Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ruth Carballo Fidalgo
Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria
carballor@unican.es

10 de octubre de 2019

Contenidos

Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1 Definiciones

Definición 2.1. *Una ecuación lineal en las variables x_1, x_2, …, x_n es una ecuación que se puede escribir de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

siendo b y los coeficientes a_i elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ (cuerpo $\mathbb{R}$ o cuerpo $\mathbb{C}$), cuyos valores se suelen conocer de antemano.

Definición 2.2. *Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, tiene la forma:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad [1]$$

Los elementos a_{ij}, denominados coeficientes, y los elementos b_i, denominados términos independientes, pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$.

Se llama **solución** *del sistema de ecuaciones lineales (o sistema lineal, abreviado como SL)* **en** $\mathbb{K}$ *a todos los conjuntos de valores de las variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con $x_i \in \mathbb{K}$, que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones dadas.* **Resolver** *un SL es obtener su solución. Si el SL tiene solución se denomina* **compatible***; en caso contrario* **incompatible***. El SL es* **compatible determinado** *si el conjunto solución solo tiene un elemento. En caso de que el conjunto solución tenga más elementos este número será infinito y el SL se dice* **compatible indeterminado***. Cada elemento del conjunto de soluciones del sistema compatible determinado se denomina* **solución particular***.*

Podemos expresar la solución del sistema como un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, llamado **vector solución**. El número de entradas del vector solución es igual al número de variables del sistema. En Álgebra un vector corresponde a una matriz columna, es decir, $\vec{x} \in M_{n\times 1}$, por tanto:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

De forma general se expresará $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ si consideramos la solución en el conjunto de los números reales.

En todo el tema consideraremos coeficientes, términos independientes y solución, en el conjunto de los números reales

• Decimos que un SL es **homogéneo** si $b_i = 0 \ \ \forall i = 1, ..., n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo siempre tiene al menos la solución $\vec{x} = \vec{0}$, que se conoce como solución nula o **solución trivial**, por tanto siempre es compatible. Los casos que se dan respecto de la solución son “compatible determinado” o “compatible indeterminado”.

• Si existe algún $b_i \neq 0$, entonces el SL se dice que es **no homogéneo** o **completo**.

Las abreviaturas SLH y SLNH significan, respectivamente, Sistema Lineal Homogéneo y Sistema Lineal No Homogéneo.

RESUMEN del SL respecto de su solución

$$\begin{cases} Incompatible \\ Compatible \begin{cases} Determinado \\ Indeterminado \end{cases} \end{cases}$$

Veremos que la **expresión de la solución** en los sistemas lineales será la siguiente:

S. C. Determinado: $\vec{x} = \vec{p}$

S. C. Indeterminado: $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + ... + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\alpha_i \in \mathbb{R}$ los denominados **parámetros libres**, porque cada α_i puede tomar todos los valores posibles de $\mathbb{R}$. k es el mínimo número de parámetros necesario para contener todas las soluciones.
Esta expresión de la solución se denomina **forma vectorial paramétrica**.

En ambos casos $\vec{p} = \vec{0}$ si y sólo si el sistema es homogéneo.

En un sistema <u>homogéneo</u> <u>compatible indeterminado</u> con k parámetros libres existen k <u>soluciones independientes</u>, es decir, existe un conjunto S de k vectores solución que son linealmente independientes entre sí . Un ejemplo sencillo de elección de estas soluciones independientes se obtiene dando el valor 1 a uno de los parámetros y el valor 0 al resto, repitiendo el proceso para los k parámetros. Obtendríamos entonces las siguientes k soluciones particulares formando un conjunto linealmente independiente:

$$S = \{ \ \vec{v}_1 \ \ , \ \ \vec{v}_2 \ \ , \ \ \ldots \ \ , \ \ \vec{v}_k \ \}$$

En un sistema <u>no homogéneo</u> <u>compatible indeterminado</u> con k parámetros libres existen $k+1$ <u>soluciones independientes</u>, es decir, existe un conjunto S de $k+1$ vectores solución que son linealmente independientes entre sí . Un ejemplo sencillo de elección de estas soluciones independientes se obtiene dando el valor cero a todos los parámetros, con lo que obtenemos $\vec{p}$, y dando valor 0 a todos los parámetros menos uno, al que damos el valor 1, repitiendo el proceso para los k parámetros.
Obtendríamos entonces las siguientes $k+1$ soluciones independientes:

$$S = \{ \ \vec{p} \ , \ \vec{p} + \vec{v}_1 \ , \ \vec{p} + \vec{v}_2 \ , \ \ \ldots \ \ , \ \vec{p} + \vec{v}_k \ \}$$

Nótese que la diferencia reside en que $\vec{p} = \vec{0}$ para los sistemas lineales homogéneos y el vector cero no puede formar parte de un conjunto linealmente dependiente.

2.2 Matrices correspondientes a los elementos de un SL

Matriz de coeficientes: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Otra notación: $A = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ ...\ \vec{a}_n\ ]$

Los vectores $\vec{a}_i$ son las columnas de la matriz A: $\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$

Vector de términos independientes: $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Vector de variables, vector solución o vector de incógnitas: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Matriz ampliada del SL: $A^* = [\ A \mid \vec{b}\ ] = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ ...\ \vec{a}_n \mid \vec{b}\ ]$

2.3 Representación del SL mediante la ec. matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

Consideremos el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots x_n$, de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

x_i, a_{ij} y b_i son elementos del cuerpo $\mathbb{R}$.

$\vec{x}_{n\times 1}$ es solución del sistema lineal $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_{n\times 1}$ es solución de la ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$, siendo $A_{m\times n}$ la matriz de coeficientes y $\vec{b}_{m\times 1}$ el vector de términos independientes.

Demostración:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$\square$

2.4 Representación del SL mediante una ec. vectorial

Consideremos la igualdad de la sección anterior:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

descomponiendo el vector de la izquierda en n sumandos, y sacando factor común las x_1 y $x_2 \ldots x_n$, obtenemos:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

, que es la ecuación vectorial correspondiente, y que podemos expresar, de forma más sencilla como:

$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$, siendo $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ las columnas de A.

$\vec{x}$ es solución del SL $\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ es solución de la ecuación vectorial $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$.

Expresado de otra forma, la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si $\vec{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A. En este caso cada conjunto de coeficientes de la combinación lineal es una solución posible del SL.

