualquier par de esos vectores genera un plano y el tercero no pertenece a dicho plano, es decir, no es combinación lineal de ellos, o lo que es lo mismo, si son l.i.

Subespacios de matrices como subespacios generados

• $S = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}$ es sistema generador de las matrices diagonales de orden 2.

Todas las matrices diagonales de orden 2 se pueden expresar como c.l. de estas dos.

$$D = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{en forma paramétrica}$$

[1] H puede ser el propio espacio completo V

$$D = < \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > \qquad \text{como subespacio generado}$$

• $S = \{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \}$ es sistema generador de las matrices antisimétricas 2×2

Todas las matrices antisimétricas de orden 2 se pueden expresar como múltiplos de esta matriz.

$$H = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{en forma paramétrica}$$

$$H = < \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} > \qquad \text{como subespacio generado}$$

3.4 Sistema generador linealmente dependiente o independiente

Teorema 3.3. *Dado $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ sistema generador del subespacio vectorial H de V, existe un subconjunto de S linealmente independiente que también genera H.*

Demostración:

- Si el conjunto inicial es linealmente independiente, entonces el subconjunto l.i. es el propio conjunto inicial y el número de elementos l.i. es p.

- Si el conjunto es l.d., entonces al menos un elemento es combinación lineal del resto.

  Supongamos que v_1 sea c.l. del resto. $v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_p v_p$

  Sustituyendo v_1 en **[1]** obtenemos para $v \in H$:

  $v = c_1(\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_p v_p) + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p = (c_1\lambda_2 + c_2)v_2 + (c_1\lambda_3 + c_3)v_3 + \ldots + (c_1\lambda_p + c_p)v_p$

  Por tanto $\{v_2, \ldots, v_p\}$ sigue generando H.

  Hemos eliminado v_1. Procediendo de este modo vamos eliminando elementos "c.l. del resto" hasta que todos los que quedan son linealmente independientes entre sí. Así queda demostrado que el subconjunto l. i. también genera H.

$\square$

Sistemas generadores de $\mathbb{R}^n$

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_p\}$ es s.g. de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ El sistema lineal $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p\ \mid \vec{x}\ ]$ es compatible $\forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible para todo $\vec{x}$, es decir, que rg$A$=rgA^* para todo $\vec{x}$, es que el rg$A$, con $A = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p\ ]$, sea igual al número de filas, que es a su vez el número de componentes de los vectores, es decir, rg$A$=n.

El número de vectores, p, para producir ese rango, ha de ser mayor o igual que $n = $ rg$A$.

- Si $p = n = $ rg$A$ ya se tiene el s.g. l.i.

- Si $p > n = $ rg$A$ el s.g. es l.d. y puede reducirse a s.g.l.i. eliminando los vectores de las columnas no pivotales (el Teorema 3.3 lo justifica).

- Si el s.g es l.i., el sistema $[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p\ \mid \vec{x}\ ]$ es compatible determinado y la expresión de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ como c.l. de los vectores de S es única (los coeficientes son únicos).

- Si el s.g. es l.d., el sistema es compatible indeterminado y $\vec{x}$ se puede expresar de infinitas maneras como combinación lineal de los vectores de S (existen infinitas soluciones de coeficientes).

Sistema generador de un subespacio H de $\mathbb{R}^n$

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2,\ \ldots\ , \vec{v}_p\} \subset H$ es s.g. de $H \Leftrightarrow [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_p\ \mid \vec{x}\ ]$ es compatible $\forall\ \vec{x} \in H$

Se tienen de nuevo las posibilidades de s.g.l.i. (rango de los vectores $= p$) o s.g.l.d. (rango menor que p) y con el mismo resultado de que la solución de coeficientes sea única o no (respectivamente). El s.g.l.d. puede reducirse a s.g.l.i. con el mismo procedimiento.

Ejemplo 3.1. *¿ Es $S = \{\ (1,0,0),\ (1,1,0),\ (0,1,0)\ \}$ un sistema generador de $\mathbb{R}^3$?.*
¿ Es S sistema generador de algún subespacio de $\mathbb{R}^3$?.

<u>*Sol.*</u>

El conjunto S no es sistema generador de $\mathbb{R}^3$ ya que el sistema
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | \ x \\ 0 & 1 & 1 & | \ y \\ 0 & 0 & 0 & | \ z \end{bmatrix}$ *no es compatible para cualquier $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*
En particular no es compatible para los vectores de la forma (x,y,z) con $z \neq 0$.

El conjunto S es sistema generador del subespacio formado por el plano XY, que viene dado por la ecuación $z = 0$.

Ejemplo 3.2. *Sea el sistema generador de $\mathbb{R}^3$, $C = \{\ (1,0,0),\ (1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\ \}$. a) Obtén un subconjunto C' de C que sea linealmente independiente y sistema de generador de $\mathbb{R}^3$. b) Obtén la relación de dependencia lineal del conjunto C.*

En efecto el conjunto C es sistema generador de $\mathbb{R}^3$ ya que el sistema
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | \ x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | \ y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ z \end{bmatrix}$ *es compatible para cualquier $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, por ser $rg[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ \vec{v}_4] = 3 =$ número de filas.*

C es ligado, pues tenemos cuatro vectores y rango 3. Para obtener un subconjunto l.i. que sea a su vez sistema generador hay que eliminar un vector que sea c.l. del resto.

Eliminando $\vec{v}_3$ (columna no pivotal) tenemos un subconjunto linealmente independiente (rango igual a número de vectores, 3) y generador de $\mathbb{R}^3$, pues el correspondiente sistema es compatible para todo (x,y,z) ($rgA = rgA^* = 3$). Luego una solución posible es $C' = \{\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_4\ \}$

Otra alternativa es eliminar $\vec{v}_2$, quedándonos con el subconjunto $C' = \{\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\ \}$ que también es linealmente independiente y generador de $\mathbb{R}^3$.

