Lección 1

Definición, ejemplos, combinación lineal y dependencia lineal

1.1 Definición de espacio vectorial

Definición 1.1. Un conjunto no vacío de elementos, V , en el que están definidas las operaciones de suma (op. interna) y multiplicación por escalares de un cuerpo $\mathbb{K}$ (op. externa), cumpliendo las diez condiciones o axiomas siguientes, es un **espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$** .

Para la suma:

- 1) Operación cerrada: $\forall u, v \in V, u + v \in V$
- 2) Asociativa: $\forall u, v, w \in V, u + (v + w) = u + (v + w)$
- 3) Conmutativa: $\forall u, v \in V, u + v = v + u$
- 4) Existencia de elemento neutro: $\exists 0 \in V / u + 0 = 0 + u = u \quad \forall u \in V$
- 5) Existencia de elemento opuesto:
 $\forall u \in V \quad \exists -u / u + (-u) = (-u) + u = 0$

Para la multiplicación por escalares del cuerpo $\mathbb{K}$

- 6) Cerrada: $\forall u \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha u \in V$
- 7) Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- 8) Distributiva respecto de la suma de escalares:
 $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- 9) Pseudoasociativa respecto de la multiplicación por escalares:
 $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- 10) $1u = u$

1 es el elemento neutro del producto en el cuerpo $\mathbb{K}$ o elemento unidad del cuerpo. También se denota como 1_K

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

- a) $\forall u \in V \quad 0 u = 0_V$
 0 = elemento neutro de la suma de escalares = elemento cero de $\mathbb{K}$
 0_V = elemento neutro de la suma de elementos de V = elemento cero de V
- b) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot 0_V = 0_V$
- c) $\alpha u = 0_V \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } u = 0_V$
- d) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ y } \forall u \in V$

$$(-\alpha) u = -(\alpha u) = \alpha(-u)$$

La combinación de las operaciones de multiplicación por un escalar y suma es la operación conocida como combinación lineal. La combinación lineal de los elementos u y v de V con escalares α y β del cuerpo $\mathbb{K}$ es $\alpha u + \beta v$, que obviamente pertenece a V , por ser cerradas las dos operaciones.

1.2 Ejemplos

1.2.1 Matrices y vectores

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por las matrices reales $m \times n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. La operación interna es la suma de matrices, y la operación externa es la multiplicación de una matriz por un real. El conjunto y las operaciones fueron definidas en el Tema 1, donde ya se expuso que con estas operaciones las matrices reales de orden $m \times n$ tienen estructura de espacio vectorial.

Por ejemplo $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Ilustramos 3 de las propiedades (suma cerrada, elemento neutro de la suma y multiplicación por escalar cerrada).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ es el elemento neutro de la suma en } M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}$ no es espacio vectorial

En efecto, la multiplicación de una matriz real por un escalar complejo con la parte imaginaria no nula no da como resultado una matriz real, por tanto esa multiplicación no sería cerrada.

$M_{m \times n}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por las matrices complejas de orden $m \times n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

$M_{m \times n}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ es espacio vectorial

El conjunto formado por las matrices complejas de orden $m \times n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

Por ser $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ para todo m y n , lo es en particular para las matrices columna o vectores. Es decir, $\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se expresa: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot \mathbb{R})$ espacio vectorial. La primera operación es la suma de elementos de $\mathbb{R}^n$ y la segunda la multiplicación de un elemento de $\mathbb{R}^n$ por un elemento de $\mathbb{R}$.

Recordemos que los elementos de $\mathbb{R}^n$ o vectores se expresan: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Los elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ se denominan primera, segunda, ..., enésima **componente** de $\vec{x}$.

Se admite la notación $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$ es espacio vectorial

$$M_{n \times 1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

El vector nulo es ahora $(0 + 0i, \dots, 0 + 0i)$ (con n componentes)

El elemento unidad es $1 \in \mathbb{R}$ (recordemos que la multiplicación por un escalar es op. externa)

$\mathbb{C}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

El vector nulo es $(0 + 0i, \dots, 0 + 0i)$ (con n componentes)

El elemento unidad es $(1 + 0i) \in \mathbb{C}$

1.2.2 Polinomios

El conjunto de los polinomios en la variable λ con coeficientes reales de grado menor o igual que n con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar del cuerpo $\mathbb{R}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y lo denotamos como $P_n(\mathbb{R})$

Los elementos de este conjunto tienen la expresión general:

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$$

La suma se define así:

Sean $p_1(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ y $p_2(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_n\lambda^n$, entonces

$$p(\lambda) = p_1(\lambda) + p_2(\lambda) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\lambda + (a_2 + b_2)\lambda^2 + \dots + (a_n + b_n)\lambda^n$$

Y la multiplicación por un escalar así:

Sean $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha p(\lambda) = \alpha a_0 + \alpha a_1\lambda + \alpha a_2\lambda^2 + \dots + \alpha a_n\lambda^n$$

1.2.3 Relación biyectiva entre los polinomios reales de grado $\leq n$ y $\mathbb{R}^{n+1}$

Se puede establecer una relación biunívoca o uno a uno entre los polinomios $p(s) \in P_n(\mathbb{R})$ y los vectores $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, sin más que tomar ordenadamente los $n + 1$ escalares que definen $p(s)$ como componentes del vector $\vec{v}$.