Ejemplo 2.1. *El sistema* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ *se puede expresar de la forma:*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{(ec. vectorial o comb. lineal)}$$

$\vec{b}$ *aparece expresado como combinación lineal de las columnas de* A *con coeficientes* x_1, x_2, x_3.

o como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{(ec. matricial o prod. matriz-vector)}$$

2.5 Repaso del producto matriz-vector

Sea A una matriz $m \times n$, con columnas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, y sea $\vec{x}$ un vector de n entradas, $\vec{x}_{n\times 1} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces el producto $A\vec{x}$, es la suma de las columnas de A, pesando cada una de ellas con las entradas de $\vec{x}$.

$$A\vec{x} = [\ \vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots \vec{a}_n\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

Expresado de otra forma, el producto $A\vec{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes o pesos las entradas de $\vec{x}$.

Ejemplo 2.2. *Calcula el siguiente producto matriz-vector:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando las reglas del producto de matrices lo habríamos calculado así :

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

Ejemplo 2.3. *Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ escribe el vector $3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3$ como producto de una matriz por un vector.*

$$3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3 = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ ] \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = A\vec{x} \quad ; \quad A = [\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ ], \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2.6 Sistemas lineales equivalentes

Definición 2.3. *Dos sistemas de ecuaciones lineales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{R}$*, de igual número de variables, se dice que son* **sistemas equivalentes** *cuando tienen la misma solución.*

Se puede demostrar de forma sencilla que efectuando transformaciones del sistema [1] de los tipos siguientes, se obtiene un sistema equivalente al primero.

1. Multiplicación de una ecuación por un escalar distinto de cero
2. Suma a una ecuación de un múltiplo de otra
3. Intercambio de dos ecuaciones entre sí

Para determinar si un SL tiene solución y obtener ésta, si existe, un procedimiento posible es sustituir inicialmente el SL dado por otro equivalente de resolución más sencilla.

Ejemplo 2.4. *Consideremos el sistema* $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

Son ejemplos de sistemas equivalentes al anterior:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_2 = 7 \end{cases}$$

Nótese como en el último SL podemos despejar fácilmente x_2 en la segunda ecuación, y a continuación despejar x_1 en la 1^{a} sustituyendo x_2 por el valor calculado.

2.7 Resolución de un SL mediante eliminación gaussiana

Consideremos el SL con n variables o incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

Hemos visto que el SL que se obtiene a partir de [1] realizando transformaciones como intercambiar el orden de dos ecuaciones, multiplicar una ecuación por un escalar no nulo o sumar a una ecuación un múltiplo de otra, es equivalente al primero, o dicho de otra forma, tiene la misma solución.

Utilizando la notación matricial, estas transformaciones de las ecuaciones se corresponderían con las <u>operaciones elementales por filas</u>, que son permutación de filas, multiplicación de una fila por un factor no nulo, y suma a una fila de un múltiplo de otra, realizadas sobre la denominada matriz ampliada del sistema $A^* = [\ A \mid \vec{b}\ ] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \mid b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \mid b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \mid \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \mid b_n \end{bmatrix}$

Cada fila de la matriz ampliada corresponde a una ecuación.

Ejemplo 2.5. *Escribe los sistemas de ecuaciones representados por las matrices ampliadas siguientes:*

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad N^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La respuesta será: $M^* : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad N^* : \; x_1 + 2x_2 = 0$

Una matriz ampliada A^* representa un SL y todas las matrices equivalentes por filas a A^* corresponden a sistemas lineales equivalentes al original.

El método de resolución de sistemas lineales basado en la transformacin de A^* a una forma escalonada por filas se denomina método de eliminación gaussiana. Si se usa la transformación hasta la forma escalonada reducida el método se denomina de Gauss-Jordan.

Ejemplo 2.6. *Veamos unos ejemplos sencillos de resolución de SLs mediante eliminación gaussiana.*

- $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

  $$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 3 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

  A partir de la nueva matriz ampliada equivalente por filas obtenemos el SL sencillo:

  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ \quad\;\; x_2 = -1 \end{cases}$ *con el que voy despejando, de la última a la primera, todas las incógnitas.*

  $x_2 = -1,$

  $x_1 = 3 + x_2 = 3 - 1 = 2,$ *por tanto* $\vec{x} = (2, -1)$.

  Para resolverlo mediante el método de Gauss-Jordan tendríamos que haber llegado hasta la forma reducida por filas.

  $$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 3 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

  En este caso hemos llegado a tal grado de simplificación del SL que directamente "leemos" la solución:

  $x_1 = 2,$

  $x_2 = -1$, *por tanto* $\vec{x} = (2, -1)$.

- $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

  Este SL no tiene solución, ya que la tercera ecuación es incompatible con la segunda. Procedemos sin embargo con la eliminación gaussiana, como si no nos hubiéramos dado cuenta.

  $$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 3 & | & -3 \\ 0 & 3 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

La última ecuación expresa $0x_1 + 0x_2 = 1$, *o lo que es lo mismo,* $0 = 1$. *Esta ecuación nunca será cierta. No hay valores* (x_1, x_2) *que satisfagan la ecuación.*

En los sistemas incompatibles siempre tendremos que en la matriz ampliada A^* *la columna de términos independientes es pivotal, es decir, rg* A^* *= rgA + 1.*

- $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & 0 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Tenemos un sistema compatible, pero más variables que ecuaciones, por tanto nos quedará un parámetro libre. Un procedimiento sistemático consiste en tomar como incógnitas principales, a despejar, las correspondientes a las columnas pivotales de A *y como parámetros libres las variables correspondientes a las columnas no pivotales de* A. *Por tanto en este caso despejaríamos* x_1 *y* x_2 *en función de* x_3.

$x_3 = x_3$

$x_2 = -1$

$x_1 = 3 + x_2 - x_3 = 2 - x_3$.

Por tanto la solución es:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 - x_3 \\ -1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; / \; x_3 \in \mathbb{R}$$

2.8 Caracterización de un SL respecto de su solución

Sistema lineal con matriz de coeficientes $A_{m\times n}$ y término independiente $\vec{b}$.

- Sist. incompat. $\Leftrightarrow$ rg$A^* =$ rg$A + 1$

  Ya que la inclusión de la columna $\vec{b}$ añade un pivote, la forma escalonada por filas de la matriz A^* tendrá una fila de la forma

  $[\ 0 \ \ \dots \ 0 \mid \diamond\ ]$ con $\diamond \neq 0$

  Es decir, una ecuación de la forma

  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n \neq 0$, que no tendrá solución.

  De forma general se puede decir que un sistema de ecuaciones es compatible si y sólo si al obtener una forma escalonada por filas de A^* no existe ninguna fila de la forma:

  $[\ 0 \ \ \dots \ 0 \mid \diamond\ ]$ con $\diamond \neq 0$

  Un SL homogéneo tiene $\vec{b} = \vec{0}$ por tanto siempre es compatible.