No sería válido eliminar $\vec{v}_4$, pues en este caso sólo podríamos generar vectores de la forma $(x,y,0)$. Si $z \neq 0$ el sistema sería incompatible (rgA=2 y rgA^*=3).

Podemos demostrar que sí es posible eliminar $\vec{v}_1$ y quedarnos con el subconjunto $C' = \{\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\ \}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | \ x \\ 1 & 1 & 0 & | \ y \\ 0 & 0 & 1 & | \ z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | \ x \\ 0 & 1 & 0 & | \ y-x \\ 0 & 0 & 1 & | \ z \end{bmatrix}$$

En efecto el subconjunto es linealmente independiente (rango igual a número de vectores, 3) y generador de $\mathbb{R}^3$, pues el correspondiente sistema es compatible ($rgA = rgA^* = 3$)

<u>El procedimiento sistemático de reducción de un s.g.l.d a s.g.l.i consiste en eliminar los vectores correspondientes a columnas no pivotales</u>, porque está garantizado que estos son c.l. del resto. Siempre se pueden despejar en las relaciones de dependencia lineal obtenidas.

La relación de dependencia lineal para este ejemplo, sólo hay una, se deduce de la resolución del SL homogéneo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | \ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_3 \\ c_2 = -c_3 \\ c_3 = c_3 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 \underset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + (-1) \underset{\vec{v}_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + 1 \underset{\vec{v}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + 0 \underset{\vec{v}_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ya que los tres vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *y* $\vec{v}_3$ *intervienen en la relación de dependencia lineal con coeficiente no nulo, cualquiera de los tres puede ser el elegido para eliminar, confirmándose el resultado que ya habíamos obtenido.*

3.5 Base

3.5.1 Definición y propiedades

Un espacio vectorial V o un subespacio vectorial $H \subseteq V$ contiene típicamente un número infinito de elementos, pero muchos problemas relativos a espacios vectoriales se pueden analizar trabajando con un número finito de elementos que generan el subespacio o espacio vectorial. Los espacios vectoriales con un número finito de elementos generadores se denominan espacios vectoriales de dimensión finita. Hemos deducido en el Teorema 3.3 que el conjunto mínimo de elementos de un sistema generador es un conjunto linealmente independiente.

Definición 3.3. *Un conjunto de elementos $B \subset H$, siendo H subespacio vectorial de V*[1]*, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, es base de H si el conjunto es sistema generador de H y linealmente independiente.*

Teorema 3.4. *Toda base de H tiene exactamente el mismo número de elementos.*

A ese número se le denomina **dimensión** de H y se denota dim$H$.

Teniendo en cuenta la definición de cardinal de un conjunto como número de elementos del mismo, tenemos que dim(H)=card(B), siendo B cualquier base de H.

Teorema 3.5. *Si $\dim V = n$ y H es subespacio vectorial de V, entonces $\dim H \leq n$ y $\dim H = n \Leftrightarrow H = V$.*

dim$H$ es el mínimo número de elementos de un conjunto s.g. de H.

dim$H$ es el máximo número de elementos de un conjunto libre de H.

Por ejemplo, en $S = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$, que es base de $\mathbb{R}^4$ (s.g. y l.i.), si quitamos un vector el conjunto deja de ser s.g. y si añadimos un vector el conjunto deja de ser l.i.

Teorema 3.6. *Todo subespacio H de V, a excepción del subespacio cero, admite base.*

El subespacio cero carece de base porque el vector cero forma un conjunto linealmente dependiente. La dimensión del subespacio $\{0_V\}$ es, por definición, cero.

Teorema 3.7. *Dado un subespacio vectorial H de dimensión d y dado un subconjunto de H l.i. y formado por k elementos, con $k < d$, existen $d-k$ elementos tales que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_d\}$ es base de H.*

Teorema 3.8. *Para que un conjunto libre $S \subset H$ sea base de H basta con que añadiéndole cualquier elemento de H el conjunto pase de libre a ligado.*

Demostración: Si añadido un elemento, el sistema pasa de libre a ligado, significa que ese elemento es combinación lineal de los elementos de S. Luego como todo elemento es c.l. de los elementos de S, S es sistema de generadores, y como además es libre será base. □

[1] H puede ser el propio espacio completo V

Teorema 3.9. o Teorema de la base. *Cualquier conjunto de elementos de H que sea s.g. y con un número de elementos igual a $dimH$ es automáticamente una base de H. Asimismo, cualquier conjunto de elementos de H que sea l.i. y con cardinal igual a $dimH$ es automáticamente base de H.*

3.5.2 Bases de $\mathbb{R}^n$

Al estudiar los sistemas generadores de $\mathbb{R}^n$ hemos distinguido los casos de s.g.l.i. y s.g.l.d., llegando a la siguiente conclusión para un s.g.l.i. y por tanto para una base de $\mathbb{R}^n$:

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_p\}$ es base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ rg $([\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \dots\ \vec{v}_p\ ]) = p = n$

Es decir, si y solo si S tiene n vectores y rango n.

Se concluye de ese resultado el siguiente teorema:

Teorema 3.10. *Toda base de $\mathbb{R}^n$ tiene exactamente n vectores, y por tanto $dim\mathbb{R}^n = n$*

Para ser s.g. tiene que tener como mínimo n vectores y para ser conjunto l.i. tiene que tener como máximo n.

