Matrices y determinantes

Ruth Carballo Fidalgo
Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
Universidad de Cantabria
carballor@unican.es

24 Septiembre 2019

Contenidos

Lección 1

Definiciones generales, suma y multiplicación por escalar

1.1 Definición de matriz y algunos tipos de matrices

Una matriz es una ordenación rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas encerrados entre corchetes (o paréntesis), por ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2+i & 1-i & 0-3i \\ 3-2i & 2+6i & -2-i \\ 0-i & 1+i & \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas A,B,C, ... y sus elementos por minúsculas con dos subíndices, a_{ij} . Los subíndices indican, por este orden, la fila y la columna en la que se sitúa el elemento.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{Se denota también } A = \{a_{ij}\}$$

Una matriz de m filas y n columnas se dice que es una matriz de **orden** $m \times n$, y esto también se denota así: $A_{m \times n}$.

Las matrices que trataremos tendrán elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ (a los elementos de un cuerpo se les denomina también escalares). Consideraremos el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, o el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$. Nótese que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (todo real es un elemento de $\mathbb{C}$ con parte imaginaria nula). Ambos son cuerpos conmutativos (no solo la suma, sino también la multiplicación cumple la propiedad conmutativa).

Hablaremos de "matrices en $\mathbb{R}$" si $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y de "matrices en $\mathbb{C}$" si $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

La matriz ejemplo B se puede considerar como una matriz en el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$, o también en el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$.

La matriz ejemplo C es una matriz en el cuerpo de los números complejos. No es una matriz en el cuerpo de los reales ya que tiene elementos que no son números reales.

El conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ tiene distintas notaciones, siendo las más frecuentes las tres siguientes:

$$M_{m \times n}(\mathbb{K}) \ \text{ ó } \ \mathbb{K}^{m \times n} \ \text{ ó } \ M_{m \times n}$$

La segunda notación particularizada para $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ sería $\mathbb{R}^{m \times n}$ ó $\mathbb{C}^{m \times n}$, respectivamente. La tercera notación no hace referencia a si los escalares son reales o complejos.

Al conjunto que comprende las matrices de todos los órdenes, se le denota en general $M(\mathbb{K})$ o M.
$M(\mathbb{R})$ designa el conjunto de las matrices reales de todos los órdenes
$M(\mathbb{C})$ designa el conjunto de las matrices complejas de todos los órdenes
M designa el conjunto de las matrices de todos los órdenes (no se hace referencia explícita a cual de los dos conjuntos de escalares es el utilizado).

Definimos a continuación algunos tipos de matrices y localizaciones en ellas.

1) **Matriz fila** es una matriz de orden $1 \times n$, $\quad A = [a_{11}\ a_{12} \dots\ a_{1n}]$

2) **Matriz columna** es una matriz de orden $m \times 1$, $\quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$

A una matriz columna se le denomina también **vector**.

Para los vectores una notación habitual es la de una letra minúscula con una flecha superpuesta:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

3) **Matriz cero** o **matriz nula** es aquella que tiene todos los elementos nulos. Se denota como $A = 0$, o como Ω.
El elemento cero de un cuerpo es el elemento neutro de la suma. El elemento cero de los números reales es 0, y el elemento cero de los números complejos es 0 + 0i.

4) La **matriz opuesta de** A, denotada $-A$, es aquella que resulta de sustituir en A cada elemento por su opuesto (el elemento simétrico de la suma en el cuerpo).
Si $A = \{a_{ij}\}$, los elementos de $-A$ son: $-A = \{-a_{ij}\}$

5) **Matriz cuadrada** es aquella con igual número de filas que de columnas. $m = n$.
Una matriz cuadrada de n filas y n columnas se dice que es una matriz de orden n. Una matriz de este tipo se denota como $A_{n\times n}$ o simplemente A_n.

En una matriz cuadrada la **diagonal principal** es la línea formada por los elementos cuyos subíndices de fila y columna coinciden, $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$.

La **diagonal secundaria** es la línea formada por los elementos a_{ij} tales que $i + j = n + 1$.

Se denomina **traza**, denotada $\mathrm{tr}(A)$, a la suma de los elementos de la diagonal principal de A.
$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

Se llama **triángulo superior** al formado por los elementos a_{ij} situados por encima de la diagonal principal.
Se llama **triángulo inferior** al formado por los elementos a_{ij} situados por debajo de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} * & \triangle & \triangle & \triangle \\ \circ & * & \triangle & \triangle \\ \circ & \circ & * & \triangle \\ \circ & \circ & \circ & * \end{bmatrix}$$

$*$ diagonal principal
$\triangle$ triángulo superior
$\circ$ triángulo inferior

- **Matriz triangular superior**. Matriz cuadrada que tiene el triángulo inferior nulo. O lo que es lo mismo, $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
- **Matriz triangular inferior**. Matriz cuadrada que tiene el triángulo superior nulo. O lo que es lo mismo, $a_{ij} = 0$ para $i < j$

- **Matriz diagonal**. Es aquella que es triangular superior y triangular inferior a la vez. Entre éstas cabe destacar la **matriz escalar**, que además de ser diagonal tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales. La **matriz unidad** o **matriz identidad** es una matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son unos. La matriz identidad de orden n se denota como I_n. "Uno (=1)" es el el. neutro de la multiplicación en el cuerpo.