- Sist. compat. determinado $\Leftrightarrow$ rg$A^* =$ rg$A = n$

  En la forma escalonada por filas tenemos n ecuaciones, cada una con su pivote, que nos permiten despejar las n incógnitas.

- Sist. compat. indeterminado $\Leftrightarrow$ rg$A^* =$ rg$A < n$

  El número de ecuaciones en la forma escalonada por filas, es decir número de ecuaciones con pivote, es insuficiente para despejar las n incógnitas, por lo que existen parámetros libres.

  rg$A$ = número de incógnitas principales

  n - rg$A$ = número de parámetros libres

<u>Algunas propiedades para un SL con matriz de coeficientes $A_{m\times n}$ y vector $\vec{b}$ de términos independientes</u>

1) rg$A = m \Leftrightarrow$ El SL es compatible para todo $\vec{b}$. En efecto, en este caso rg$A^* =$ rg$A = m$.

2) rg$A < m \Rightarrow$ El SL es compatible o incompatible dependiendo del valor de $\vec{b}$. Compatible si la columna $\vec{b}$ no aumenta el rango. Se podrán encontrar ejemplos de los dos casos.

En los sistemas <u>homogéneos</u> $\vec{b} = \vec{0}$ y por tanto $\vec{b}$ no aumenta el rango. rgA^*=rg$A$.

3) rg$A = n \Rightarrow$ El SL no puede ser indeterminado (será incompatible o compatible determinado, dependiendo del valor de $\vec{b}$).

4) Para A_n (A cuadrada), el SL es compatible determinado $\Leftrightarrow$ rg$A = n$.

EJEMPLOS rango de la matriz de coeficientes igual a m o menor que m:

- $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mid b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mid b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid b_3 \end{bmatrix}$

  Rango de la matriz de coeficientes $A =$ número de filas, y el SL es por tanto compatible para todo $\vec{b}$

- $B^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mid b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mid b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid b_3 \end{bmatrix}$

  Rango de la matriz de coeficientes B es menor que el número de filas, por tanto existirán valores de $\vec{b}$ para los que el sistema es compatible y valores de $\vec{b}$ para los que no lo es.

  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mid 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mid 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{bmatrix}$ el SL es compatible.

  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mid 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mid 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 1 \end{bmatrix}$ el SL no es compatible.

2.9 Más ejemplos de resolución mediante eliminación gaussiana

Ejemplo 2.7. *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 \; - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 \; - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 5 & -8 & 7 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar los ceros de la primera columna tenemos que hacer primero una permutación. Hacemos por ejemplo la permutación de la fila 1 con la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 5 & -8 & 7 & | & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{31(-5/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & | & -19 \end{bmatrix} \underset{F_{32(1/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -4 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & | & -15 \end{bmatrix}$$

Esta matriz representa el sistema $\begin{cases} 2x_1 \; - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ \quad\quad x_2 - 4x_3 = 8 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = -15 \end{cases}$

La última ecuación expresa $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -15$. *Esta ecuación nunca será cierta. No hay valores de* x_1, x_2, x_3 *que satisfagan la ecuación. Por tanto el sistema es incompatible.*

O visto de otra forma, el sistema es incompatible porque rg A^* = *rgA + 1 (rg*$A^* = 3$ *y rgA=2).*

Ejemplo 2.8. *Resolver los sistemas siguientes* [1]*:*

$$I : \begin{cases} \quad\quad 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} \quad\quad 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

Comenzamos con el sistema lineal I:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & | & 4/3 \end{bmatrix}$$

El nuevo sistema es: $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ \quad\quad 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1/3 \; x_5 = 4/3 \end{cases}$

Las incógnitas x_1, x_2 *y* x_5, *que corresponden a columnas pivotales, las consideraremos como* *<u>incógnitas principales</u>*. *Las otras dos incógnitas,* x_3 *y* x_4, *las consideraremos como* *<u>parámetros libres</u>*.

Se dará la solución expresando las incógnitas principales como función de los parámetros libres. Decir que x_3 *y* x_4 *son parámetros libres significa que podemos escoger cualquier valor para* x_3 *y*

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

cualquier valor para x_4*. Una vez que lo hagamos, quedará fijado el valor de las incógnitas principales.*

$\frac{1}{3}x_5 = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{x_5 = 4}$

$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \Rightarrow \underline{x_2} = \frac{-5+6x_3-6x_4-4\cdot 4}{3} = \frac{-5+6x_3-6x_4-16}{3} = \underline{-7+2x_3-2x_4}$

$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \Rightarrow$
$3x_1 = 9 + 7x_2 - 8x_3 + 5x_4 - 8\cdot 4 = 9 + 7(-7+2x_3-2x_4) - 8x_3 + 5x_4 - 32 = -23 - 49 + 14x_3 - 14x_4 - 8x_3 + 5x_4 = -72 + 6x_3 - 9x_4 \Rightarrow$
$\underline{x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4}$

Tenemos entonces: $\begin{cases} x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 4 \end{cases}$ $\quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ *son los parámetros*

La solución es: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Las solución tiene forma paramétrica por tratarse de un sistema compatible indeterminado.

Podríamos haber considerado otras dos incógnitas, por ejemplo x_1 *y* x_3*, como parámetros libres. Lo importante es que cualquier solución general tendrá siempre el mismo número de parámetros libres.*

Se trata de un sistema compatible indeterminado ya que tenemos menos columnas pivotales que incógnitas.
3 = rg A^* *= rg* $A < n = 5$
número de parámetros libres $n - \mathrm{rg}A = 2$.

Denotando $\vec{p} = \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \vec{p} + x_3\vec{u} + x_4\vec{v}$

$\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ *son vectores de* $\mathbb{R}^5$ *y* x_3, x_4 *son elementos cualesquiera de* $\mathbb{R}$

La solución $\vec{x}$ *es la suma de* $\vec{p}$ *y cualquier combinación lineal de los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*. Obsérvese como* $\vec{p}$*,* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son linealmente independientes entre sí (ninguno se puede expresar como combinación lineal de los otros dos). Vemos además que* $\vec{p}$ *es solución del sistema (para el caso* $x_3 = x_4 = 0$*).* $\vec{p}$*,* $\vec{p} + \vec{u}$ *y* $\vec{p} + \vec{v}$ *es el conjunto de soluciones particulares más sencillo y a la vez linealmente independiente.*

Empleando cálculos similares para el sistema lineal II obtenemos:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 0 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$$

El nuevo sistema es:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0 \\ \qquad\quad 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1/3x_5 = 0 \end{cases}$$