Teorema 3.11. *Dada A_n matriz en $\mathbb{R}$, las columnas de A son base de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si A es invertible.*

Demostración: Si las columnas de A son base, son linealmente independientes, y entonces rg$A = n$ y A es invertible.

Si A es invertible, entonces rg$A$=n, y por tanto las columnas de A forman s.g.l.i. de $\mathbb{R}^n$ y son por tanto base. $\square$

Si las columnas de A_n son base de $\mathbb{R}^n$, entonces también lo serán las filas. En efecto si las columnas de A_n son base, A_n invertible por el teorema anterior. Si A invertible, entonces A^t invertible, y entonces las columnas de A^t son base de $\mathbb{R}^n$. Las columnas de A^t son las filas de A, por tanto queda demostrado el resultado.

<u>**Base canónica de $\mathbb{R}^n$**</u>

El ejemplo más sencillo de matriz $n \times n$ invertible es la matriz I_n en $\mathbb{R}$, cuyas columnas se denotan como $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\dots$, $\vec{e}_n$.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \ \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}$ se le denomina **base canónica o estándar de** $\mathbb{R}^n$.

$\{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$
$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

<u>**Recordemos:**</u>

Reducción de un conjunto s.g. para formar una base de $\mathbb{R}^n$

De un conjunto s.g. de $\mathbb{R}^n$ se puede formar una base eliminando los vectores correspondientes a las columnas no pivotales, pues el subconjunto obtenido es l.i. y sigue siendo s.g.

Ampliación de un subconjunto l.i. para formar una base de $\mathbb{R}^n$

Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ l.i. y formado por $p < n$ vectores, existen $n-p$ vectores tales que el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

3.6 Coordenadas relativas a una base

La razón principal de elegir una base de un subespacio o espacio vectorial en vez de un sistema generador es que cada elemento v de ese espacio puede escribirse de una sola manera como combinación lineal de los elementos de la base.

Teorema 3.12. *Sea $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ una base del subespacio vectorial $H \subseteq V$, entonces $\forall v \in H$, v se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de la base.*

Demostración: Supongamos que $v \in H$ pueda ser expresado de dos maneras:

$v = c_1 b_1 + \ldots + c_d b_d$ y $v = d_1 b_1 + \ldots + d_d b_d$

restando ambas ecuaciones:

$0_V = (c_1 - d_1) b_1 + \ldots + (c_d - d_d) b_d$

y como $b_1, \ldots, b_d$ son linealmente independientes, por ser base, los coeficientes en la ecuación anterior son todos nulos, es decir,

$c_1 - d_1 = 0, \ldots, c_d - d_d = 0$, es decir,

$c_j = d_j$ para $1 \leq j \leq d$, y por tanto las dos representaciones son iguales. □

Definición 3.4. *Sea $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ una base de $H \subseteq V$. Para cada $v \in H$, las* **coordenadas de** v **relativas a la base** B *son los coeficientes o pesos $c_1, c_2, \ldots c_d$, tales que $v = c_1 b_1 + \ldots + c_d b_d$,*

Las coordenadas, que son d escalares, siendo d la dimensión del subespacio, se pueden almacenar como un vector, denominado **vector de coordenadas de** v **respecto a** B

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

Notación en $\mathbb{R}^n$

- El vector de coordenadas del elemento $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto de una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, se expresaría de acuerdo con la notación indicada cómo:

  $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, partiendo de $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n$,

- Cuando las coordenadas están referidas a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$, utilizamos la notación:

  $\vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, prescindiendo de los corchetes y de la referencia a la base.

  $\vec{x} = c_1\vec{e}_1 + \ldots + c_n\vec{e}_n$,

  Más usual es expresar $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, denotando las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base canónica como x_i. A estas coordenadas las denominamos coordenadas canónicas o coordenadas estándar.

Observación

$H =< (1,0,0), (0,1,0) >$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y se identifica geométricamente con el plano XY del espacio tridimensional. El conjunto $B = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ es base de H, pero no es una base canónica, pues las bases canónicas sólo están definidas para los espacios $\mathbb{R}^n$, no para los subespacios de estos con dimensión menor que n.

Los vectores de H tienen dos coordenadas respecto de cualquier base de H. Por ejemplo las coordenadas del vector $\vec{v} = (2,4,0)$ respecto de la base B anterior son $(2,4)$, porque $(2,4,0) = 2(1,0,0) + 4(0,1,0)$.

$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Supuesta otra base de H, por ejemplo $B' = \{(1,0,0), (1,1,0)\}$, las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de ella serán distintas. En este caso $[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un elemento de $\mathbb{R}^3$, expresado por sus tres coordenadas estándar.

Como elemento de H viene dado por las coordenadas (2, ya que dim$H$=2) relativas a la base considerada, $[\vec{v}]_B$ o $[\vec{v}]_{B'}$ para los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3.3. *Considerado el espacio vectorial* $P_4(\mathbb{R})$ *formado por los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 4, y la base* $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ *de ese subespacio,*

¿ Cuales son las coordenadas de $p(x) = 2x + 3x^2 - 4x^4$ *respecto de la base* B*?*

Sol.:

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.4. *Considerados el subespacio* H *de* $\mathbb{R}^3$ *y la base* B *de* H *dada por* $B = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2)\}$, *determina:*

a) Si $\vec{v} = (4, 9, 14) \in H$.

b) En caso afirmativo las coordenadas de $\vec{v}$ *relativas a la base* B.

Sol.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 2 & 1 & | & 9 \\ \underbrace{3 \quad 2}_{P_B} & & | & \underset{\vec{v}}{14} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{v} \in H$, *pues* $\vec{v}$ *puede escribirse como c.l. de los vectores de la base* B. *Efectivamente* $\mathrm{rg}(P_B) = \mathrm{rg}([\ P_B \mid \vec{v}\ ])$, *llamando* P_B *a la matriz cuyas columnas son los vectores de la base* B.