Considerado el polinomio $p(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$ le podemos asociar unívocamente el vector

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^{n+1}, \text{ o utilizando la notación habitual de los vectores, } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \text{ siendo } x_i$$

el coeficiente correspondiente a la potencia $i - 1$. Recíprocamente, dado un vector de $\mathbb{R}^{n+1}$ le corresponde, con el criterio adoptado, un único polinomio de P_n .

Ejemplo:

$$p(s) = 2 - 2s^3 + s^4 \in P_4 \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^5,$$

LECCIÓN 1. DEFINICIÓN, EJEMPLOS, COMBINACIÓN LINEAL Y DEPENDENCIA LINEAL

La suma de polinomios se asocia con la suma de los correspondientes vectores y la multiplicación de un polinomio por un escalar como la multiplicación del correspondiente vector por el escalar. Análogamente se pueden obtener las combinaciones lineales de polinomios utilizando sus vectores correspondientes. En la práctica se utiliza esta relación biyectiva para simplificar las operaciones entre polinomios, reduciéndolas a operaciones entre vectores.

Ejemplo 1.1. *Dados los polinomios $p(x) = 5 - 3x + 2x^2$ y $q(x) = 7 + 2x - 4x^3$ obtén la combinación lineal de $p(x)$ y $q(x)$ con coeficientes 2 y -2 .*

Los polinomios son de grado menor o igual que 3, por lo que tomo la correspondencia en $\mathbb{R}^4$.

$$\text{Realizamos los cálculos en } \mathbb{R}^4: 2 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Una vez calculada la combinación lineal realizamos el cambio para dar el resultado como un polinomio:

$$r(x) = 2 p(x) - 2 q(x) = -4 - 10x + 4x^2 + 8x^3$$

1.2.4 Relación biyectiva entre las matrices reales y $\mathbb{R}^n$

En el caso de las matrices reales $p \times q$ puede establecerse una relación biyectiva entre este conjunto y el de los vectores reales de $p \times q$ componentes.

La ordenación de elementos la vamos a considerar de arriba a abajo y de izquierda a derecha, es decir, tomando las sucesivas columnas. De esta manera, a la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ le corresponde

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Igual que en el caso de los polinomios, esta correspondencia permite simplificar las operaciones con matrices.

Ejemplo 1.2. *Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, obtén la combinación lineal de A y B con coeficientes 2 y -2 .*

$$\text{Por ser matrices } 2 \times 2 \text{ realizamos los cálculos en } \mathbb{R}^4: 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Seguidamente deshacemos el cambio ya que el resultado debe ser una matriz.

$$2A - 2B = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3 Combinación lineal

Definición 1.2. Sea un conjunto finito de elementos $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$, con V espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que $v \in V$ es combinación lineal de los elementos de S si $\exists c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{K} / v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p$.

A los escalares $c_1, c_2, \dots, c_p$ se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden tomar cualquier valor de $\mathbb{K}$, incluido el 0

Con frecuencia abreviaremos la expresión “combinación lineal” como *c.l.*

(Nótese el uso de la letra “c” para hacer énfasis en la interpretación de los c_i como **coeficientes** de una combinación lineal).

Ejemplo 1.3. Sean $\vec{a}_1 = (1, -2, -5)$, $\vec{a}_2 = (2, 5, 6)$ y $\vec{b} = (7, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$. Determina si $\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. En caso afirmativo obtén los coeficientes x_1, x_2 tales que $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$. Realiza lo mismo para $\vec{c} = (7, 4, -4)$.

Comenzamos escribiendo la ec. vect.
$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{b}$$

, que es lo mismo que:
$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por tanto hemos de resolver el SL:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 = -3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema transformando la matriz ampliada a la forma escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El SL es compatible, por tanto $\vec{b}$ es *c.l.* del conjunto $\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \}$. La solución, y por tanto los

coeficientes, son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Es decir, $3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Recordemos del Tema 2 que una ec. vect. de la forma: $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{b}$ tiene la misma solución que el SL cuya matriz ampliada es: $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \ | \ \vec{b}]$. Por tanto $\vec{b}$ es **c.l.** de $\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \} \Leftrightarrow [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \ | \ \vec{b}]$ es compatible.

Para $\vec{c}$ la matriz ampliada y el paso a la reducida son:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 31 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 31 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

El SL es incompatible, por tanto $\vec{c}$ no es *c.l.* del conjunto $\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \}$.

Ejemplo 1.4. Dado el subconjunto de matrices cuadradas 2×2 , $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, justifica que $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ es c.l. de las matrices de S y que $C = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ no es c.l. de las matrices de S .