Despejando en función de los parámetros libres, tenemos:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

La solución es: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = x_3\vec{u} + x_4\vec{v}$

La solución $\vec{x}$ *es la combinación lineal de los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*, siendo estos vectores los mismos que los del SL I.*

$\vec{x}_{no\ hom} = \vec{x}_{hom} + \vec{p}$

Fijándonos en los SLs en la forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ *podemos desarrollar:*

$$A\vec{x}_{no\ hom} = A(\vec{x}_{hom} + \vec{p}) = \vec{0} + \vec{b}$$

<u>Dos teoremas sobre la expresión de la solución general de un sistema compatible indeterminado</u>

Teorema 2.1. *En un SL homogéneo e indeterminado,* $A_{m\times n}\vec{x} = \vec{0}$*, la solución general tiene la forma* $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k$*, donde los vectores* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ *son un conjunto linealmente independiente y* $k = n - \mathrm{rg}A$*.*

Teorema 2.2. *En un SL no homogéneo,* $A_{m\times n}\vec{x} = \vec{b}$*, compatible indeterminado, la solución general tiene la forma* $\vec{x} = \vec{p} + c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k$*, donde los vectores* $\vec{p}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ *son un conjunto linealmente independiente, con* $k = n - \mathrm{rg}A$*.* $\vec{p}$ *es solución particular del sistema no homogéneo y* $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_k\vec{v}_k$ *es la solución del correspondiente homogéneo.*

Ejemplo 2.9. *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right] [1] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right] [2] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ \quad - 3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right] [3] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = \ \ 0 \\ \qquad x_2 - 4x_3 = \ \ 4 \\ \quad - 3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] [4] \qquad \begin{cases} x_1 \ - 2x_2 + \ x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 4x_3 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

Ya tenemos la matriz ampliada en una forma escalonada por filas y el sistema de ecuaciones correspondiente. Ahora podremos determinar la solución, yendo de la última ecuación de este sistema, hacia arriba.

De la tercera ecuación: $x_3 = 3$

Sustiyendo x_3 *en la segunda ecuación:* $x_2 = 4 + 4x_3 = 4 + 12 = 16$

Sustiyendo x_3 *y* x_2 *en la primera ecuación:* $x_1 = 0 + 2x_2 - x_3 = 32 - 3 = 29$

Hemos obtenido la solución mediante Eliminación Gaussiana. Tenemos: $x_1 = 29$, $x_2 = 16$ *y* $x_3 = 3$, *por tanto la solución es:* $\vec{x} = (29, 16, 3)$ *o*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 29 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Podríamos también haber continuado obteniendo sistemas equivalentes (matrices equivalentes por filas) hasta llegar a la forma reducida por filas. Realicemos este proceso, partiendo de la matriz ampliada [4].

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] [5] \qquad \begin{cases} x_1 \ - \ 2x_2 \qquad = -3 \\ \qquad x_2 \qquad = 16 \\ \qquad\qquad x_3 \ = \ \ 3 \end{cases}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] [6] \qquad \begin{cases} x_1 = \ 29 \\ x_2 = \ 16 \\ x_3 = \ \ 3 \end{cases}$$

Ya tenemos la matriz ampliada en la forma reducida por filas, y podemos determinar directamente la solución. La solución es $\vec{x} = (29, 16, 3)$. *Este es el método de Gauss-Jordan.*

Se trata de un sistema compatible determinado.

$rg\ A^* = rg\ A = n$

Número de incógnitas = Número de columnas pivotales de A

Solución = un vector de $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 2.10. *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 7 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | \ 3 \\ 2 & -2 & 3 & | \ 1 \\ 0 & 1 & 1 & | \ 4 \\ 6 & 4 & 5 & | \ 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 7/5 & | & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -5x_2 + 2x_3 = -2 \\ \frac{7}{5}x_3 = \frac{18}{5} \end{cases}$$

$7x_3 = 18, \quad x_3 = \frac{18}{7}$

$-5x_2 + 2x_3 = -2, \qquad -5x_2 = -2 - 2 \cdot \frac{18}{7} = \frac{-14-36}{7} = \frac{-50}{7}, \quad x_2 = \frac{-50}{-35} = \frac{10}{7}$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \quad 2x_1 = 3 - 3x_2 - x_3 = 3 - \frac{30}{7} - \frac{18}{7} = \frac{21-30-18}{7} = -\frac{27}{7},$

$x_1 = -\frac{27}{14}$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{27}{14} \\ x_2 = \frac{10}{7} \\ x_3 = \frac{18}{7} \end{cases} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} -27/14 \\ 10/7 \\ 18/7 \end{bmatrix}$$

Es un sistema compatible determinado. $\quad rg\ A = rg\ A^* = n$

Ejemplo 2.11. *Resolver los siguientes sistemas. Observa que el primero es el correspondiente homogéneo del segundo.*

$$I: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \qquad II: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4 \end{cases}$$

I:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rg A = rg A = 2 < 3 = número de incógnitas, por tanto* $A\vec{x} = \vec{0}$ *es compatible indeterminado.*

$$\begin{cases} 3x_1 \quad - 4x_3 = 0 \\ \quad x_2 \quad\quad = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos para las incógnitas principales, tomando x_3 *como parámetro libre, y obtenemos:*

$x_1 = 4/3\ x_3$, $x_2 = 0$ *y* x_3 *parámetro libre. La solución de* $A\vec{x} = \vec{0}$ *tiene es:*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3\vec{v} \quad \text{con } \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \text{ y } \ x_3 \in \mathbb{R}.$$

La solución tiene la expresión $\vec{x} = x_3\vec{v}$ *con* $x_3 \in \mathbb{R}$, *que también se puede escribir cómo* $\vec{x} = \alpha\ \vec{v}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$.

La solución es geométricamente una recta en $\mathbb{R}^3$ *que pasa por* $\vec{0}$ *y que contiene la dirección* $\vec{v}$. $\vec{v}$ *se dice que es generador de la recta. La solución trivial se obtiene para* $x_3 = 0$

II: *Realizando las mismas operaciones elementales por filas que en el apartado anterior obtenemos:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rg A = rg A = 2 < 3 = número de incógnitas, por tanto* $A\vec{x} = \vec{b}$ *es compatible indeterminado.*

$$\begin{cases} 3x_1 \quad - 4x_3 = -3 \\ \quad x_2 \quad\quad = 2 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos para las incógnitas principales, tomando x_3 *como parámetro libre. y obtenemos:*

$x_1 = -1 + 4/3\ x_3$,
$x_2 = 2$
$x_3 = x_3$ *parámetro libre.*

La solución es por tanto:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{p}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

, siendo los vectores $\vec{p}$ *y* $\vec{v}$ *linealmente independientes.*

Por tanto la solución del SL no homogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene la forma:
$\vec{x} = \vec{p} + x_3\vec{v}$ *con* $x_3 \in \mathbb{R}$ *o* $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\ \vec{v}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$.