Las coordenadas respecto de B *son precisamente los coeficientes de la c.l. anterior:* $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Se comprueba el resultado:

$$4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ resulta igual a } \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$

o efectuando $P_B[\vec{v}]_B$, *que debe resultar* $\vec{v}$.

3.7 Formas paramétrica e implícita de los subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Sean $H \subset \mathbb{R}^n$ subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_d}\}$ una base de H, sabemos entonces que todo $\vec{x} \in H$ se puede expresar de forma única cómo:

  $\vec{x} = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \ldots + \alpha_d\vec{b}_d \qquad$ **[2]**

  y que, recíprocamente, todos los vectores expresables en esa forma, tomando α_i como parámetro libre, pertenecen a H.

  $H =< B >=< \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d >$

  La ecuación **[2]**, en la que los α_i son parámetros libres, recibe el nombre de ecuación vectorial paramétrica de H. El número de parámetros es igual a la dimensión de H.

  Hemos definido así una parametrización con el mínimo número de parámetros posible. Las parametrizaciones que estuvieran referidas a un s.g. general (con vectores l.d.) tendrían más parámetros.

- Toda ecuación vectorial paramétrica de la forma anterior es **solución** de un SL homogéneo en las variables o incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ con grado d de indeterminación (ver Tema 2). El conjunto de ecuaciones mínimo de este sistema, es decir con el número de ecuaciones igual al rango de la matriz de coeficientes, se conoce como forma implícita del subespacio. Cada una de esas ecuaciones se denomina ecuación implícita.

  El número de ecuaciones de la forma implícita ha de ser igual a la diferencia entre el número de variables, n, y el número de parámetros libres d de la solución (dimensión de H), por tanto:

  $$\text{número de ecuaciones} = n - \dim H$$

  La expresión matricial de la forma implícita es: $A_{m\times n}\ \vec{x}_{n\times 1} = \vec{0}_{m\times 1}$

  m es el número de ecuaciones

- Partiendo de una base $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ las ecuaciones implícitas en las variables $x_1, \ \ldots, \ x_n$ pueden obtenerse sin más que imponer que el siguiente sistema lineal sea compatible:

  $[\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid\ \vec{x}\ ]$, con $\vec{x} = (\ x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n)$, dejando los x_i como variables.

  En efecto $\vec{x} \in< \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d > \Leftrightarrow [\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid\ \vec{x}\ ]$ es compatible.

  La ecuación que da lugar a la forma implícita es entonces:

  $\text{rg}([\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d\ ]) = \text{rg}([\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid\ \vec{x}\ ])$, dejando los x_i como variables, o lo que es lo mismo:

  $\text{rg}([\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d \mid\ \vec{x}\ ]) = d$, dejando los x_i como variables.

- Recíprocamente, partiendo de la forma implícita de H y resolviendo el SLH se obtiene la solución general y a partir de esta una base de H. La solución tendrá d parámetros libres, y por tanto la forma $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_d\vec{v}_d$, siendo el conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_d}\}$ de vectores linealmente independientes entre sí la base buscada.

- El subespacio cero se expresa en forma implícita cómo: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

- El espacio completo $\mathbb{R}^n$ se expresa en forma paramétrica cómo:

  $\vec{x} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ /\ x_i \in \mathbb{R}\}$

3.8 Algunos ejercicios resueltos

Ejemplo 3.5. *a) Obtén la expresión paramétrica y la forma implícita del subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ $S =< (1,-2,-5),(2,5,8) >$

b) Obtén una base sencilla de S *a partir de su forma implícita.*

Sol:

a) $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *es la expresión vectorial paramétrica*

En efecto tiene el mínimo número de parámetros posible, pues los dos vectores son l.i. (uno no es múltiplo del otro).

Obtengamos a continuación la forma implícita:

$$\vec{x} \ \in \ < \vec{a}_1, \vec{a}_2 > \ \Leftrightarrow \ [\ \vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ | \ \vec{x}\ ] \text{ es compatible.} \qquad [\mathbf{3}]$$

Denotando $\vec{x} = (x,y,z)$*, el sistema que ha de ser compatible es el siguiente:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | \ x \\ -2 & 5 & | \ y \\ -5 & 8 & | \ z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 9 & | & 2x+y \\ 0 & 18 & | & 5x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 9 & | & 2x+y \\ 0 & 0 & | & 5x+z-4x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 9 & | & 2x+y \\ 0 & 0 & | & x-2y+z \end{bmatrix}$$

El SL es compatible $\Leftrightarrow$ *rgA*=rgA=2* $\Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0$

Por tanto $S \ = \ < (1,-2,-5),(2,5,8) > \ = \ \{\ (x,y,z) \ \in \ \mathbb{R}^3 / \ x - 2y + z = 0\}$

El subespacio vectorial $S =< \vec{a}_1, \vec{a}_2 >$ *tiene una única ecuación implícita que es:*

$$\boxed{x - 2y + z = 0}$$

Obsérvese como la ecuación implícita es efectivamente un SLH.

Número de ecuaciones = dimensión del espacio total − número de parámetros libres

1 = 3 − 2

La expresión matricial de la forma implícita es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

La comprobación de que los vectores originales cumplen la forma implícita:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Resolviendo el SL dado por la forma implícita obtendremos una base más sencilla.

$$\begin{cases} x = \ 2y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad\qquad B = \{(2,1,0),(-1,0,1)\}.$$

Comentario a **[3]**

El SL $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid x \\ -2 & 5 & \mid y \\ -5 & 8 & \mid z \end{bmatrix}$ es compatible $\Leftrightarrow$ rgA^*=rg$A$=2 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 5 & y \\ -5 & 8 & z \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando la última ecuación se obtendría la misma forma implícita.

