Lección 5

Equivalencia de matrices

5.1 Operaciones elementales

Efectuamos una **operación elemental** sobre una línea (fila o columna) de la matriz $A_{m\times n}$, cuando realizamos una de estas tres operaciones:

a) Multiplicar la línea i (fila o columna) por un escalar $\alpha \neq 0$. También se denomina escalamiento.

b) Sumar a la línea i la j (paralela a ella) multiplicada por un escalar cualquiera. También se denomina reemplazamiento. La línea i es la "transformada" y la línea j la "auxiliar".

c) Intercambiar entre sí las líneas i y j (intercambiar dos filas entre sí o dos columnas entre sí). También se denomina trasposición o permutación.

Cuando se realiza una operación elemental sobre una fila también puede decirse que se realiza una operación elemental "por filas", y análogamente para las columnas.

Con frecuencia abreviaremos "operación elemental" como o.e.

A lo largo del curso se utilizarán las operaciones elementales por filas fundamentalmente para resolver sistemas de ecuaciones, para calcular rangos, y para simplificar la obtención de determinantes. Para esta última tarea se podrá recurrir además a las operaciones elementales por columnas.

Notación de las o.e.: (ilustrada con ejemplos)

$F_{13(-4)}$	a la fila 1 se le suma la 3 multiplicada por -4
F_{13}	se intercambian las filas 1 y 3
$F_{1(7)}$	la fila 1 se multiplica por 7

$C_{13(-4)}$	a la columna 1 se le suma la 3 multiplicada por -4
C_{13}	se intercambian las columnas 1 y 3
$C_{1(7)}$	la columna 1 se multiplica por 7

<u>Ejemplo:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido $F_{21(-1)}$

<u>Ejemplo:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada ha sido C_{12}

<u>Ejemplo:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{C_{12}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{21(-2)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B$

Las operaciones elementales realizadas han sido primero C_{12} y seguidamente $F_{21(-2)}$

<u>Ejemplo de operación que no es operación elemental:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & a \\ a & 2a \end{bmatrix} = B$

La operación realizada de multiplicar la primera fila por a no es una operación elemental, porque si $a = 0$ la operación no es válida.

<u>Ejemplo de operación que sí es operación elemental:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada es $F_{21(-a)}$

En las operaciones de reemplazamiento podemos utilizar cualquier escalar a.

<u>Ejemplo:</u> $A = \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ a & 2a & a+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} = B$

La operación elemental realizada es $F_{21(-1)}$.

5.2 Operaciones elementales inversas

Se llama **inversa de una operación elemental** a una operación elemental que cancela el efecto de la primera; es decir, si después de realizar una operación elemental sobre A se efectúa la operación elemental inversa se obtiene de nuevo la matriz original A.

La inversa de una o.e. por filas (columnas) es una o.e. por filas (columnas).

La inversa de $F_{i(\alpha)}$ es $F_{i(1/\alpha)}$	La inversa de $C_{i(\alpha)}$ es $C_{i(1/\alpha)}$
La inversa de $F_{ij(\alpha)}$ es $F_{ij(-\alpha)}$	La inversa de $C_{ij(\alpha)}$ es $C_{ij(-\alpha)}$
La inversa de F_{ij} es F_{ij}	La inversa de C_{ij} es C_{ij}

5.3 Matrices elementales

Se define **matriz elemental** como aquella matriz cuadrada de orden n que se obtiene al efectuar una operación elemental sobre una línea (fila o columna) de la matriz identidad de orden n.

Ejemplos de matrices elementales de orden 3:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_{1(3)}} \begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = E_{F_{1(3)}} \quad \text{Se multiplica la 1}^{\text{a}} \text{ fila por 3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(-2)}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix} = E_{F_{31(-2)}} \quad \text{Se suma a la 3}^{\text{a}} \text{ fila la 1}^{\text{a}} \text{ por } -2$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = E_{F_{23}} \quad \text{Se intercambia fila 2}^{\text{a}} \text{ con fila 3}^{\text{a}}$$

Con frecuencia para <u>simplificar la notación</u> se designan las matrices elementales como las operaciones elementales asociadas. Para los ejemplos anteriores la notación simplificada de las matrices elementales sería: F_{23}, $F_{1(3)}$ y $F_{31(-2)}$

Para las mismas o. e., pero por columnas, las correspondientes matrices elementales serían: C_{23}, $C_{1(3)}$ y $C_{13(-2)}$

Fijándonos en los ejemplos anteriores observamos la siguiente <u>**relación entre matrices elementales por filas y por columnas:**</u>

$F_{1(3)} = C_{1(3)}$	son iguales
$F_{31(-2)} = C_{13(-2)}$	las líneas transformada y auxiliar aparecen intercambiadas.
$F_{23} = C_{23}$	son iguales

Este patrón es válido para cualquier orden n, para cualquier par de índices i, j y para cualquier escalar α (no nulo en el caso del escalamiento).

$F_{i(\alpha)} = C_{i(\alpha)} \qquad F_{ij\ (\alpha)} = C_{ji\ (\alpha)} \qquad F_{ij} = C_{ij}$

5.4 Inversa de una matriz elemental

- Toda matriz elemental tiene inversa, y la inversa de una matriz elemental es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental inversa.