El vector $\vec{v}$ es el mismo que encontramos en la resolución del correspondiente SL homogéneo (con la misma A). En efecto, por ser A la misma matriz, ya sabíamos a priori que la dependencia paramétrica iba a ser igual a la del apartado I.

Tomando $x_3 = 0$ (o $\alpha = 0$) nos queda que $\vec{p}$ es una solución particular del SLNH $A\vec{x} = \vec{b}$.

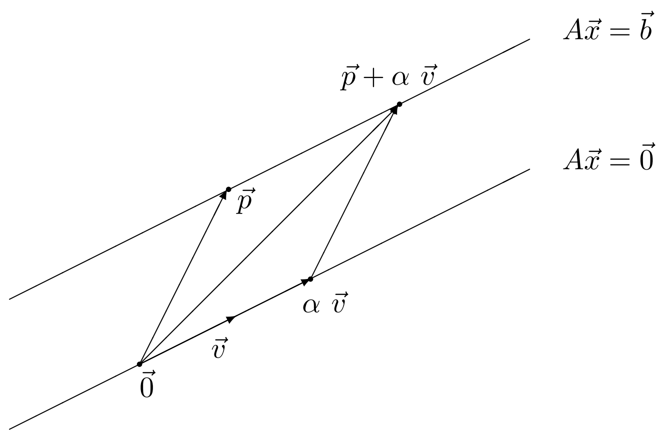
Se puede observar que la solución del SLNH es la suma de un vector constante no nulo, $\vec{p}$, que es una solución particular del SLNH, y una parte paramétrica expresada por el término $\alpha\vec{v}$, que es precisamente la solución del correspondiente homogéneo.

Geométricamente el conjunto de soluciones es una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\vec{p}$ y que contiene la dirección $\vec{v}$. La nueva recta es paralela (estrictamente, es decir, que no se puede solapar) a la anterior, pues tiene la misma dirección $\vec{v}$. La nueva recta no puede contener $\vec{0}$ ya que $\vec{0}$ no puede ser solución: $A\vec{0} = \vec{0} \neq (7, -1, 4) = \vec{b}$.

Se puede entender que cada solución particular de $A\vec{x} = \vec{0}$ se traslada respecto del origen mediante un vector $\vec{p}$ para dar lugar a una solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Para cualquier sistema compatible $A\vec{x} = \vec{b}$, la solución se puede obtener sin más que sumar a un vector $\vec{p}$, solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$, la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$.

En la figura se describen geométricamente los lugares ocupados por las soluciones de los sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$ y $A\vec{x} = \vec{0}$. No hay ninguna solución común a ambos. La solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es igual a la recta solución de $A\vec{x} = \vec{0}$, trasladada por el vector $\vec{p}$, siendo $\vec{p}$ cualquier solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$.



Nótese en la última forma escalonada del SL [I] que dicho sistema se reduce a dos ecuaciones, siendo cada una de ellas la forma implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$ conteniendo el $(0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Esos dos planos se cortan en una recta que pasa por el origen, que es la solución del sistema.

La última forma escalonada del SL [II] produce dos planos similares en orientación pero que no contienen el $(0, 0, 0)$ (SLNH).

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_3 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Estos dos planos se cortan en una recta, paralela a la anterior (no pasa por el origen), y que es la solución del sistema.

Ejemplo 2.12. *Determina y describe geométricamente la solución de los sistemas:*

[I]: $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = a$

[II]: $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

$[I]$ *Es un sistema con una sola ecuación y tres incógnitas. No hace falta utilizar la notación matricial. Tomando x_1 como incógnita principal, y x_2, x_3 como parámetros libres*

$$x_1 = \frac{a + 3x_2 + 2x_3}{10}$$

por tanto, $x_1 = 0.1a + 0.3x_2 + 0.2x_3$, *y x_2, x_3 parámetros libres.*

La solución es:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1a + 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.1a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{p}} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} \qquad \textit{(con } x_2 \textit{ y } x_3 \textit{ parámetros libres)}$$

Toda solución del sistema se puede escribir como la suma de $\vec{p} = (0.1a, 0, 0)$ y una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. $\vec{p}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores linealmente independientes. Por ser los dos últimos linealmente independientes el conjunto de soluciones es un plano. El plano sólo contiene el punto $(0, 0, 0)$ si $a = 0$.

$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} + s\vec{v}$ $\quad [Ib]$
con $\vec{p} = (0.1a, 0, 0)$, $\vec{u} = (0.3, 1, 0)$ *y* $\vec{v} = (0.2, 0, 1)$.

La solución del sistema [II] es: $\vec{x} = t\vec{u} + s\vec{v}$ $[IIb]$, *con los mismos vectores* $\vec{u} = (0.3, 1, 0)$ *y* $\vec{v} = (0.2, 0, 1)$.

Cada una de las ecuaciones [I] y [II] es la ecuación de un plano en forma implícita. Las ecuaciones [Ib] y [IIb] pueden considerarse formas explícitas de los mismos planos, porque dan las componentes de sus puntos, en vez de la ecuación que verifican. Recordamos que estas ecuaciones para planos o para rectas (si solo tuviéramos el vector $\vec{u}$) se conocen más específicamente como forma vectorial paramétrica del plano o forma vectorial paramétrica de la recta.

2.10 Resolución de un SL con matriz de coeficientes invertible

2.10.1 Utilizando la inversa

Sea el sistema $A_n\vec{x}_{n\times 1} = \vec{b}_{n\times 1}$, con A cuadrada e invertible,

Premultiplicando por A^{-1} los dos miembros de la ecuación nos queda:

$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, por tanto $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Tenemos una única solución $\vec{x}$, que vendrá dada por la expresión anterior. Por tanto el SL $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier $\vec{b}$.

Se cumple el siguiente resultado general:

Teorema 2.3. *Sea A_n una matriz cuadrada de orden n, entonces A tiene inversa $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$.*

La propiedad 4 de la Sección 2.8 establece que el SL $A_n\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado si y solo si rg$A$=n, y efectivamente rg$A$ =n si y solo si la matriz es invertible.

Ejemplo 2.13. *Resuelve el sistema lineal con matriz ampliada:* $A^* = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right]$*, sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es:*

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Hay que resolver $A\vec{x} = \vec{b}$ *con* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ *y* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Utilizando $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Por tanto $\vec{x} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -34 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$

2.10.2 Método de Cramer

Consideremos el mismo sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, con A invertible de orden n, y siendo por tanto el SL compatible determinado.