Ejemplo 3.6. *Obtén la expresión paramétrica y la forma implícita del subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ $H =< (1, -2, -5) >$

Sol.:

$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}$ *es la expresión paramétrica.*

Nótese que $< (1, -2, -5) >$ *es la recta que pasa por* $(0, 0, 0)$ *y* $(1, -2, -5)$.

Ecuaciones paramétricas escalares: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha & / \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -5\alpha \end{cases}$

Eliminando el parámetro α *en las ec. anteriores obtenemos la forma implícita:* $\begin{cases} y = -2x \\ z = -5x \end{cases}$

También podríamos haber obtenido la forma implícita por el método directo:

$\begin{bmatrix} 1 & \mid x \\ -2 & \mid y \\ -5 & \mid z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \mid & x \\ 0 & \mid & 2x+y \\ 0 & \mid & 5x+z \end{bmatrix}$ *El SL es compatible* $\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2x = 0 \\ z + 5x = 0 \end{cases}$

Por tanto $H =< (1, -2, -5) >= \{ \ (x, y, z) \ \in \ \mathbb{R}^3 / \ \begin{cases} y + 2x = 0 \\ z + 5x = 0 \end{cases} \ \}$

También se puede expresar $S = \{ \ (x, y, z) \ \in \ \mathbb{R}^3 / \ y + 2x = 0 \ , \ z + 5x = 0 \ \}$

La forma implícita del subespacio vectorial $< (1, -2, -5) >$ *es por tanto:*

$$\begin{cases} 2x + y \qquad = 0 \\ 5x \qquad + z = 0 \end{cases}$$

En forma matricial: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3.7. *Obtén la expresión paramétrica y la forma implícita del subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ $S =< (1, -2, -5), (2, 5, 8), (1, 0, 1) >$

<u>*Sol.:*</u>

La dimensión del subespacio es al menos 2, ya que ningún par de vectores son múltiplos entre sí .

Obtendremos en primer lugar la forma implícita, que nos permitirá determinar directamente la dimensión del subespacio.

$\vec{x} \in < \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 > \quad \Leftrightarrow \quad [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3 \mid \vec{x}\ ]$ *es compatible. Denotando* $\vec{x} = (x, y, z)$*, el sistema que ha de ser compatible es el siguiente:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid x \\ -2 & 5 & 0 & \mid y \\ -5 & 8 & 1 & \mid z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid x \\ 0 & 9 & 2 & \mid 2x+y \\ 0 & 18 & 6 & \mid 5x+z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid x \\ 0 & 9 & 2 & \mid 2x+y \\ 0 & 0 & 2 & \mid x-2y+z \end{bmatrix}$$

El SL es compatible $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. Por tanto no hay ecuaciones implícitas, pues no hay ninguna restricción que imponer.*

$$S =< (1, -2, -5), (2, 5, 8), (1, 0, 1) > \ = \ \mathbb{R}^3 \ = \ \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad [\mathbf{4}]$$

S es $\mathbb{R}^3$*, por tanto tiene dimensión 3 y 3 parámetros libres.*

Una posible expresión paramétrica es:
$$\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad / \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

con tres parámetros y tres vectores l.i. Sin embargo, al ser el subespacio el propio $\mathbb{R}^3$*, deberíamos dar una expresión más sencilla, como la dada en* **[4]***:*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad / \ x, y, z \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.8. *Obtén una base del subespacio de* $\mathbb{R}^3$*:* $\Pi = \{(x, y, z) \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$

<u>*Sol.:*</u>

En primer lugar pasamos de la forma implícita $2x - y + 3z = 0$ *a la forma paramétrica resolviendo el sistema*[1]

$$\begin{cases} x = x \\ y = 2x + 3z \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \ / \ x, z \in \mathbb{R}$$

El conjunto $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$ *es linealmente independiente (un vector no es múltiplo del otro) y sistema generador de todo* $(x, y, z) \in \Pi$*, por tanto es base de* Π

[1]Se escoge como incógnita principal “y” a pesar de no ser columna pivotal porque su expresión en función de “x” y “z” es más sencilla que la de “x” como función de “y” y “z”

Ejemplo 3.9. *Considera el subespacio* $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ *(es el plano* XY*).*
a) Determina si los siguientes subconjuntos de H *son sistemas generadores de* H *y en caso afirmativo expresa* $\vec{v} = (7, 6, 0) \in H$ *como combinación lineal de los vectores de esos conjuntos.* $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$, $S_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $S_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$.
b) ¿ Es alguno de los conjuntos base de H*?. Determina respecto al conjunto que sea base de* H*, las coordenadas de* $(7, 6, 0)$.