  La inversa de $F_{i(\alpha)}$ es $F_{i\ (1/\alpha)}$

  La inversa de $F_{ij\ (\alpha)}$ es $F_{ij\ (-\alpha)}$

  La inversa de F_{ij} es F_{ij}

$F_{i(\alpha)}\ F_{i\ (1/\alpha)} = I$ $F_{i(1/\alpha)}\ F_{i(\alpha)} = I$
$F_{ij\ (\alpha)}\ F_{ij\ (-\alpha)} = I$ $F_{ij\ (-\alpha)}\ F_{ij\ (\alpha)} = I$
$F_{ij}\ F_{ij} = I$

  Ejemplos:

$$E_{F_{1(1/3)}} E_{F_{1(3)}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{31(2)}} E_{F_{31(-2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{F_{23}} E_{F_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- El mismo desarrollo se aplicaría a las operaciones elementales por columnas.

5.5 Operación elemental sobre A como producto de A por matriz elemental

• Sean una matriz $A_{m\times n}$ y la matriz elemental F_m correspondiente a determinada o. e. por filas; entonces la matriz $B_{m\times n}$ que resulta de efectuar dicha o. e. sobre $A_{m\times n}$ es igual al producto $F_m A_{m\times n}$.

• Sean una matriz $A_{m\times n}$ y la matriz elemental C_n correspondiente a determinada o. e. por columnas; entonces la matriz $B_{m\times n}$ que resulta de efectuar dicha o. e. sobre $A_{m\times n}$ es igual al producto $A_{m\times n}C_n$.

Resumimos así el resultado anterior:

$$A \underset{\text{o.e.f } F}{\longrightarrow} B \;\Rightarrow\; B = F\,A \qquad F \text{ multiplica por la izda (pre-multiplica)}$$

$$A \underset{\text{o.e.c. } C}{\longrightarrow} B \;\Rightarrow\; B = A\,C \qquad C \text{ multiplica por la dcha (post-multiplica)}$$

<u>Ejemplo 1:</u> A partir de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ queremos obtener la matric B que tiene <u>intercambiadas las filas 2 y 4</u>. Determina la matriz elemental F tal que $F.A = B$

F es 4×4, pues A tiene 4 filas. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, <u>sumar a la 2ª fila la 1ª multiplicada por (-2)</u> utilizando el producto por una matriz elemental.

F es 3×3, pues A tiene 3 filas.

$F_{21(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz elemental que resulta de sumarle a la fila 2ª de I_3, la 1ª multiplicada por (-2).

$$F_{21(-2)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coincide con el resultado obtenido al sumar a la 2^a fila de A la 1^a multiplicada por (-2), es decir, al efectuar $F_{21(-2)}$ sobre A.

<u>Ejemplo 3:</u> Dada $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, <u>intercambiar las columnas 1 y 3</u> utilizando el producto por una matriz elemental.

$C_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.6 Definición de matrices equivalentes

Se dice que $A_{m\times n}$ es **equivalente** a $B_{m\times n}$, $A \sim B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales.

Se dice que $A_{m\times n}$ es **equivalente por filas** a $B_{m\times n}$, $A \sim_f B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales por filas.

Se dice que $A_{m\times n}$ es **equivalente por columnas** a $B_{m\times n}$, $A \sim_c B$, si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de operaciones elementales por columnas.

Observaciones:

- $A \sim_f B \Rightarrow A \sim B$ pero no al revés
- $A \sim_c B \Rightarrow A \sim B$ pero no al revés

La condición de equivalencia por filas y la condición de equivalencia por columnas son "más fuertes" (más restrictivas) que la condición de equivalencia.

Ejemplos:

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ no son equivalentes por filas, no son equivalentes por columnas, y sí son equivalentes.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son equivalentes por filas (y por tanto equivalentes), pero no son equivalentes por columnas.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ son equivalentes por columnas (y por tanto equivalentes), pero no son equivalentes por filas.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ no son ninguna de ellas equivalente a la otra.

- Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son equivalentes, y además son tanto equivalentes por filas como equivalentes por columnas.

5.7 La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia

Desde el punto de vista de las relaciones entre los elementos de un conjunto, en este caso el conjunto de matrices $M_{m\times n}$, las relaciones de equivalencia que acabamos de definir, basándonos en las operaciones elementales, pertenecen a la clase de relaciones denominadas **“relaciones de equivalencia”**, puesto que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Lo justificamos a continuación para la equivalencia general.

<u>Reflexiva:</u> Podemos justificar que A es equivalente a A tomando por ejemplo la o.e. de multiplicar una fila por el escalar 1.

<u>Simétrica:</u> Si A es equivalente a B, B es equivalente a A. Se justifica realizando en el paso de B a A las o.e. inversas a las realizadas en el paso de A a B (en el orden inverso, pues primero se debe deshacer la última o.e., luego la penúltima y así sucesivamente).