Resuelve el ejercicio haciendo uso de la relación biyectiva entre $M_{2 \times 2}$ y $\mathbb{R}^4$:

- (1) denota las matrices de S como M_1 y M_2
- (2) representa las cuatro matrices como vectores de $\mathbb{R}^4$
- (3) realiza las operaciones en $\mathbb{R}^4$
- (4) devuelve el resultado como una matriz

Ejemplos similares se podrían plantear en el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n .

1.4 Dependencia e independencia lineal. Relación de dependencia lineal

1.4.1 Definiciones

- Un conjunto de elementos $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ es **linealmente dependiente** (también llamado “**ligado**”) si existen unos escalares $(c_1, c_2, \dots, c_p)$, no todos nulos, tales que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p = 0_V \quad [1]$$

Una ecuación como [1], en la que no todos los coeficientes son nulos, se denomina **relación de dependencia lineal**.

- Un conjunto es **linealmente independiente** (también llamado “**libre**”) si y sólo si no es linealmente dependiente.

$$\text{Es decir, si } c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p = 0_V \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

Con frecuencia abreviaremos la expresiones “lineal independiente” y “linealmente dependiente” como l.i. y l.d. respectivamente.

1.4.2 Ejemplos

- El conjunto $\{(1, 1), (1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$ es linealmente independiente porque la única solución del sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$ es la solución trivial.
- El conjunto $\{(1, 1), (1, 2), (3, 4)\} \subset \mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente porque el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

- El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2 \times 2}$ es linealmente dependiente, porque la ecuación:

$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones. Para la justificación simplificamos los cálculos representando las matrices mediante vectores de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 5 & | & 0 \\ 1 & 2 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\ A & & A_1 & & A_2 \end{array}$$

La matriz de coeficientes A_2 nos dice que el rango de A es 2, por tanto el sistema es indeterminado y el conjunto es l.d.

Para llegar a la relación de dependencia lineal tenemos que obtener la solución general del sistema, (c_1, c_2, c_3) . Simplificamos el SL obteniendo la forma escalonada reducida en un solo paso.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 & & A_3 \end{array}$$

La solución de coeficientes es $(c_1, c_2, c_3) = (-c_3, -2c_3, c_3)$, con c_3 parámetro libre.

Asignando al parámetro libre el valor 1 tenemos coeficientes $(-1, -2, 1)$ y por tanto una relación de dependencia lineal es:

$$-1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La dependencia lineal de conjuntos de polinomios también se estudiaría a partir de sus vectores de $\mathbb{R}^n$ asociados.

1.4.3 Dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^n$

Teniendo en cuenta la relación biyectiva entre espacios vectoriales como matrices y polinomios y $\mathbb{R}^n$, es interesante analizar en más detalle los conceptos de dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^n$.

El conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente (también llamado ligado) si y sólo si la ecuación vectorial $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

Expresado de otra forma, el conjunto de vectores es ligado si el SL homogéneo (SLH) con matriz ampliada $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \ | \ \vec{0}]$ es comp. indeterminado $\Leftrightarrow$ rango de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p] < p$.

En este caso el número de relaciones de dependencia lineal “independientes entre sí”, o lo que es lo mismo, el número de soluciones del SLH independientes entre sí es igual al grado de indeterminación, es decir al número de parámetros libres.

Al rango anterior se le denomina **rango del conjunto de vectores** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$.

El conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente (también llamado libre) si y sólo si la ecuación vectorial $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

Expresado de otra forma, el conjunto de vectores es libre si el SLH con matriz ampliada $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \ | \ \vec{0}]$ es comp. det. $\Leftrightarrow$ rango de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p] = p$.

Como el número de componentes de los $\vec{v}_i$ y por tanto el número de filas de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$ es n , el rango ha de ser menor o igual que n , por tanto el máximo número de vectores en un subconjunto l.i. de $\mathbb{R}^n$ es n .

En un conjunto l.d., si p es el número de vectores y r su rango, entonces:

$$p - r = \text{n}^\circ \text{ de relaciones de dependencia lineal.}$$

Obtención de subconjunto l.i. de cardinal máximo, a partir de un conjunto l.d.

Recordamos que cardinal de un conjunto es el número de elementos del conjunto.

Partiendo de un conjunto de vectores S l.d., si de la matriz $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$ se eliminan los vectores correspondientes a las columnas no pivotales, el sistema homogéneo resultante $[\vec{v}_i \ \vec{v}_j \ \dots \ \vec{v}_k \ | \ \vec{0}]$, siendo obviamente $i, j, \dots, k$ las columnas pivotales, pasa a ser determinado, y el conjunto $\{\vec{v}_i, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_k\}$ forma un subconjunto de S l.i. y con el máximo número de vectores que le permiten serlo.

Por tanto que el máximo número de vectores linealmente independientes dentro del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es igual al rango de $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p]$.

1.4.4 Propiedades de la dependencia/independencia lineal

Teorema 1.1. Si un conjunto $S = \{v_1, \dots, v_p\} \subset V$ contiene el elemento 0_V , entonces el conjunto es linealmente dependiente.