<u>*Sol.:*</u>

a)

- $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$ *no es s.g. de* H*. Sólo genera los vectores de* H *que cumplen la ecuación adicional* $x = y$.
  $$\begin{bmatrix} 1 & | \ x \\ 1 & | \ y \\ 0 & | \ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & | & x \\ 0 & | & y - x \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
- $S_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ *Sí es s.g. de* H.
  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | \ x \\ 0 & 1 & | \ y \\ 0 & 0 & | \ 0 \end{bmatrix}$$
  $(7, 6, 0) = 7(1, 0, 0) + 6(0, 1, 0)$
  Es la única forma posible de expresar $(7, 6, 0)$ *como c.l. de los vectores de* S_2.
- $S_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ *Sí es s.g. de* H.
  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | \ x \\ 0 & 1 & 1 & | \ y \\ 0 & 0 & 0 & | \ 0 \end{bmatrix}$$
  Por ejemplo $(7, 6, 0) = 7(1, 0, 0) + 6(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0)$ *ó*
  $(7, 6, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 6(1, 1, 0)$ *ó*
  $(7, 6, 0) = 5(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 2(1, 1, 0)$ *, etc*
  Existen infinitas formas de expresar $(7, 6, 0)$ *como c.l. de los vectores de* S_3*, ya que el SL es compatible indeterminado.*

b) S_2 *es base. Formas de verlo:*

- *Es s.g. (compatible para todo* $(x, y, 0) \in H$*) y conjunto l.i. (un vector no es múltiplo de otro).*
- *La dimensión de* H *es 2, porque la del espacio principal* $\mathbb{R}^3$ *es 3 y* H *está definido por una ecuación implícita. Por tanto con tener dos vectores l.i. en* H *o dos vectores que generen* H *ya tenemos garantizado que esos dos vectores conforman una base.*

Planteando la c.l. $(7, 6, 0) = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0)$*, los escalares* c_1 *y* c_2*, únicos, son las coordenadas de* $\vec{v}$ *respecto a la base* S_2.

$[\vec{v}]_{S_2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$. *Son las coordenadas de* $(7, 6, 0)$ *relativas a la base* S_2 *de* H.

Recordatorio: Dado $\vec{x} \in H$, como vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene 3 coordenadas, pero como elemento del subespacio vectorial H el número de coordenadas será igual a la dimensión de H. La dimensión de H es 2 y por tanto el número de coordenadas de los vectores de H respecto de una base de H es 2.

Ejemplo 3.10. *Sean* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix}$ *y* $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *base de* $H =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$.

a) Determina si $\vec{x} \in H$*, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de* $\vec{x}$ *relativas a* B*.*
b) Obtén la forma implícita del sub. vec. H *y a partir de esta una nueva base* B' *de* H*.*
c) Si $\vec{x} \in H$*, calcula sus coordenadas respecto de la nueva base* B'*.*

<u>*Solución:*</u>

- **a)** $\vec{x} \in H$ *si la ecuación vectorial* $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ *es compatible.*

$$c_1 \begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix} \qquad [\mathbf{5}]$$

$$A^* = \begin{bmatrix}3 & -1 & | & 3\\6 & 0 & | & 12\\2 & 1 & | & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}6 & 0 & | & 12\\3 & -1 & | & 3\\2 & 1 & | & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & | & 2\\3 & -1 & | & 3\\2 & 1 & | & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & | & 2\\0 & -1 & | & -3\\0 & 1 & | & 3\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 0 & | & 2\\0 & 1 & | & 3\\0 & 0 & | & 0\end{bmatrix}$$ *Obtenemos que el sistema es compatible y que por tanto* $\vec{x} \in H$*.*

La solución (c_1, c_2) *de la ecuación* **[5]** *es el vector de coordenadas de* $\vec{x}$ *respecto de la base* B*. La forma escalonada reducida del SL muestra que esas coordenadas son* $c_1 = 2$ *y* $c_2 = 3$*:*

$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ *son las coordenadas de* $\vec{x}$ *relativas a la base* B*.*

Nótese que si hubiésemos planteado la matriz ampliada $[\ \vec{v}_2\ \vec{v}_1 \mid \vec{x}]$ *los cálculos de la eliminación gaussiana serían más sencillos, ya que la primera columna es* $(-1, 0, 1)$*. Al despejar tendríamos que acordarnos de que las incógnitas de la primera y segunda columna son* c_2 *y* c_1 *respectivamente.*

Al dar las coordenadas hay que dar los valores ordenados como en la base: si la base viene ordenada $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$*, las coordenadas estarán en el orden* (c_1, c_2)*.*

Recordatorio sobre las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base B de H y respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix} \in H; \qquad \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \text{ con } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ base de } H$$

$$\begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3; \qquad \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix} = 3\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \text{ con } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Las componentes de $\vec{x}$*, (3,12,7), son sus coordenadas respecto a la base estándar de* $\mathbb{R}^3$*, también denominadas coordenadas estándar.*

- **b)** *Planteamos que un vector genérico (x, y, z) esté generado por la base, o lo que es lo mismo, que rg(A)=rg(A*), siendo (x, y, z) la columna añadida en A^*.*

  Intercambiamos el orden de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, ya no afecta al resultado y simplica las operaciones.

  $$\begin{bmatrix} -1 & 3 & \mid x \\ 0 & 6 & \mid y \\ 1 & 2 & \mid z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & \mid & x \\ 0 & 6 & \mid & y \\ 0 & 5 & \mid & z+x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & \mid & x \\ 0 & 1 & \mid & \frac{1}{6}\ y \\ 0 & 5 & \mid & z+x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & \mid & x \\ 0 & 6 & \mid & y \\ 0 & 0 & \mid & -\frac{5}{6}\ y+z+x \end{bmatrix}$$

  Ec. implícita: $6x - 5y + 6z = 0$ *o por ejemplo* $x = \frac{5}{6}\ y - z$.