A o.e. $1 \rightarrow ... \rightarrow$ o.e. $l \rightarrow B$, corresponde a que se cumpla la expresión siguiente:

$F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ \boldsymbol{A} \ C_1 \ C_2 \ ... \ C_b \ = \ \boldsymbol{B}$

Al ser las matrices elementales invertibles, su producto es invertible, por tanto:

$(F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ )^{-1}(F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ )\boldsymbol{A} \ C_1 \ C_2 \ ... \ C_b \ = \ (F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ )^{-1}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A} \ C_1 \ C_2 \ ... \ C_b \ = \ (F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ )^{-1}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A} \ (C_1 \ C_2 \ ... \ C_b) \ (C_1 \ C_2 \ ... \ C_b)^{-1} \ = \ (F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ )^{-1}\boldsymbol{B}(C_1 \ C_2 \ ... \ C_b)^{-1}$

$\boldsymbol{A} \ = \ (F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ )^{-1}\boldsymbol{B}(C_1 \ C_2 \ ... \ C_b)^{-1}$

Vemos que de B se llega a A mediante operaciones elementales, concretamente estas:

$\boldsymbol{A} \ = \ (F_1 \ )^{-1} \ (F_2)^{-1} \ ... \ (F_a)^{-1}\boldsymbol{B} \ (C_b)^{-1} \ ... \ (C_2)^{-1}(C_1)^{-1}$

<u>Transitiva:</u> Si A es equivalente a B, y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C.

A o.e. $1 \rightarrow ... \rightarrow$ o.e. $l \rightarrow B$ y B o.e. $l{+}1 \rightarrow ... \rightarrow$ o.e. $k \rightarrow C \quad \Rightarrow$

A o.e. $1 \rightarrow ... \rightarrow$ o.e. $l \rightarrow$ o.e. $l{+}1 \rightarrow ... \rightarrow$ o.e. $k \rightarrow C$

Las expresiones anteriores indican que si la secuencia de o.e. de 1 a l nos lleva de A a B, y la secuencia de $l+1$ a k de B a C, entonces la secuencia completa de 1 a l y de $l+1$ a k transforma A en C.

Para la equivalencia por filas las demostraciones de las propiedades reflexiva y transitiva son sencillas, con razonamientos similares a los anteriores. La demostración de que la relación es simétrica se obtiene igual que como se ha expuesto para la equivalencia general, pero sin tomar las matrices C_i. Análogamente para equivalencia por columnas, sin tomar las operaciones F_i.

5.8 Factorizaciones asociadas a equivalencia de matrices

$$A \underset{\text{def}}{\sim} B \;\Leftrightarrow\; F_a \ldots F_2\, F_1\, \boldsymbol{A}\, C_1\, C_2 \ldots C_b \;=\; \boldsymbol{B} \;\Leftrightarrow\; (F_1)^{-1}(F_2)^{-1} \ldots (F_a)^{-1}\, \boldsymbol{B}\, (C_b)^{-1} \ldots (C_2)^{-1}(C_1)^{-1} \;=\; \boldsymbol{A}$$

Denotando $F = F_a\ \ldots\ F_2\ F_1$, y $C = C_1\ C_2\ \ldots\ C_b$, tenemos las factorizaciones de los tres tipos de equivalencia.

- **Equivalencia**

  $A \sim B \;\Rightarrow\; \exists F, C$ invertibles tales que $\boldsymbol{FAC = B}$

  (y en consecuencia $F^{-1}BC^{-1} = A$)

- **Equivalencia por filas**

  El caso particular en el que sólo se usen o.e. por filas corresponde a tomar $C = I$.

  $$A \sim_f B \;\Leftrightarrow\; F_a\ \ldots\ F_2\ F_1\ A \;=\; B \;\Leftrightarrow\; (F_1)^{-1}\ (F_2)^{-1}\ \ldots\ (F_a)^{-1}\ B \;=\; A$$

  $A \sim_f B \;\Rightarrow\; \exists F$ invertible tal que $\boldsymbol{FA = B}$

  (y en consecuencia $F^{-1}B = A$)

- **Equivalencia por columnas**

  El caso particular en el que sólo se usen o.e. por columnas corresponde a tomar $F = I$.

  $$A \sim_c B \;\Leftrightarrow\; A\ C_1\ C_2\ \ldots\ C_b \;=\; B \;\Leftrightarrow\; B\ (C_b)^{-1}\ \ldots (C_2)^{-1}\ (C_1)^{-1} \;=\; A$$

  $A \sim_c B \;\Rightarrow\; \exists C$ invertible tal que $\boldsymbol{AC = B}$

  (y en consecuencia $BC^{-1} = A$)

La factorización $FAC = B$ se expresa con frecuencia utilizando los nombres P y Q para las matrices F y C, es decir $PAQ = B$. La razón es que F y C son matrices invertibles y los nombres P y Q son los que se suelen utilizar en Álgebra para designar matrices invertibles.

TRES CONCLUSIONES IMPORTANTES SOBRE FACTORIZACIÓN:

$A \sim B$ implica que existen P y Q invertibles tales que $B = PAQ$.
$A \sim_f B$ implica que existe P invertible tal que $B = PA$.
$A \sim_c B$ implica que existe Q invertible tal que $B = AQ$.

5.9 Equivalencia $A \sim I$ y relación con el carácter invertible de A

1. Para el caso particular de matrices cuadradas, $FAC = B$ indica que si A es invertible, entonces también lo es B (el producto de invertibles es invertible). Si A no es invertible, entonces, por ser $A = F^{-1}BC^{-1}$, B no puede ser invertible (si B fuera invertible A sería invertible por ser producto de invertibles, incurriendo en una contradicción). Por tanto $\underline{A \sim B \Rightarrow \text{implica que ambas son invertibles o que no lo es ninguna}}$.

2. Una consecuencia del resultado anterior es que $\underline{A \sim I \Rightarrow A \text{ invertible}}$, ya que la identidad lo es.

3. $A \sim I \Rightarrow$ A equivalente por filas a I y A equivalente por columnas a I.