Dados A y $\vec{b}$ denotamos $\quad A_i = [\ \vec{a}_1 \ \ \dots \ \ \underset{\text{col. } i}{\vec{b}} \ \ \dots \ \ \vec{a}_n\ ]$

A_i es la matriz que tiene en la columna i el vector $\vec{b}$ y las demás columnas como en A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{col. } i \end{array}$$

La solución única $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ puede obtenerse como: $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

Demostración:

$$A\vec{x} = \vec{b} \ \Rightarrow \ A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \ \Rightarrow \qquad \vec{x} = \frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|}\ \vec{b}$$

Desarrollándolo tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Fijándonos en la fila i, para despejar la incógnita x_i:

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n)$$

$x_i = \frac{1}{|A|} \times$ desarrollo del determinante de A_i por cofactores de la columna i.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Ejemplo 2.14. *Resolver el siguiente sistema por el método de Cramer.*

$$\begin{cases} x_1 \;\; - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\;\; 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_{x1}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_{x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_{x3}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_{x1}|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29 \qquad x_2 = \frac{|A_{x2}|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16 \qquad x_3 = \frac{|A_{x3}|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

2.11 Tratando múltiples valores de $\vec{b}$ en $A\vec{x} = \vec{b}$

Si queremos resolver un SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para dos valores $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$, es decir $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$ es un SL y $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ es el otro SL, podemos aplicar la eliminación gaussiana sobre una matriz ampliada con dos columnas a la derecha. Al llegar a la forma escalonada de esta matriz, usamos la primera columna de la derecha para obtener la solución $\vec{x}_1$ y la segunda para obtener $\vec{x}_2$.

```
1  3   2    4   5
1  4   4    7   7
1  7   8    8   9

1  3   2    4   5
0  1   2    3   2
0  4   6    4   4

1  3   2    4   5
0  1   2    3   2
0  0  -2   -8  -4

1  3   0   -4   1
0  1   0   -5  -2
0  0  -2   -8  -4

1  0   0   11   7
0  1   0   -5  -2
0  0  -2   -8  -4
```

Para $A\vec{x} = \vec{b_1}$ la solución es $\vec{x_1} = \cancel{(4, -5, 11).}$ $\boxed{(11,-5, 4)}$

Para $A\vec{x} = \vec{b_2}$ la solución es $\vec{x_2} = \cancel{(2, -2, 7).}$ $\boxed{(7, -2, 2)}$

Hemos resuelto la ecuación matricial siguiente:

$A\ X = B$

Con $X = [\vec{x_1}\ \vec{x_2}]$ y $B = [\vec{b_1}\ \vec{b_2}]$

$A\ [\ \vec{x_1}\ \vec{x_2}\ ] = [\ A\vec{x_1}\ A\vec{x_2}\ ] = [\ \vec{b_1}\ \ \vec{b_2}\ ]$

2.12 Ejercicios

Ejercicio 2.1. *Discute y resuelve si es posible los siguientes sistemas, utilizando eliminación gaussiana. (Presenta la solución en forma vectorial paramétrica).*

$$a)\begin{cases} x + 2y - 3z + t = 2 \\ 2x - y - z - t = 1 \\ -x + y + 2z - t = 0 \\ 3x + 2y - 4z - 3t = 1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x + 2y - 3z - 16t = 4 \\ y + 2z - 3t = 6 \\ -x - y + z + 9t = -2 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + 3y - 4z + 2t = 0 \\ 3x + z - t = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.2. *Obtén la solución general, en forma vectorial paramétrica, del sistema lineal* $A\vec{x} = \vec{b}$, *con* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & -2 \end{bmatrix}$ *y* $\vec{b} = (3, 5, 8, 12)$. *Obtén la solución general, también en forma vectorial paramétrica, del correspondiente sistema homogéneo (la misma* A *y* $\vec{b} = \vec{0}$*).*

Ejercicio 2.3. *Resuelve por el método de eliminación gaussiana los siguientes sistemas. Nótese como los tres sistemas tienen la misma matriz de coeficientes* A.

$$a)\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ x + y + 2t = 8 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ x + y + 2t = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

Justifica si el vector $\vec{b}_1 = (7, 8, 10, 0)$ *puede expresarse o no como combinación lineal de las columnas de* A. *Haz lo mismo para el vector* $\vec{b}_2 = (7, 5, 10, 0)$.

Ejercicio 2.4. *Calcula* a *para que el siguiente sistema admita solución distinta de la trivial y resolverlo.*

$$\begin{cases} (1 + a)x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y - az = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.5. *Discute y resuelve si es posible, el siguiente sistema, según los valores de* k.

$$\begin{cases} (k + 5)x + (2k - 1)y - z = 0 \\ x + (k - 2)y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.6. *Clasifica los sistemas lineales con las matrices ampliadas siguientes como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, en función de los parámetros a y b. Cuando un caso no se pueda dar escribe "nunca". Cuando un caso se dé siempre, independientemente del valor de a y b escribe "siempre". Para los casos en los que obtengas varios valores de parámetros, únelos explícitamente utilizando la conjunción pertinente "y" u "o" (las comas no valen).*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2b & b-1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right] \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right] \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right] \qquad \begin{cases} \text{Compatible determinado.......................} \\ \text{Compatible indeterminado....................} \\ \text{Incompatible...} \end{cases}$$

Ejercicio 2.7. *Estudia el tipo de solución en función del parámetro a*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a\,x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + a\,x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.8. *Estudia el tipo de solución en función del parámetro λ*

$$\begin{cases} \lambda\,x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 + x_2 + \lambda\,x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + 2\,\lambda\,x_3 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.9. *Clasifica el siguiente sistema lineal en función del parámetro a.*

$$\begin{cases} -\ x_1 \ -\ 2\,x_2 \ +\ a\,x_3 \ =\ a \\ 2\,x_1 \ -\ a\,x_2 \ +\ 2\,x_3 \ =\ -2 \\ x_1 \ +\ 2\,x_2 \ +\ 4\,x_3 \ =\ 3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: ....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: ....

El sistema es incompatible si y sólo si: ....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí.

Ejercicio 2.10. *En el siguiente sistema lineal estudia el rango de la matriz de coeficientes A y el rango de la matriz ampliada A^* en función del parámetro a, y clasifica el sistema en base a esos rangos, cubriendo toda la información indicada en la tabla.*

Usa una fila de la tabla para cada par de valores posible de los rangos (rgA, rgA*). Asegúrate de que no existe solapamiento en los valores de a entre filas distintas.