  Partiendo de: $\begin{cases} x = \frac{5}{6}\ y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$ *, obtendríamos la base:* $\{(5/6, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

  Reordenando los vectores, quitando denominadores e imponiendo que el signo de la primera componente de cada vector sea positivo, obtenemos la siguiente base sencilla:

  $\boxed{B' = \{(1, 0, -1), (5, 6, 0)\}}$

  Al igual que en el Ejemplo 3.5, se podría haber deducido la forma implícita a partir de la ecuación $\begin{vmatrix} -1 & 3 & x \\ 0 & 6 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$

- **c)**

  $$\begin{bmatrix} 1 & 5 & \mid & 3 \\ 0 & 6 & \mid & 12 \\ -1 & 0 & \mid & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & \mid & 3 \\ 0 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 5 & \mid & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & \mid & 3 \\ 0 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid & -7 \\ 0 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \qquad c_1 = -7,\ c_2 = 2$$

  $\boxed{[\vec{x}]_{B'} = (-7, 2)}$

  Comprobación: $-7 * (1, 0, -1) + 2 * (5, 6, 0) = (3, 12, 7)$

Ejemplo 3.11. *En el espacio vectorial* $M_{2\times 2} = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \ / \ x_i \in \mathbb{R} \ \}$ *considera los siguientes subespacios vectoriales:*

El subespacio S formado por las matrices simétricas.

El subespacio H formado por las matrices antisimétricas.

El subespacio D formado por las matrices diagonales.

Para cada uno de ellos obtén:

a) La expresión paramétrica.

b) Una base lo más sencilla posible.

c) La forma implícita, refiriéndote a las variables tal como están ordenadas en el enunciado.

<u>*Solución:*</u>

- **Subespacio S de las matrices simétricas:**

  a) La forma paramétrica más sencilla sería: $S = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} /a, b, c \in \mathbb{R}\}$

  La base más sencilla es: $B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}$

  La forma implícita más sencilla es: $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

- **Subespacio H de las matrices antisimétricas:**

  a) La forma paramétrica más sencilla es: $S = \{ \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} /a \in \mathbb{R}\}$

  La base más sencilla es: $B = \{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}$

  La forma implícita más sencilla es: $\begin{cases} x_1 = x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

- **Subespacio D de las matrices diagonales:**

  a) La forma paramétrica más sencilla es: $S = \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} /a, b \in \mathbb{R}\}$

  La base más sencilla es: $B = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}$

  La forma implícita más sencilla es: $\begin{cases} x_2 = 0, x_3 = 0 \end{cases}$

3.9 Otro método para la obtención de la forma implícita

• Consideremos en $\mathbb{R}^2$ un subespacio H de dimensión 1. La forma implícita de H tendría una única ecuación:

$a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ **[6]**

Nótese que de la misma forma que conocida la matriz de coeficientes $[\ a_1\ a_2\ ]$ podemos resolver para encontrar (x_1, x_2), conocida la solución podríamos usar la matriz $[\ x_1\ x_2\ ]$ y resolver para determinar los coeficientes (a_1, a_2).

En efecto $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ y $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$ son la misma ecuación **[6]**

Si en la expresión de la izquierda, $A\vec{x} = 0$, tomamos la traspuesta de ambos miembros obtenemos la expresión de la derecha $\vec{x}^t A^t = 0$ (0 es escalar - matriz 1×1 - y su traspuesta es el mismo valor 0).

• Tomemos ahora un subespacio H de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$. Tendríamos una única ecuación implícita, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_3 = 0$, y dos soluciones independientes.

Partiendo de $A = [\ a_1\ a_2\ a_3\ ]$ podemos resolver para encontrar las dos soluciones independientes (v_1^1, v_2^1, v_3^1) y (v_1^2, v_2^2, v_3^2). Entonces se verifica:

$$\begin{cases} a_1v_1^1 + a_2v_2^1 + a_3v_3^1 = 0 \\ a_1v_1^2 + a_2v_2^2 + a_3v_3^2 = 0 \end{cases}$$

Este par de ecuaciones nos muestra que resolviendo desde la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{bmatrix}$ obtendríamos la solución (a_1, a_2, a_3)

Las comprobaciones "coeficientes de ecuación $\times$ solución $= 0$ " se expresan matricialmente así :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \\ v_3^1 & v_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que la ecuación de la derecha se puede obtener tomando traspuestas en la ecuación de la izquierda.

• Veamos ahora el caso de un subespacio H de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$. Tendríamos entonces dos ecuaciones implícitas $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$ y una única solución independiente.

Tomando la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ resolveríamos encontrando dicha solución (v_1^1, v_2^1, v_3^1), que cumple:

$$\begin{cases} a_{11}v_1^1 + a_{12}v_2^1 + a_{13}v_3^1 = 0 \\ a_{21}v_1^1 + a_{22}v_2^1 + a_{23}v_3^1 = 0 \end{cases}$$

Con lo que resolviendo desde la matriz $\begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \end{bmatrix}$ obtendríamos las dos soluciones independientes: (a_{11}, a_{12}, a_{13}) y (a_{21}, a_{22}, a_{23}), recuperando las filas de la matriz de coeficientes original.

Esquema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación de la derecha se obtiene a partir de la de la izquierda tomando traspuestas.

Esquema para un subespacio H de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d siendo A la matriz de coeficientes de su forma implícita y $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ el conjunto de soluciones independientes o base de H:

- Resolviendo $A\vec{x} = \vec{0}$ obtenemos el conjunto de vectores que forma la base B.

- Definida $P_B = [\ \vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_d\ ]$, resolviendo $P_B^t\vec{x} = \vec{0}$ (con la traspuesta colocamos los vectores base en las filas) obtenemos el conjunto de vectores solución ($n \times 1$) tales que la traspuesta de cada uno es una fila ($1 \times n$) de la matriz de coeficientes A. El número de vectores solución = número de filas de A = número de ecuaciones, es $n - d$.