   Demostración: $FAC = I \Leftrightarrow A = F^{-1}IC^{-1} = F^{-1}C^{-1} = F_1...F_k = C_1...C_k = F_1...F_kI = IC_1...C_k$.

   k es el número total de operaciones elementales.

   En las secciones 5.3 y 5.4 vimos que las inversas de matrices elementales de filas son matrices elementales de filas, que las inversas de las matrices elementales de columnas son matrices elementales de columnas y que toda matriz elemental de filas es igual a una matriz elemental de columnas y al revés, en particular: $F_{ij} = C_{ij}$ $\quad F_{i(\alpha)} = C_{i(\alpha)}$ $\quad F_{ij\ (\alpha)} = C_{ji\ (\alpha)}$.

   Por eso la expresión $A = F^{-1}C^{-1}$ anterior ha podido escribirse en cualquiera de las dos formas siguientes:

   - $A \;=\; F^{-1}C^{-1} = F_1 \;...\; F_k \;=\; F_1 \;...\; F_k \; I$
   - $A \;=\; F^{-1}C^{-1} = C_1 \;...\; C_k \;=\; I \; C_1 \;...\; C_k$

   $A \;=\; F_1 \;...\; F_k \; I$ expresa que A es equivalente por filas a I, y $A \;=\; I \; C_1 \;...\; C_k$ que A es equivalente por columnas a I.

4. $A \sim I \Leftrightarrow A$ es producto de matrices elementales.

   Demostración: Del resultado anterior se concluye la implicación directa. La implicación inversa se deduce sin más que escribir $A = E_1...E_k = \begin{cases} F_1...F_kI \\ IC_1...C_k \end{cases}$.

5. A producto de elementales $\Rightarrow$ A es invertible (pues el producto de invertibles es invertible).

   Esta propiedad también se podría haber deducido combinando los resultados de los apartados 4 y 2.

Resumen de las propiedades de 2 a 5:

$$\begin{array}{ccccccc} A \sim I & \Leftrightarrow & A \sim_f I & \Leftrightarrow & A \sim_c I & \Leftrightarrow & A \text{ producto de elementales} \\ \Downarrow & & & & & & \\ A \text{ invertible} & & & & & & \end{array}$$

Queda pendiente la implicación vertical hacia arriba.

Lección 6

Forma escalonada por filas de una matriz

6.1 Definición de forma escalonada por filas y de forma escalonada reducida por filas

Partiendo de cualquier matriz $A_{m\times n}$ se puede llegar mediante un número finito de o.e. por filas a una matriz $U_{m\times n}$ escalonada, y a ésta se le denomina **forma escalonada por filas de** A. Existen infinitas formas escalonadas por filas de una matriz dada A.

$$A \ \sim_f \ U_{esc\ filas}$$

El proceso de obtener una forma escalonada por filas de una matriz se denomina "eliminación gaussiana".

Nótese que por ser U una forma escalonada por filas de A, se tiene: $U = F_a \ ... \ F_2 \ F_1 \ A$, siendo F_i la matriz elemental correspondiente a cada o.e. realizada. La expresión de U puede simplificarse como $U = PA$, siendo $P = F_a \ ... \ F_2 \ F_1$ (P invertible).

Se denomina **forma escalonada reducida por filas de una matriz** A a la forma escalonada por filas de A que tiene pivotes unidad y ceros encima de los elementos pivote. <u>La forma escalonada reducida por filas de una matriz A dada es única</u>. En general utilizaremos para esta matriz las notaciones $A_{red\ filas}$ o $U_{red\ filas}$.

El proceso de obtener la forma reducida a partir de la forma escalonada se le denomina "eliminación de Gauss-Jordan".

Ejemplo de formas escalonadas y forma reducida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las dos primeras matrices a la derecha de A son formas escalonadas de A, y la tercera es la forma escalonada reducida de A.

Aplicando las propiedades simétrica y transitiva de la equivalencia por filas deducimos que <u>todas las matrices equivalentes por filas entre sí tienen la misma forma escalonada reducida por filas</u>. Expresamos este resultado como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} A \sim_f B \\ A \sim_f U_{red\ filas} \end{array}\right\} \Rightarrow B \sim_f U_{red\ filas}$$

Demostración:

$$A \sim_f B \quad \Rightarrow \quad B \sim_f A;$$

$$\left.\begin{array}{l} B \sim_f A \\ A \sim_f U_{red\ filas} \end{array}\right\} \Rightarrow B \sim_f U_{red\ filas}$$

Nótese que para cualquier matriz C se verifica que (se deduce con demostración similar):

$$\left.\begin{array}{l} A \sim_f B \\ A \sim_f C \end{array}\right\} \Rightarrow B \sim_f C$$

6.2 Obtención de la forma escalonada por filas mediante Eliminación Gaussiana Simple

Describimos a continuación un algoritmo para obtener a partir de $A_{m\times n}$ una forma escalonada por filas determinada. El método se denomina **Eliminación Gaussiana Simple** y el orden en el que se efectúan las operaciones elementales viene prefijado por un convenio. No se pueden realizar escalamientos. El intercambio de filas sólo se puede realizar para buscar un elemento pivote en la obtención de la forma escalonada, y se ha de realizar con la primera fila siguiente que sí posea pivote.