Demostración: Supongamos que el elemento nulo es v_1 , entonces, $1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_p = 0_V$ y por tanto existe una combinación lineal nula sin que todos los coeficientes sean nulos. $\square$

Teorema 1.2. Si $v \neq 0_V$, entonces $\{v\}$ es un conjunto libre.

Demostración: $cv = 0_V \Leftrightarrow c = 0$ $\square$

Teorema 1.3. Si un conjunto $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ es ligado, un conjunto que se forme añadiendo elementos a éste será también ligado.

Demostración: Si con los p elementos se puede obtener c.l. nula, sin que todos los coeficientes sean nulos, con esos p elementos más otro más se sigue pudiendo obtener la c.l. nula. Basta por ejemplo que el coeficiente del último elemento sea el cero. $\square$

Teorema 1.4. Si un conjunto $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ es linealmente independiente, todo subconjunto de éste es también linealmente independiente.

Demostración: Si con p elementos no se puede obtener c.l. nula con coeficientes no todos nulos, con un elemento menos tampoco se podrá obtener la c.l. nula. $\square$

Teorema 1.5. Un conjunto formado por dos elementos no nulos es linealmente dependiente si y sólo si uno de ellos es múltiplo del otro.

Demostración: “ $\Rightarrow$ ” $c_1v_1 + c_2v_2 = 0_V$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Podemos despejar: $v_1 = (c_2/c_1)v_2$ y ya tenemos que un elemento es múltiplo del otro.

“ $\Leftarrow$ ” Si $v_2 = \alpha v_1$ con $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$ (se excluye el cero porque la hipótesis de partida es que ninguno de los dos elementos es nulo), entonces se obtiene $v_2 - \alpha v_1 = 0_V$ con $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$ y por tanto el conjunto es l.d. $\square$

Teorema 1.6. Si un conjunto $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ es libre, mientras que el conjunto que se obtiene añadiéndole un elemento v_{p+1} es ya ligado, entonces v_{p+1} se puede expresar como combinación lineal del resto.

Demostración: Si una vez añadimos v_{p+1} al resto, podemos obtener la c.l. nula, y sin él no la teníamos, significa que el coeficiente que lo multiplica no es cero. Podemos entonces despejar v_{p+1} en esa expresión, obteniendo que ese elemento es c.l. del resto. $\square$

Ejemplo 1.5. Determina mediante inspección si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes.

$$a. \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad b. \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c. \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad d. \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

El primer conjunto es l.d. porque tiene más vectores que entradas tienen éstos. El segundo conjunto es l.d. porque contiene el vector cero. El tercer conjunto es l.i. porque los dos vectores no son uno múltiplo del otro. El último conjunto es l.i. porque está formado por un sólo vector y no es el vector cero.

1.4.5 Caracterización de los conjuntos linealmente dependientes

Teorema 1.7. Un conjunto $S = \{v_1, \dots, v_p\} \subset V$ de dos o más elementos es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los elementos de S es una combinación lineal del resto.

Demostración: “ $\Rightarrow$ ” Si el conjunto es l.d., entonces existe una relación de dependencia lineal. En la relación de dependencia lineal podré despejar al menos un elemento, ya que al menos uno tendrá coeficiente no nulo en la relación de dependencia lineal.

“ $\Leftarrow$ ” Si $v_p = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{p-1}v_{p-1}$, entonces $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{p-1}v_{p-1} - v_p = 0_V$, y ya tenemos una relación de dependencia lineal (el coeficiente de v_p es no nulo), y por tanto el conjunto es ligado. $\square$

El teorema anterior no nos dice que todo elemento de un conjunto linealmente dependiente pueda expresarse como combinación lineal del resto, sino que al menos para uno sí es posible.

Dado que para todo conjunto l.d. se puede obtener una relación de dependencia lineal, de ésta misma relación se puede “despejar” un vector para expresarlo como combinación lineal del resto.

1.4.6 Más ejemplos

Ejemplo 1.6. Comprueba que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 0, 1)\}$, es l.d. Identifica un vector que sea c.l. del resto, y, si existe, uno que no lo sea. Obtén la/las relación/relaciones de dependencia lineal del conjunto.

Sol.:

S es l.d. puesto que el número de vectores es mayor que el número de componentes. Un ejemplo de relación de dependencia lineal es:

$$2(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) - 1(2, 2, 0) + 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Los coeficientes de la c.l. son $(2, 2, -1, 0)$.

$(2, 2, 0)$ puede expresarse como combinación lineal del resto:

$$(2, 2, 0) = 2(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) \quad (= 2(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1))$$

También se podrían expresar $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ como combinación lineal de los otros tres vectores

$(0, 0, 1)$ es el único de los cuatro vectores que no puede expresarse como combinación lineal del resto.

Formalmente las relaciones de dependencia se obtienen resolviendo el siguiente sistema. Los coeficientes de las c.l. se han denotado como c_1, c_2, c_3 y c_4 .