  Si en vez de partir de una base B de H partimos de un sistema generador S de H (con d vectores l.i. y desde $d + 1$ hasta $d + s$ combinaciones lineales de los anteriores), una vez hecha la eliminación gaussiana el sistema de ecuaciones tendría un número de ellas igual al del sistema anterior, $P_B^t\vec{x} = \vec{0}$, porque las s ecuaciones adicionales desaparecen por ser los coeficientes de esas filas c.l. de los de las filas anteriores.

Ejemplo 3.12. *Obtén la forma implícita de* $H =< (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) >$ *utilizando los dos métodos que conoces.*

Sol.:

Método 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 1 & 2 & | & y \\ 0 & -1 & | & z \\ 0 & 1 & | & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & -1 & | & z \\ 0 & 1 & | & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & -1 & | & z \\ 0 & 0 & | & z+t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & y-x \\ 0 & 0 & | & y-x+z \\ 0 & 0 & | & z+t \end{bmatrix}$$

La forma implícita es: $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$

Comprobación de que los vectores $\vec{b}_1$ *y* $\vec{b}_2$ *de la base de* H *cumplen las ecuaciones de la forma implícita:*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_1} = \vec{0} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}_2} = \vec{0}$$

Los dos productos producen el vector $\vec{0}$ *por tanto está comprobado que la forma implícita es correcta.*

Es más sencillo realizar la comprobación anterior así:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\vec{0} \;\; \vec{0}]$$

La ec. matricial es $A \; [\; \vec{b}_1 \; \vec{b}_2 \;] \; = \; [\; \vec{0} \; \vec{0} \;]$

Método 2:

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{matrix}}_{P_B^t} & \begin{matrix} | & 0 \\ | & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Despejando las incógnitas principales en función de las variables libres tenemos:
$x = -z + t$, $y = z - t$, *por tanto* $(-z + t, z - t, z, t)$ *y soluciones independientes:*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto una forma implícita de H *es:* $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes es distinta a la obtenida con el primer método, pero los dos sistemas lineales son equivalentes.

3.10 Ejercicios

Ejercicio 3.1. *Sea el siguiente conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^4$*:* $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(0,1,0,1)\}$. *Comprueba que forma una base de* $\mathbb{R}^4$ *y expresa respecto de ella el vector* $(2,5,-1,1)$.

Ejercicio 3.2. Manualmente y con MATLAB. *Demuestra que el conjunto* $S=\{(2,1,1),(1,3,1),(-2,1,3)\}$ *forma una base de* $\mathbb{R}^3$. *Halla las coordenadas del vector* $(21,14,4)$ *respecto de esta base.*

Ejercicio 3.3. *En el subespacio vectorial* S *formado por las matrices simétricas reales de orden 2,*
a) Demuestra que el conjunto de matrices $C=\{\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\}$, *forma una base de* S.
b) Halla las coordenadas de la matriz $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ *respecto a dicha base.*

Ejercicio 3.4. *Se considera el espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$. *Halla:*
i) una base de $\mathbb{R}^4$ *que contenga el vector* $(1,2,1,1)$
ii) una base de $\mathbb{R}^4$ *que contenga a los vectores* $(1,1,0,2)$ *y* $(1,-1,2,0)$

Ejercicio 3.5. *Extiende el conjunto de vectores* $\{(1,1,-1,1),(1,1,0,1),(1,2,1,1)\}$ *para formar una base de* $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3.6. *En* $\mathbb{R}^4$ *sea el conjunto* $A=\{\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\ /\ x_1+x_2=x_3-x_4,\ \text{con } x_i\in\mathbb{R}\}$ *Comprueba que es un subespacio vectorial. Halla una base y su dimensión.*

Ejercicio 3.7. *Obtén la expresión paramétrica de* F *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *sabiendo que su forma implícita es:*

$$\begin{cases} x+y+z=0\\ x-\ y+z=0\end{cases}$$

Ejercicio 3.8. Manualmente y con MATLAB. *El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo:*

$$\begin{cases} x-3y+z=0\\ -2x+2y-3z=0\\ 4x-8y+5z=0\end{cases}$$

es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. *Determina una base del mismo.*

Ejercicio 3.9. Manualmente y con MATLAB. *Considera* $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4,\vec{v}_5\}\subset\mathbb{R}^4$, *siendo los* $\vec{v}_i$ *los vectores siguientes en su orden.*

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-3\\-8\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-6\\9\end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base de $<\ S\ >$

b) Obtén el o los valores de a tales que $(a,4,-5,-10)$ <u>*se pueda expresar*</u> *como combinación lineal de los vectores de* S. *Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.*

c) Obtén la forma implícita de $<S>$ *denotando a las variables como* x_1, x_2, x_3, x_4.

Ejercicio 3.10. *En el espacio vectorial de las matrices reales* 3×2*,* $M_{3\times 2} = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{bmatrix} \ /x_i \in \mathbb{R}\}$*,*

se considera el subespacio vectorial F *cuya forma paramétrica es:*

$$F = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1.1a + b \\ -a & 0 \end{bmatrix} \ / \ a, b \ \in \ \mathbb{R} \ \}$$

a) Obtén una base de F*.*

b) Obtén la forma implícita de F*, utilizando las variables* x_i *tal como están ordenadas en el enunciado.*

Ejercicio 3.11. *Considera el subespacio* F *de las matrices* $M_{3\times 2}$ *siguiente:*

$F =< \ A \ , \ B \ , \ C \ , \ D \ >$ *, siendo* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

y $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Obtén una base de F*.*

b) Determina una forma implícita de F*.*

c) Determina si $N = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 11 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ *pertenece o no a* F

Ejercicio 3.12. *Completa: "El subespacio de las matrices antisimétricas de orden 3 tiene dimensión: .... "*

"El subespacio de las matrices simétricas de orden 3 tiene dimensión: .... "