Si das más de una condición para el parámetro a utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -ax + y + z + t = 2 \\ x - ay + z + t = 3 \\ x + y - az + t = 4 \\ x + y + z - at = 5 \end{cases}$$

Valores de a	*rango A*	*rango A^**	*Tipo de sistema en cuanto a solución*

Ejercicio 2.11. *Clasifica en función del parámetro a el sistema lineal de matriz ampliada*

$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \mid 1 \\ 2 & 1 & 3 & \mid 0 \\ 1 & 2 & a & \mid 3 \\ 1 & 1 & a & \mid a \end{bmatrix}$, *rellenando una tabla similar a la del ejercicio anterior.*

Una forma escalonada por filas de esta matriz fue obtenida ya en el Tema 1 de Matrices y Determinantes (Lección 6, Ejercicio 6.4 Matriz D, con la solución presentada). Aquí las filas que tienen parámetros ya están situadas en la parte inferior.

La forma escalonada que habíamos obtenido era:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)*(3-a) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.12. *Considera el sistema lineal de matriz ampliada* $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \mid 1 \\ 2 & 1 & 4 & \mid 0 \\ 1 & 2 & a & \mid 5 \\ 1 & 1 & a & \mid a \end{bmatrix}$

Mediante eliminación gaussiana obtén la matriz ampliada B^* de un sistema lineal equivalente, de forma que B^* cumpla:

$b^*_{21} = 0$, $b^*_{31} = 0$, $b^*_{32} = 0$, $b^*_{41} = 0$, $b^*_{42} = 0$ *y* $b^*_{43} = 0$,

B^* :

Estudia, en función del parámetro a, <u>el rango de la matriz de coeficientes A</u> y <u>el rango de la matriz ampliada A^*</u>, basándote en el apartado anterior. Clasifica el sistema en base a esos rangos, cubriendo toda la información indicada en la tabla.

Usa una fila de la tabla para cada par de valores posible de los rangos (rgA, rgA). Asegúrate de que no existe solapamiento en los valores de a entre filas distintas.*

Si das más de una condición para el parámetro a utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Valores de a	*rango A*	*rango A^**	*Tipo de sistema en cuanto a solución*

Ejercicio 2.13. *Calcula a para que sea compatible el siguiente sistema y resuélvelo.*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 5 \\ 2x - y = 8 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.14. *Determina a y b para que el vector $(1,0,a,b)$ pueda expresarse como combinación lineal de $(1,4,-5,2)$ y $(1,2,3,-1)$.*

Ejercicio 2.15. *Considera la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Encuentra a simple vista una solución de $A\vec{x} = \vec{0}$ que no sea la solución $\vec{0}$, teniendo en cuenta que solución es el par de coeficientes (α, β) tal que la combinación $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ es igual a $(0,0,0)$, siendo $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ las columnas de A.

b) Encuentra la solución general basándote en el resultado anterior.

Ejercicio 2.16. *Determina si las siguientes rectas tienen un punto de intersección común: $2x_1 + 3x_2 = -1$, $6x_1 + 5x_2 = 0$ y $2x_1 - 5x_2 = 7$. En caso afirmativo obtén las coordenadas de dicho punto.*

Ejercicio 2.17. *Determina si las siguientes rectas tienen un punto de intersección común: $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$ y $-x_1 - 3x_2 = 4$. En caso afirmativo obtén las coordenadas de dicho punto.*

Ejercicio 2.18. *En $\mathbb{R}^3$ se consideran los planos $\Pi_1 : 2x - 2y + az = 0$ y $\Pi_2 : -3x + 3y + 3z = 0$, donde a es un parámetro. Determina el lugar geométrico de la intersección de los mismos en función del parámetro a.*

Ejercicio 2.19. *Se desea construir modularmente un edificio. El reparto de viviendas en cada planta se escogerá de uno de los tres planes posibles. Cada planta del Plan A tiene 3 viviendas de 3 habitaciones, 7 de dos habitaciones y 8 de una habitación. Cada planta del Plan B tiene 4 viviendas de 3 habitaciones, 4 de 2 habitaciones y 8 de una habitación. Cada planta del Plan C tiene 5 viviendas de 3 habitaciones, 3 de 2 habitaciones y 9 de una habitación.*

a) ¿ Que interpretación darías al vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ *?*

b) Escribe una combinación lineal de vectores que exprese el total de viviendas de 3, 2 y 1 habitaciones del edificio.

c) ¿ Es posible diseñar un edificio con exactamente 66 viviendas de 3 habitaciones, 74 de dos habitaciones y 136 de una habitación?. En caso afirmativo, ¿ hay más de una forma?. Explica la respuesta.

Sol.:

a) $\vec{x} = (3, 7, 8)$ *es la distribución de viviendas de 3, 2 y 1 habitaciones, por este orden, en la planta del plan A.*

b) $x_A \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + x_B \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + x_c \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$*, siendo:*

x_A*: número de plantas del plan A en el edificio*

x_B*: número de plantas del plan B en el edificio*

x_C*: número de plantas del plan C en el edificio*

por tanto $x_A + x_B + x_C$ *es el total de plantas del edificio*

x_3*: número de viviendas de 3 habitaciones en el edificio*

x_2*: número de viviendas de 2 habitaciones en el edificio*

x_1*: número de viviendas de una habitación en el edificio*

c) Será posible diseñar el edificio con la distribución pedida si el sistema lineal siguiente tiene solución (x_A, x_B, x_C) *siendo* x_A*,* x_B*,* x_C *números pertenecientes al conjunto de los números naturales con el cero incluido. Efectivamente el número de plantas de un tipo sólo puede ser un número natural, y el natural cero correspondería a la no existencia de plantas de ese tipo.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & | & 66 \\ 7 & 4 & 3 & | & 74 \\ 8 & 8 & 9 & 1 & 136 \end{bmatrix} \sim ... \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 13/8 & | & 15 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$x_A = 2 + 1/2\ x_C$

$x_B = 15 - 13/8\ x_C$

En la primera ecuación el requisito de que x_A *sea natural implica que* x_C *ha de ser par (cero incluido).*

En la segunda ecuación el requisito $x_B \geq 0$ *implica los siguientes resultados:*

$15 \geq 13/8\ x_C \Rightarrow 120 \geq 13\ x_C \Rightarrow 120/13 \geq x_C \Rightarrow 9.23099 \geq x_C$

Los valores de x_C *pares y menores que 9.23 son 0,2,4,6 y 8. Pero añadido el requisito de que 13/8* x_C *sea natural (para que* x_B *lo sea) implica que sólo valen las soluciones* $x_C = 0$ *y* $x_C = 8$*.*

Sustituyendo estos dos valores tenemos las dos soluciones posibles:

$(x_A, x_B, x_C) = (2, 15, 0) \qquad (x_A, x_B, x_C) = (6, 2, 8)$

Ejercicio 2.20. *Considera el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada:*

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & | \; b_1 \\ 4 & 7 & -4 & | \; b_2 \\ -6 & -3 & 1 & | \; b_3 \end{bmatrix}$$

a) ¿ Es el sistema lineal compatible para todo $\vec{b}$?. Razona la respuesta.

b) En caso de que la respuesta sea negativa, encuentra una ecuación que incluya a b_1, b_2 y b_3, y que permita que el sistema sea compatible.