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz ampliada del sistema es: $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$

La matriz ampliada está en forma escalonada reducida, por lo que la solución se obtiene de forma inmediata:

$$c_1 = -2c_3, \quad c_2 = -2c_3, \quad c_3 = c_3, \quad c_4 = 0.$$

Por tanto $\vec{c} = \{(-2, -2, 1, 0)\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ y la relación de dependencia lineal más sencilla posible:

$$-2(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 1(2, 2, 0) + 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Denotando a los vectores como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$, la relación de dependencia lineal queda:

$$\boxed{-2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4 = \vec{0}}$$

$$\text{Que se podría escribir mejor cómo: } \boxed{-2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3 = \vec{0}}$$

Como el sistema indeterminado tiene un grado de indeterminación se obtiene también una relación de dependencia lineal. Otras ecuaciones serían simplemente múltiplos de ésta.

Nótese como la relación de dependencia lineal permite despejar tres de los vectores ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$) como combinación lineal del resto.

$$\vec{v}_1 = \frac{-2}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 = -\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$$

$$\vec{v}_2 = \frac{-2}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$$

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

Ejemplo 1.7. Comprueba que el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente. Encuentra la/las relaciones de dependencia lineal entre ellos y obtén un subconjunto de S con el máximo número posible de vectores linealmente independientes.

$$S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \} \quad \text{con } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sol.:

Tenemos que ver si existe solución no trivial de la ecuación:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [2] \quad \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomemos la matriz ampliada del sistema y resolvámoslo por eliminación gaussiana:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & 0 \\ 3 & 6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & -6 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3$

El SL es comp. indeterminado. Por tanto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son linealmente dependientes.

Para encontrar una relación de dependencia lineal, resolvemos el sistema, tomando x_1 y x_2 como incógnitas principales y x_3 como parámetro libre, obteniendo:

$$\begin{cases} x_3 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_1 = -4x_2 - 2x_3 = 4x_3 - 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \quad \text{Por tanto: } \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Una solución no nula posible es $(2, -1, 1)$ y la relación de dependencia lineal correspondiente es (ver [2]): $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ya que el sistema tiene un parámetro libre, existe una única relación de dependencia lineal “independiente”. Existen otras infinitas relaciones de dependencia lineal, como por ejemplo: $4\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 = \vec{0}$, pero son proporcionales a la anterior.

De la relación encuadrada deducimos que en este ejemplo cualquier vector puede expresarse como c.l. de los otros dos. La razón es que en la relación de dependencia lineal aparecen todos los vectores del conjunto (todos multiplicados por números distintos de cero), y por tanto podemos despejar cualquiera de ellos.

Se puede comprobar que eliminando cualquiera de los tres vectores se obtiene un subconjunto l.i..

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$: Ver las dos columnas pivotaes en la eliminación gaussiana realizada. Con dos columnas pivotaes y 2 incógnitas el sist. es comp. det.
- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$: Si hubiésemos eliminado $\vec{v}_2$, el tercer vector formaría columna pivotal.
- $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$: Sabemos que este conjunto es l.i. porque un vector no es múltiplo del otro.

Ejemplo 1.8. a) Encuentra la/las relación/relaciones de dependencia lineal del conjunto $S =$

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \text{ con: } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

b) Obtén un subconjunto de S , al que llamarás S' , que sea l.i. y contenga el máximo número posible de vectores de S .

c) Expresa los vectores que no hayas incluido en S' como combinación lineal de los vectores de S' .

Sol.

a) Las relaciones de dependencia lineal son las soluciones no nulas del sistema lineal homogéneo: $[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_4 \ | \ \vec{0}]$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 7 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 11 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Con el sistema lineal en la forma escalonada reducida resulta inmediato despejar la solución general:

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4c_3 + 2c_4 \\ -3c_3 - c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad / \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado con dos grados de indeterminación (o dos parámetros libres), por tanto obtenemos dos relaciones de dependencia lineal, independientes entre sí. Una corresponde a coeficientes $(-4, -3, 1, 0)$ y la otra a coeficientes $(2, -1, 0, 1)$.

$$\begin{cases} -4\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \\ 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_4 = \vec{0} \end{cases}$$

b) Tomamos como subconjunto l.i. el formado por los vectores correspondientes a las columnas pivotaes. Por tanto $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

c) De la primera y segunda relación de dependencia lineal deducimos, respectivamente:

$$\begin{cases} \vec{v}_3 = 4\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \\ \vec{v}_4 = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}$$

1.5 Ejercicios

Ejercicio 1.1. *Dados tres vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, m)$, $\vec{v}_2 = (3, -1, n, -1)$, $\vec{v}_3 = (-3, 5, m, -4)$. Hallar m y n de forma que los tres vectores sean linealmente dependientes.*

Ejercicio 1.2. *Dados tres vectores linealmente independientes $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ demostrar que el sistema de tres vectores $\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ es también linealmente independiente.*

Ejercicio 1.3. *Dados $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ linealmente independientes, comprobar si el conjunto $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_3 - \vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$ es o no linealmente independiente.*

Ejercicio 1.4. *Sean $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ n vectores linealmente independientes. Probar que los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ definidos como*

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^i \vec{u}_k$$

para $i = \{1, 2, \dots, n\}$ son también linealmente independientes.