El algoritmo de **Eliminación Gaussiana Simple** consta de los siguientes pasos:

1) Partiendo de la izquierda, buscamos la 1^a columna con un elemento distinto de cero, llamémosla j_1. Esta columna j_1 es la primera columna pivotal. Si el primer elemento no nulo de j_1 (el de la fila más alta) no está en la 1^a fila se intercambian la primera fila y ésta. Este elemento no nulo, en la posición $(1\ ,\ j_1)$ es el primer elemento pivote. Mediante operaciones elementales convertimos los elementos de la primera columna pivotal que están debajo del elemento pivote, en ceros. La fila auxiliar utilizada es la 1^a fila. La operación elemental que elimina el elemento b es la de sumar a la fila que contiene el elemento b la fila auxiliar multiplicada por $(-b\ /\ primer\ pivote)$.

2) Moviéndonos hacia la derecha, a partir de la 1^a columna pivotal, buscamos la siguiente columna que tenga un elemento no nulo en la 2^a fila o siguientes. Esa columna j_2 será la segunda columna pivotal. Se realizará un intercambio de filas si este primer elemento no nulo no estuviera en la 2^a fila, para colocarlo precisamente en ésta. Este es el segundo elemento pivote. Además de esta operación elemental de intercambio a fin de que el elemento pivote se encuentre en la 2^a fila (posición $(2\ ,\ j_2)$), se realizarán las operaciones elementales necesarias para que todos los elementos de la columna pivotal, por debajo del pivote, sean ceros, utilizando como fila auxiliar la fila 2^a. Estas operaciones elementales no afectan a los elementos de las columnas situadas a la izquierda de j_2, ya que los elementos de la fila 2 a la izquierda de j_2 son todos nulos.

3) Seguimos moviéndonos hacia la derecha. Sea j_3 la siguiente columna que tiene un elemento no nulo, ahora en la 3^a fila o más abajo. Si es necesario intercambiaremos las filas para que, en la nueva matriz, la columna j_3 tenga en la fila 3 el primer elemento no nulo encontrado (tercer elemento pivote), y a continuación realizaremos las operaciones para transformar a ceros los elementos por debajo de él, utilizando la fila 3 como auxiliar.

4) Seguimos repitiendo el proceso hasta conseguir r columnas pivotales, $j_1, j_2 \dots, j_r$ y solamente ceros en las filas $r+1, r+2, ..., m$.

Al final de estos cuatro pasos habremos conseguido transformar la matriz A en una **forma escalonada por filas** de A.

Dada una matriz, *mediante el método de eliminación gaussiana simple se obtiene una única matriz en la forma escalonada por filas.* Esto es debido a que las operaciones elementales que se realizan y el orden en que se realizan están fijadas por el método.

Ejemplo: Obtén la forma escalonada por filas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mediante eliminación gaussiana simple.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{13}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{41(-1/2)}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1-1 & 4-3 & 5-4 & 0-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{52(-1/2)}}{\xrightarrow{F_{42(-1/2)}}\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1-1 & -2-3/2 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1-1 & 2-3/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \underset{F_{53(-1/2)}}{\xrightarrow{F_{43(7/2)}}\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{esc\ filas} = A_{EGS} \qquad A \sim_f A_{EGS}$$

Se obtienen 3 cols. pivotales: la 2ª, la 3ª y la 5ª. Los pivotes son 2, 2 y 1 respectivamente.

6.3 Propiedad fundamental de las formas escalonadas por filas

- Todas las formas escalonadas por filas de una matriz $A_{m\times n}$ tienen el mismo número de filas no nulas.
- Todas las formas escalonadas por filas de una matriz $A_{m\times n}$ tienen las columnas pivotales en las mismas posiciciones, y el número de ellas coincide con el número de filas no nulas.

Dada una matriz $A_{m\times n}$ distinguiremos en ella sus columnas pivotales y sus columnas no pivotales. La posición de sus columnas pivotales se determinará mediante la obtención de cualquier forma escalonada por filas de la matriz.

6.4 Rango de una matriz

Se denomina **rango** de una matriz $A_{m\times n}$ al número de columnas pivotales que tiene.

Propiedades:

• El rango coincide con el número de filas no nulas de cualquier forma escalonada por filas de la matriz.

• El rango ha de ser menor o igual que m y menor o igual que n.

• Todas las matrices equivalentes por filas entre sí tienen el mismo rango.
Nótese que el recíproco no se cumple. Ejemplo:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

• Un resultado muy importante que no vamos a demostrar es el siguiente: $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A^t$

• El rango de la matriz I_n es n, pues la matriz ya es escalonada por filas y tiene n filas no nulas (o lo que es lo mismo, n columnas pivotales).

  • Toda matriz equivalente por filas a la identidad tiene rango n.

Ejemplo 6.1. $\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{bmatrix}=2$, $\mathrm{rg}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\0 & 2 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=2$, $\mathrm{rg}\begin{bmatrix}4 & -1 & 1 & 2\\0 & -1 & 2 & -3\\0 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix}=3$

Ejemplo 6.2. *Determina el rango de la matriz* $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\2 & 4 & -1\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}$

Sol.:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\2 & 4 & -1\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}\underset{F_{21(-2)}}{\sim_f}\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\0 & -6 & -1\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}\underset{F_{32(-1/3)}}{\sim_f}\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\0 & -6 & -1\\0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad \mathrm{rg}A=3$$

Ejemplo 6.3. *Determina el rango de la matriz* $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\a & 2a\end{bmatrix}$ *en función de a.*