Ejercicio 2.21. *Supón que la matriz de coeficientes de un SL es de orden 3×5 y tiene 3 columnas pivotales. Explica por qué el sistema es compatible.*

Ejercicio 2.22. *Continúa la frase: "Si un sistema lineal es compatible, entonces la solución es única si y sólo si ...."*

Ejercicios con MATLAB

Ejercicio 2.23. *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & - & 5t & = & 1 \\ 3x & + & 3y & & & + & 3t & = & 3 \\ 3x & + & 4y & + & z & - & 4t & = & 2 \end{array} \right.$ *, halle:*

a) La solución general.

b) La solución particular con valores $z = 1$ y $t = -2$.

c) La solución general del correspondiente sistema homogéneo.

Ejercicio 2.24. *Clasifique el sistema de ecuaciones lineales siguiente en función de los valores de a y b:*

$$\begin{cases} 2.1x - 1.1y + 8z = 26 \\ 1.2x - 0.9y + 9z = 21 \\ 3.5x - 1.2y + az = b \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: ....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: ....

El sistema es incompatible si y sólo si: ....

Indique "siempre" o "nunca" si procediese.

Ejercicio 2.25. *Dado un conjunto de datos experimentales* (x_i, y_i) *con* i *desde 1 hasta* n *y tales que* $x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$*, llamamos* **polinomio interpolador** *de esos datos al polinomio de menor grado cuyo gráfico pasa por todos los puntos. En trabajos científicos un polinomio de este tipo puede usarse, por ejemplo, para estimar valores entre puntos conocidos, y de ahí su nombre de polinomio interpolador.*

Veamos que dicho polinomio es único y que su grado es menor o igual que $n-1$.

Consideremos la expresión general de un polinomio de grado $n-1$*. Por cumplir todos los puntos la ecuación del polinomio tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases},$$

con matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 1 & x_3 & {x_n}^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$

Esta matriz es la llamada matriz de Vandermonde de orden n*, y* <u>*la primera parte del ejercicio*</u> *es precisamente demostrar que si* $x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$*, la matriz tiene rango* n*. Al ser cuadrada de orden* n *y rango completo, el SL es compatible determinado. Por tanto obtendremos una solución única* $(a_o, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$*. El grado del polinomio lo determinará el mayor coeficiente no nulo. En efecto, aunque el modelo que estamos usando es un polinomio de grado* $n-1$*, los polinomios de menor grado están incluidos en el modelo, y simplemente tienen los coeficientes más altos nulos.*

Por ejemplo si tenemos $n = 3$ *y los tres puntos están alineados y con pendiente no nula el polinomio interpolador que deduciremos será de orden 1 (recta), y si además de estar alineados tienen pendiente nula, entonces el polinomio es de orden 0 (y = constante).*

Si consideráramos un polinomio de grado $t > n-1$*, tendríamos una columna más por cada grado que aumentamos, mientras que la matriz* A *sigue teniendo rango* n*, igual al número de ecuaciones, por tanto el sistema pasa a ser indeterminado, con infinitos polinomios de grado menor o igual que* t *que pasan por los puntos.*

<u>*La segunda parte del ejercicio*</u> *es encontrar el polinomio interpolador* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *para los datos (1,12), (2,15), (3,21). Es decir, encontrar los* a_0, a_1, a_2*, tales que:*

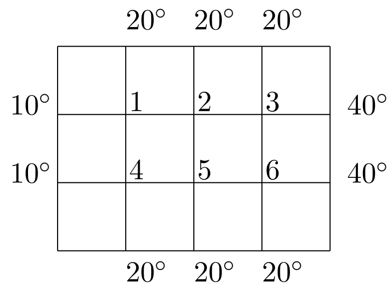
$$\begin{cases} a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 = 12 \\ a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 = 15 \\ a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 = 21 \end{cases}$$

Matlab tiene una función que dados los valores x_1, x_2, $\ldots$, x_n*, permite obtener su matriz de Vandermonde. Es la función* **vander***. Está definida con las potencias más altas a la izquierda, por lo que hay que transformar la matriz obtenida utilizando la función* **fliplr***.*

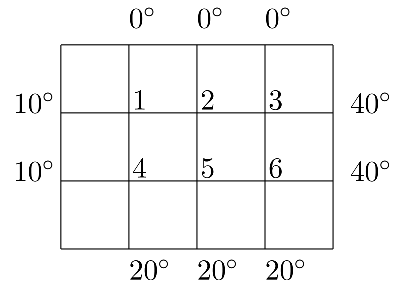
```
x=[1 2 3]'; pp=vander(x);
A=fliplr(pp)

     1     1     1
     1     2     4
     1     3     9
```

Ejercicio 2.26. *Estudie como los cambios en las temperaturas de los bordes de una placa de acero afectan a las temperaturas de los puntos interiores de la placa.*
Para ello determine las temperaturas $T_1, T_2, \ldots, T_6$ *de los 6 nodos interiores de las placas a) y b) representadas, aproximando el valor de* T_k *como la media de la temperatura de los 4 nodos más cercanos. Por ejemplo en la placa a) tendríamos como primera ecuación:*

$$T_1 = \frac{(10 + 20 + T_2 + T_4)}{4} \qquad \textit{que reescribiríamos como } 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$$



a)



b)

Temper.	Placa a)	Placa b)
T_1		
T_2		
T_3		
T_4		
T_5		
T_6		

La matriz de coeficientes A del SL obtenido en los dos casos es de **diagonal dominante estrictamente**, al ser una matriz cuadrada que cumple que en cada fila el valor absoluto del elemento de la diagonal principal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de los restantes elementos de la fila.

Matemáticamente se expresa la condición para A_n como:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Existe un teorema, cuya demostración no se presenta en este manual, que afirma que toda matriz A de diagonal dominante estrictamente tiene inversa.