Ejercicio 1.5. Manualmente y con MATLAB

Considerando el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, se pide:

a) Averiguar si los 4 vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (2, 1, 1, -2)$ y $\vec{v}_4 = (1, -1, -1, -1)$ son linealmente independientes.

b) Si no lo fueran, encontrar las relaciones de dependencia entre ellos.

Ejercicio 1.6. MATLAB *Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^5$, siendo $\vec{v}_1 = (5, -9, 6, 4, 1)$, $\vec{v}_2 = (-3, 4, -2, -1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, -7, 8, 7, 3)$, $\vec{v}_4 = (-7, 7, -2, 0, 1)$ y $\vec{v}_5 = (2, 0, 4, 1, 1)$*

a) Obtén las relaciones de dependencia lineal del conjunto (tantas como vectores linealmente dependientes existan).

b) Extrae un subconjunto de S con el máximo número posible de vectores linealmente independientes.

c) Expresa los vectores eliminados como c.l. de los vectores del subconjunto l.i. del apartado anterior.

Lección 2

Subespacios vectoriales

2.1 Subespacios vectoriales. Definición y caracterización

Definición 2.1. $H \subseteq V$ es subespacio vectorial de V si H , con las mismas operaciones que V y sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, es espacio vectorial.

Caracterización de subespacios

- $H \subseteq V$ es subespacio vectorial de V si y sólo si:
 - 1) $0_V \in H$
 - 2) $\forall u, v \in H, u + v \in H$
 - 3) $\forall u \in H$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in H$
- $H \subseteq V$ es subespacio vectorial de V si y sólo si:
 - 1) $0_V \in H$
 - 2) $\forall u, v \in H$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha u + \beta v \in H$

Las dos caracterizaciones son equivalentes. Estas garantizan que el subespacio contiene el elemento neutro de la suma (axioma 4), y que tanto la suma como la multiplicación por un escalar son cerradas (axiomas 1 y 6). Los elementos de H cumplen los axiomas 2,3,7,8,9 y 10 porque los cumplen todos los elementos de V . También está garantizado que H contiene los opuestos de sus elementos (axioma 5): en efecto si $u \in H$, $-1u \in H$, ya que la multiplicación por un escalar es cerrada, y $-1u = -u$.

En general utilizaremos la primera caracterización, con tres axiomas, para determinar si un subconjunto H de V es o no subespacio vectorial de V .

$H = \{0_V\}$ es subespacio y se le denomina **subespacio cero**.

El espacio completo V puede considerarse subespacio de sí mismo.

Los subespacios vectoriales son espacios vectoriales, por lo que a su vez pueden tener subespacios vectoriales.

2.2 Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$

Justificamos a continuación que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$, aparte del subespacio completo y del subespacio cero, son rectas que contienen el vector $(0, 0, 0)$ y planos que contienen el vector $(0, 0, 0)$.

En efecto, si tomo un subconjunto H que contiene además del vector $(0, 0, 0)$ un vector distinto, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, todos los múltiplos de él tendrán que pertenecer a H , y esos puntos forman una recta. La recta es $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(v_1, v_2, v_3)$, o $\vec{x} = \alpha\vec{v}$, siendo α parámetro libre.

Si tomo un subconjunto H que contiene además de los vectores $\vec{0}$ y el $\vec{v}$ anterior, un tercer vector $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ no nulo y que no es múltiplo de $\vec{v}$, entonces todas las combinaciones lineales de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ pertenecerán a H . Esas combinaciones lineales son los vectores $(x_1, x_2, x_3) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(w_1, w_2, w_3)$, siendo α y β parámetros libres. El conjunto H es por tanto un plano.

Si tomo un subconjunto H que contiene además de los tres vectores anteriores $\vec{0}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, un cuarto vector $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ no nulo y que no está en el plano anterior, entonces todas las combinaciones lineales de $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{z}$ pertenecerán a H . Esas combinaciones lineales son los vectores $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(w_1, w_2, w_3) + \gamma(z_1, z_2, z_3)$, es decir $\vec{x} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} + \gamma\vec{z}$, siendo α , β y γ parámetros libres. El conjunto H es entonces todo $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^2$

Con un razonamiento similar se llega a que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$, aparte del subespacio completo y del subespacio cero, son las rectas que contienen el vector $(0, 0)$.

2.3 Ejemplos de subesp. vectoriales y de subconjuntos que no son subesp. vectoriales

Razonaremos si un conjunto es subespacio vectorial o no determinando si se verifican los axiomas de caracterización de subespacios.

Ejemplos en $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de sí mismo, pues verifica las tres propiedades.
- $H = \{\vec{0}\}$ es el subespacio cero de $\mathbb{R}^n$.
- $F = \{(2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$ no es subespacio vectorial, porque el vector $(0, 0)$ no pertenece a F .
- $U_1 = \{(x, 1) / x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

U_1 no es subespacio pues no contiene el $(0, 0)$. Tampoco verifica que la suma y la multiplicación por un real sean cerradas. Contraejemplos: $(1, 1) + (2, 1) = (3, 2) \notin U_1$, $3(1, 1) = (3, 3) \notin U_1$. El incumplimiento de uno de los axiomas es suficiente para afirmar que el conjunto no es subespacio vectorial.