Sol.:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\a & 2a\end{bmatrix}\underset{F_{21(-a)}}{\sim_f}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & a\end{bmatrix}$$ *Si* $a\neq 0$ *el rango es 2 y si* $a=0$ *el rango es 1.*

Es importante darse cuenta de no cometer el error de efectuar las operaciones: fila primera por $-a$*, y fila segunda igual a ella misma más la primera. En efecto no puede hacerse porque la primera operación no es elemental (ver en página 29). Veamos la consecuencia de este error:*

Si de $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\a & 2a\end{bmatrix}$ *pasamos a* $\begin{bmatrix}-a & -a\\a & 2a\end{bmatrix}$*, con la siguiente operación elemental (sumar a la segunda fila la primera) obtenemos* $\begin{bmatrix}-a & -a\\0 & a\end{bmatrix}$*, que denotamos como* B*. Interpretando el rango en esta matriz* B*, que erróneamente tomamos como equivalente por filas a* A*, se deduciría:*

Si $a\neq 0$ *el rango es 2, y si* $a=0$ *el rango es 0. Nótese que para el caso* $a=0$ *el rango obtenido es erróneo.*

Ejemplo 6.4. *a) Justifica si las siguientes matrices son equivalentes por filas o no y si tienen el mismo rango o no. b) Justifica si son o no equivalentes por columnas.*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Sol.:

Las dos matrices están en forma escalonada y tienen el mismo número de filas no nulas, una, por tanto tienen el mismo rango, y su valor es 1.

Las matrices no son equivalentes por filas, porque ningún conjunto de operaciones elementales por filas permite llegar de una a la otra.

Las matrices son equivalentes por columnas, pues de la primera a la segunda se puede llegar aplicando las dos siguientes o.e. por columnas:

1) $C_{21(2)}$*, 2)* $C_{31(2)}$.

Ejemplo 6.5. *Determina el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ *en función de los valores de a.*

Sol.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} = B$$

Hemos llegado a una matriz B equivalente por filas a A en la que ya se puede estudiar el rango de forma sencilla.

- *Si $a \neq 3$ y $a \neq 1$ el rango es 4 ya que las cuatro columnas son pivotales. Indicamos los pivotes de las columnas 3 y 4 con el símbolo $\diamond$.*

  $$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \diamond & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \diamond \end{bmatrix}$$

- *Si $a = 3$ la tercera fila tiene todos los elementos nulos y la cuarta no, por lo que las intercambiamos, llegando a la siguiente escalonada por filas.*

  $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  El rango es 3 y las columnas pivotales son la primera, la segunda y la cuarta.

- *Si $a = 1$, obtenemos a partir de B la matriz:*

  $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  , que ya está escalonada. El rango es 3 y las columnas pivotales son la primera, la segunda y la tercera.

6.5 Obtención de la forma escalonada reducida a partir de una forma escalonada

La obtención de la escalonada reducida por filas a partir de una forma escalonada se realiza mediante la eliminación denominada de Gauss-Jordan o de reducción, realizando las operaciones elementales por filas necesarias para transformar en "unos" los elementos pivote y en "ceros" los elementos de las columnas pivotales situados por encima del elemento pivote.

Un procedimiento sistemático posible es el de escalar las filas no nulas, en primer lugar, a fin de que todos los pivotes tomen el valor 1, y seguidamente obtener los "ceros" por encima de los elementos pivote.

Denotando como $j_1, j_2 \ldots j_r$ las columnas pivotales de la matriz escalonada de orden $m \times n$, los pasos serían los siguientes:

1) Considerando la última fila no nula, que llamamos fila r, como auxiliar, y con las correspondientes operaciones elementales sobre las filas, consigamos mediante reemplazamientos que la columna j_r tenga ceros en las filas 1, 2, ..., $r-1$. Ninguna columna a la izquierda de j_r se verá afectada por estas operaciones, ya que los elementos de la fila r a la izquierda de la columna pivotal j_r son todos nulos.

2) Continuamos hacia arriba, en la fila $r-1$, donde a través de operaciones elementales, tomando la fila $r-1$ como fila auxiliar, haremos cero los elementos de la columna pivotal j_{r-1} en las filas 1, 2, ..., $r-2$. Continuamos con estas transformaciones para que cada columna pivotal j_i tenga ceros en las $i-1$ primeras filas, siempre disminuyendo i, hasta $i = 2$.

Con el proceso descrito se obtiene la **forma escalonada reducida por filas**.

Ejemplo: Obtén la forma escalonada reducida de la matriz A del ejemplo de la Sección 6.2 partiendo de la forma escalonada allí obtenida (calculada mediante Eliminación Gaussiana Simple).

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{2(1/2)}}{\overset{F_{1(1/2)}}{\longrightarrow\!\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{13(-2)}}{\overset{F_{23(-3/2)}}{\longrightarrow\!\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_{12(-3)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{red\ filas} \quad , \quad A \sim_f A_{red\ filas}$$

Las columnas pivotales son las mismas: la segunda, la tercera y la quinta. Los pivotes ahora son todos 1 y cada columna pivotal tiene ceros por encima de los elementos pivote.