Gráficamente también podría verse que la suma de dos vectores de U_1 está fuera de U_1 .

- $U_2 = \{(x, x + 3) / x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Se razona fácilmente que $(0, 0)$ no pertenece a U_2 , ya que si $x = 0$, entonces $y = 3$. Sin el cero, U_2 no es subespacio.

Gráficamente también podría verse que la suma de dos vectores de U_2 está fuera de U_2 .

- $U_3 = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Podemos fácilmente justificar que U_3 es subespacio vectorial haciendo uso de los tres axiomas de caracterización de subespacios vectoriales.

$$(0, 0) \in U_3, \text{ pues } 2 \times 0 = 0,$$

$$\text{la suma es cerrada: } (x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2x + 2y) = (x + y, 2(x + y)) \in U_3$$

$$\text{la multiplicación por escalar es cerrada } \lambda(x, 2x) = (\lambda x, \lambda 2x) = (\lambda x, 2\lambda x) \in U_3.$$

Gráficamente se obtiene de forma obvia que la suma y la multiplicación por escalar son cerradas, pues la suma de dos vectores de la recta da como resultado un vector de la recta, y la multiplicación de un vector de la recta por un escalar da un vector en la misma recta.

- $U = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$$(0, 0, 0) \in U$$

$$(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0) \in U$$

$$\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0) \in U$$

U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ ya que contiene el elemento neutro y la suma y la multiplicación por escalar son cerradas.

U está formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ en el plano XY (con la componente $z = 0$).

Ejemplo 2.1. En $\mathbb{R}^n$ razona cuales de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales basándote en los axiomas de caracterización de subespacios.

$$A = \{ (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) / x_i \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^4$$

$$B = \{ (x_1, x_2) / x_1 \cdot x_2 = 0 \text{ y } x_i \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$$

Sol.:

Conjunto A (Vectores de $\mathbb{R}^4$ en los que la 3ª componente es suma de la 2ª y 4ª)

$(0, 0, 0, 0) \in A$. Se demuestra sin más que tomar $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

$\vec{x} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) \in A$ con tal de que $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

$\vec{y} = (3y_1, y_2, y_2 + y_4, y_4) \in A$ con tal de que $y_1, y_2, y_4 \in \mathbb{R}$

$\vec{x} + \vec{y} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) + (3y_1, y_2, y_2 + y_4, y_4) = (3x_1 + 3y_1, x_2 + y_2, x_2 + x_4 + y_2 + y_4, x_4 + y_4) = (3(x_1 + y_1), x_2 + y_2, (x_2 + y_2) + (x_4 + y_4), x_4 + y_4) \in A$ pues $x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_4 + y_4 \in \mathbb{R}$ y la 3ª componente es suma de la 2ª y 4ª

$\vec{x} = (3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) \in A$ con tal de que $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha\vec{x} = \alpha(3x_1, x_2, x_2 + x_4, x_4) = (\alpha 3x_1, \alpha x_2, \alpha(x_2 + x_4), \alpha x_4) = (3(\alpha x_1), \alpha x_2, \alpha x_2 + \alpha x_4, \alpha x_4) \in A$ pues $\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_4 \in \mathbb{R}$ y la 3ª componente es suma de la 2ª y 4ª

A es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ ya que contiene el elemento neutro y es cerrada la suma y la multiplicación por un escalar.

Conjunto B

$(0, 0) \in B$. En efecto tomando $x_1 = x_2 = 0$ se cumple $x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 0 = 0$.

$\vec{x} = (x_1, x_2) \in B$ con tal de que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \cdot x_2 = 0$

$\vec{y} = (y_1, y_2) \in B$ con tal de que $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y $y_1 \cdot y_2 = 0$

Consideremos la suma $\vec{x} + \vec{y}$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in \mathbb{R}$. Veremos si se cumple además $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = 0$

$(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + 0 = x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2$

Esta suma no tiene por que ser igual a 0. Lo vemos en el siguiente contraejemplo:

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$$

$$(1, 0) \in B, \quad (0, 1) \in B \quad \text{pero } (1, 1) \notin B$$

Al haber encontrado dos vectores de B cuya suma no pertenece a B queda demostrado que B no es subespacio.

Geoméricamente vemos que el conjunto B es la unión del eje X y del eje Y, y que tomando un vector no nulo de cada eje, su suma siempre va a estar fuera de esos ejes.

Ejemplos en el espacio vectorial de los polinomios reales

En los dos ejemplos siguientes se puede comprobar fácilmente que el polinomio cero está contenido en el subconjunto, que la suma en él es cerrada y que la multiplicación por un real también es cerrada, aunque las justificaciones no están presentadas.

- Considerado el espacio vectorial de los polinomios reales de grado $k \leq 5$, P_5 , el subconjunto $H \subset P_5$ formado por los polinomios de grado menor o igual que 2 es subespacio vectorial de P_5 .

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 / a_i \in \mathbb{R}$$

- Considerado el espacio vectorial de los polinomios reales de grado $k \leq 5$, P_5 , el subconjunto $F \subset P_5$ formado por los polinomios con coeficientes iguales es subespacio vectorial de P_5 .

$$p(\lambda) = a + a\lambda + a\lambda^2 + \dots + a\lambda^5 / a \in \mathbb{R}$$

Ejemplos en el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales

Considerado el espacio vectorial de las matrices A_n , los siguientes subconjuntos de A_n son subespacios vectoriales de A_n . Se puede comprobar fácilmente que los conjuntos cumplen los tres axiomas de caracterización de los subespacios vectoriales.

El subconjunto D_n formado por las matrices diagonales de orden n .

El subconjunto TS_n formado por las matrices triangulares superiores de orden n .

El subconjunto TI_n formado por las matrices triangulares inferiores de orden n .

El subconjunto S_n formado por las matrices simétricas de orden n .

El subconjunto H_n formado por las matrices antisimétricas de orden n .

Ya se ha mencionado que los subespacios vectoriales pueden tener a su vez subespacios vectoriales. Las matrices escalares de orden n se pueden considerar subespacio vectorial del espacio vectorial A_n , o subespacio vectorial de D_n .

Otros ejemplos

- $F \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, siendo $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, es subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Es sencilla la justificación de que el conjunto es subespacio utilizando los axiomas. Utilizamos aquí la segunda condición necesaria y suficiente de la caracterización de subespacios:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F, \text{ sin más que tomar } a = b = c = 0$$

Partimos de las matrices $\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & -x_1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x'_1 & x'_3 \\ x'_2 & -x'_1 \end{bmatrix}$ que por pertenecer a F cumplen $x_4 = -x_1$ y $x'_4 = -x'_1$. Veamos si las combinaciones lineales de ellas también pertenecen a F :

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & -x_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x'_1 & x'_3 \\ x'_2 & -x'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x'_1 & \alpha x_3 + \beta x'_3 \\ \alpha x_2 + \beta x'_2 & \alpha(-x_1) + \beta(-x'_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x'_1 & \alpha x_3 + \beta x'_3 \\ \alpha x_2 + \beta x'_2 & -(\alpha x_1 + \beta x'_1) \end{bmatrix}$$

Los elementos de las posiciones c_{11} y c_{22} de la matriz C obtenida con la c.l. son opuestos entre sí y por tanto $C \in F$ y F es subespacio de las matrices cuadradas reales de orden 2.

- $F \subseteq M_2(\mathbb{R})$, siendo $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+2 \\ b & c \end{bmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, no es subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

La justificación más sencilla es ver que la matriz cero no pertenece al conjunto, pues la primera fila no puede tener dos ceros.

Ejemplo 2.2. En $\mathbb{R}^4$ justifica para cada uno de los siguientes conjuntos si son subespacios o no.

$$C = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + 4x_4 = 0, x_i \in \mathbb{R} \}$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + 2x_4 = 7, x_i \in \mathbb{R} \}$$

Sol.:

Conjunto C

$(0, 0, 0, 0) \in C$. En efecto, tomando $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $2x_1 + 4x_4 = 0$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in C$ con tal de que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ y $2x_1 + 4x_4 = 0$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in C$ con tal de que $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ y $2y_1 + 4y_4 = 0$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$

$2(x_1 + y_1) + 4(x_4 + y_4) = 2x_1 + 4x_4 + 2y_1 + 4y_4 = 0 + 0 = 0$, por tanto $\vec{x} + \vec{y} \in C$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$

$2\lambda x_1 + 4\lambda x_4 = \lambda(2x_1 + 4x_4) = \lambda 0 = 0$, por tanto $\lambda \vec{x} \in C$

C es subespacio vectorial

Conjunto D

$(0, 0, 0, 0) \notin D$, puesto que en este caso $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ y $x_4 = 0$, y por tanto $x_1 + 2x_4 = 0 + 0 \neq 7$

Por tanto el conjunto D no es subespacio vectorial

Ejemplo 2.3. Si un subespacio F de las matrices reales de orden 2 contiene las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ¿ Tiene que contener la matriz identidad de orden 2 ?.

Sol.:

Sí, porque si $A \in F$ y $B \in F$, entonces todas las combinaciones lineales de A y B pertenecen a F , y la identidad es la combinación lineal de A y B con coeficientes $(1, -1)$.

Ejemplo 2.4. Considerado en el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden 3, el subconjunto A formado por las matrices invertibles, ¿ Es A subespacio vectorial ?.

Sol.:

El conjunto A de las matrices invertibles no es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas con la suma y el producto por un escalar. La razón es que el conjunto A tiene que incluir el elemento neutro de la suma, que es la matriz cero, y ese elemento no pertenece al conjunto porque la matriz cero no tiene inversa.