6.6 Equivalencia por filas a la identidad: aplicación para obtener la inversa

Si A_n es equivalente por filas a la identidad A es invertible (página 37),

$$\text{En la factorización } \; F_a \dots F_2 F_1 \; A = I \tag{6.1}$$

$$\text{despejamos } A^{-1} \text{ cómo: } A^{-1} = F_a \dots F_2 F_1 \tag{6.2}$$

(sin más que multiplicar la ec. 6.1 por A^{-1} por la derecha)

$$\text{La última ecuación es igual a esta otra: } A^{-1} = F_a \dots F_2 F_1 I \tag{6.3}$$

Las ecuaciones (6.1) y (6.3) ponen de manifiesto el siguiente resultado: efectuando la misma secuencia de operaciones elementales por filas y en el mismo orden que llevan de A a I, la matriz I se transforma en A^{-1}.

El resultado determina un procedimiento para obtener la inversa de una matriz denominado método de Gauss-Jordan. El esquema es el siguiente:

$$\left[A \quad | \quad I\,\right] \;\longrightarrow\; \longrightarrow\; \dots \;\longrightarrow\; \longrightarrow\; \left[\,I \quad | \quad A^{-1}\right]$$

operaciones elementales por filas

El esquema con producto de matrices, denotando $F = F_a \dots F_2 F_1$, es el siguiente:

$$F\left[A \quad | \quad I\,\right] = \left[F\ A \quad | \; F\ I\right] = \left[\,I \quad | \; F\right] = \left[\,I \quad | \; A^{-1}\,\right]$$

Ejemplo 6.6. *Determina la inversa de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *por el método de Gauss-Jordan, si es que dicha inversa existe.*

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21(-2)} \\ F_{31(-2)}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{23}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{2(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{32(4)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Observamos que el rango es 3, igual al orden de la matriz A, por tanto A tiene inversa. La submatriz de la izquierda es ya triangular superior, pero falta hacer "1" uno de los pivotes.

$$\underset{F_{3(1/8)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{F_{23(-2)} \\ F_{13(-1)}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1-3/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2-3/2 & 0-1/4 & -1+1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/4 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array}\right]$$

*fila1 = fila1 - 2*fila2*

$$\underset{F_{12(-2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4-1 & -1/8+1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{array}\right]$$

Resultado: *La matriz inversa de A es* $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/4 & 3/8 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 3/4 & 1/8 & -1/2 \end{bmatrix}$

6.7 Ejercicios

Cuando se tiene una matriz en la que aparece una variable no puede usarse la función **rank** de MATLAB para calcular el rango de la matriz como función de la variable. Tampoco puede usarse la función **rref** para determinar la forma escalonada reducida general, que mantenga la dependencia correcta de la variable.

Ejercicio 6.1. *Calcula el rango de las siguientes matrices y las posiciones de sus columnas pivotales.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 11 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.2. *Obtén la forma escalonada reducida por filas de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 6.3. *Calcula, si existen, las inversas de las siguientes matrices, aplicando el método de Gauss-Jordan.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.4. *Determina el rango de las siguientes matrices, en función del parámetro que contienen:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 1 \\ 1 & s & s & 1 \\ 1 & 2 & s & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 1 & 3 & c & 0 & -3 \\ 0 & 1 & c & 2 & c \\ 0 & -1 & -1 & c & c \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Sol.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & 1 \\ 1 & s & s & 1 \\ 1 & 2 & s & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & s & 1 \\ 1 & 2 & s & 1 \\ 1 & s & s & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \underset{F_{32(1-s)}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $s = 2$ el rango es 2 y para $s \neq 2$ el rango es 3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 1 & 3 & c & 0 & -3 \\ 0 & 1 & c & 2 & c \\ 0 & -1 & -1 & c & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & c & -c & -2 \\ 0 & 1 & c & 2 & c \\ 0 & -1 & -1 & c & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & c & -c & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2+c & c+2 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 & c-2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & c & -c & -2 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 & c-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2+c & c+2 \end{bmatrix}$$

- *Si $c = -2$ rango 3 porque se anula la cuarta fila, pero no la tercera*
- *Si $c \neq -2$ rango 4 La cuarta fila produce pivote en la cuarta columna, y la fila tercera tiene pivote en la tercera columna si $c \neq 1$ y en la quinta si $c = 1$*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 0$ o $a = 1$ rango 3

Si $a \neq 1$ y $a \neq 0$ rango 4

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)*(3-a) \end{bmatrix}$$

Si $a = 3$ *o* $a = 1$ *rango 3*
Si $a \neq 1$ *y* $a \neq 3$ *rango 4*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

rg(E) = 1 nunca *rg(E) = 2 nunca*
rg(E) = 3 si y sólo si $k = 0$ *o* $k = -1$ *rg(E) = 4 si y sólo si* $k \neq 0$ *y* $k \neq -1$

Ejercicio 6.5. *Considerada la matriz* $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *obtén la matriz* F *tal que* $FA = U$ *siendo* U *la forma escalonada por filas de* A *que se obtiene mediante eliminación gaussiana simple.*

Sol:

1. *Escribimos* [A | I].

```
-1   -1    2    1    0    0
 1    0    1    0    1    0
 2    2    1    0    0    1
```

2. *Ejecutamos el algoritmo de eliminación gaussiana simple en la matriz* 3×6 *hasta que en la parte izquierda de la matriz nos quede la forma escalonada* U.

```
-1   -1    2    1    0    0
 0   -1    3    1    1    0
 0    0    5    2    0    1
```

Las operaciones a aplicar son dos: $F_1 = F_{21(1)}$ *y* $F_2 = F_{31(2)}$. *Por tanto* $F_2F_1A = U$. *Denotando* $F = F_2F_1$ *tenemos* $U = FA$, *que es la forma compacta de la factorización que relaciona* A *y* U.

En el bloque derecho de la matriz tendremos $F_2F_1I = F_2\ F_1 = F$, *por tanto este bloque nos permite determinar* F

Resumiendo: $U = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OBSERVACIÓN: Nótese que F *es invertible (porque el producto de elementales es invertible), por tanto en* $F\ A = U$ *podemos despejar* A: $A = F^{-1}U$

Obtengamos la inversa de F *por Gauss-Jordan:*

```
1    0    0    1    0    0
1    1    0    0    1    0
2    0    1    0    0    1

1    0    0    1    0    0
0    1    0   -1    1    0
0    0    1   -2    0    1
```

$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *Este resultado era de esperar pues es el producto de las elementales inversas.*

Denotando F^{-1} *como* P, *escribimos* $A = PU$.

En ejemplos como éste, de una matriz en la que no se ha tenido que realizar ninguna permutación para llegar a una forma escalonada, la matriz resultante P *queda triangular inferior. La matriz* U *es triangular superior, por ser escalonada y cuadrada (*U *es cuadrada por serlo* A*). A la matriz*

P se le designa entonces como L (lower triangular) y a la factorización $A = LU$ se le denomina **factorización LU de A**.

Comprobación de que $A = LU$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \ldots$$

Lección 7

Forma canónica equivalente

Hemos visto como a partir de una matriz $A_{m\times n}$ podíamos obtener infinitas matrices equivalentes por filas a ella, en la forma escalonada. Una de estas formas escalonadas es la denominada forma escalonada reducida de A, que es única. Todas las formas escalonadas por filas de A tendrán entre una y n columnas pivotales (la única matriz sin columnas pivotales es la matriz nula), que **no** serán necesariamente las n primeras. El número de columnas pivotales, r, es el rango de la matriz A. Repasamos en el siguiente ejemplo la obtención de una forma escalonada y de la forma reducida de una matriz sencilla, cuadrada de orden 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{31(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{32(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Forma esc. por filas}} \xrightarrow{F_{12(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{2(-1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Forma esc. por filas y reducida}}$$

Concluimos (ya al llegar a la primera forma escalonada por filas) que el rango de A es 2, siendo las columnas pivotales la primera y la tercerca.

La matriz a la derecha de todo es la forma escalonada por filas más sencilla posible que podemos obtener.

Mediante <u>o.e. por columnas</u> podemos ahora hacer que las columnas pivotales sean las dos primeras:

$$\xrightarrow{C_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y continuando con o.e. por columnas podemos hacer que todos los elementos de las columnas no pivotales sean nulos:

$$\xrightarrow{C_{31(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_{can\ equ}$$

A la última matriz la llamamos "forma canónica equivalente" de la matriz A. Es única.

Forma canónica equivalente de la matriz $A_{m\times n}$ es la matriz equivalente de A que tiene la expresión:

$$\begin{bmatrix} I_r & | & \Omega \\ - & - & - \\ \Omega & | & \Omega \end{bmatrix}, \text{ siendo } r \text{ el rango de } A$$

Para obtener la forma canónica equivalente de una matriz $A_{m\times n}$ será necesario, en general, efectuar tanto operaciones elementales por filas como operaciones elementales por columnas.

Dadas $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ se cumple el siguientes resultado:

$A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ son matrices equivalentes entre sí si y solo si tienen la misma forma canónica equivalente. equivalente y por tanto el mismo rango.

Se demuestra utilizando las propiedades simétrica y transitiva de la equivalencia de matrices.

$$\left.\begin{array}{l} A \sim B \\ A \sim U_{can\ equ} \end{array}\right\} \Rightarrow B \sim U_{can\ equ}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \sim U_{can\ equ} \\ B \sim U_{can\ equ} \end{array}\right\} \Rightarrow A \sim B$$

Obviamente si A_n es equivalente a la identidad, I_n, entonces la forma canónica equivalente de A es la identidad, I_n. De forma general se cumple $A_n \sim I_n \Leftrightarrow \text{rg}(A_n) = n$.

Resumiendo el resultado subrayado y resultados anteriores:

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}A = \text{rg}B \tag{7.1}$$

$$A \sim_f B \quad \Rightarrow \quad \text{rg}A = \text{rg}B \tag{7.2}$$

$$A \sim_c B \quad \Rightarrow \quad \text{rg}A = \text{rg}B \tag{7.3}$$

Equivalencia por filas implica equivalencia, y a su vez equivalencia implica igualdad de rangos, por eso se cumple la expresión (7.2).

Por el mismo razonamiento para la equivalencia por columnas se cumple la expresión (7.3).

Al resultado 7.2 habíamos llegado ya en la lección anterior, al definir el rango r a partir del número de columnas pivotales de la forma escalonada por filas de la matriz.

Revisamos dos ejemplos sencillos de pares de matrices donde se muestra que las propiedades (7.2) y (7.3) no pueden darse en sentido inverso:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tienen el mismo rango y no son equivalentes por filas.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tienen el mismo rango y no son equivalentes por columnas.

Los tres pares A con B , A con C y B con C son equivalentes entre sí, y A es la forma canónica equivalente de A, B y C.

Este es otro ejemplo de matrices A y B con el mismo rango y que no son equivalentes por filas. Obviamente sí son equivalentes considerando la definición general.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ La matriz canónica equivalente de ambas es $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y "a través de ella" podemos considerar a A y B equivalentes entre sí.