- **Matriz simétrica**. Una matriz A_n es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para todos los valores de i y de j.

- **Matriz antisimétrica o hemisimétrica**. Una matriz A_n es antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos los valores de i y de j. Evidentemente, para los elementos de la diagonal principal se concluye $a_{ii} = -a_{ii}$, por tanto $2a_{ii} = 0$, por tanto $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots n$.

- **Matriz persimétrica**. Una matriz A_n es persimétrica si es simétrica respecto de la diagonal secundaria.

6) **Elemento cabecera** de una fila es el primer elemento no nulo de esa fila.

7) Se dice que $A_{m\times n}$ es **escalonada por filas** si verifica los dos requisitos siguientes:

a) Las filas con elementos que no sean todos cero están por encima de las filas cuyos elementos sean todos cero.

b) Dadas dos filas consecutivas, la cabecera de la fila inferior está en una columna situada más a la derecha que la de la cabecera de la fila superior.

Cada elemento cabecera de una matriz escalonada por filas recibe el nombre de **pivote**, y cada columna que contiene un elemento pivote se denomina **columna pivotal**.

Para abreviar se utiliza también la designación de **escalonada**.

Ejemplo 1.1. *Matrices escalonadas por filas.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{5} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{4} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se indican en negrita los elementos pivote.

A continuación damos dos ejemplos de matrices que no son escalonadas.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>*Toda matriz cuadrada en forma escalonada por filas es triangular superior*</u>

8) Se dice que $A_{m\times n}$ es **escalonada por filas y reducida** si es escalonada, con pivotes unidad, y tdos los elementos de las columnas pivotales, salvo obviamente el pivote, son ceros.

Para abreviar se utiliza también la designación de **escalonada reducida**.

Ejemplo 1.2. *Matrices escalonadas reducidas.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Obsérvese la diferencia con las matrices escalonadas por filas.

1.2 Igualdad de matrices

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, ambas del mismo orden, son iguales si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \;\; i = 1, \ldots, m \;\;, \;\; j = 1, \ldots, n$

1.3 Suma de matrices

Dadas $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, ambas del mismo orden, se define $A+B$ como la matriz $C = \{c_{ij}\}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ejemplo 1.3. *Calcular* $A + B$ *con* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

El resultado es una matriz del mismo orden, en nuestro caso 3×2.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4. *Calcular* $A - B$*, tomando las matrices del apartado anterior. (Nótese como la "resta" es la suma de la opuesta).*

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.4 Propiedades de la suma de matrices

1. Operación cerrada: $\forall \; A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \; A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}$
2. Asociativa: $\forall \; A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}, \; A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Elemento neutro: $\exists \;\; 0 \in \mathbb{K}^{m\times n} / \; \forall \; A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \;\; A + 0 = 0 + A = A$
4. Conmutativa: $\forall \; A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \; A + B = B + A$
5. Existencia de elemento opuesto:

   $$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} \qquad \exists \; -A \in \mathbb{K}^{m\times n} \; / \; A + (-A) = (-A) + A = 0$$

   $-A$ es la que hemos denominado anteriormente matriz opuesta.

   La matriz opuesta de A es la que tiene como elementos los opuestos de los elementos de A.

   El elemento opuesto de $a \in \mathbb{R}$ es $-a \in \mathbb{R}$

   El elemento opuesto de $a + bi \in \mathbb{C}$ es $-a - bi \in \mathbb{C}$. (Signo opuesto en la parte real y en la parte imaginaria).

1.5 Producto de una matriz por un escalar α del mismo cuerpo

Dada $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se define:

$$\alpha * A = C \Leftrightarrow \alpha * a_{ij} = c_{ij} \quad \forall\ i = 1,\ldots,m\ ,\ j = 1,\ldots,n \qquad \alpha,\ a_{ij} \text{ y } c_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Es decir, se define como otra matriz $C = \{c_{ij}\}$ cuyos elementos se forman multiplicando α por cada uno de los elementos de $A = \{a_{ij}\}$

La matriz C es del mismo orden que A.

Para matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$, tomando los escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ se garantiza que el producto por un escalar sea una operación cerrada, es decir que la matriz resultante siga perteneciendo a $\mathbb{R}^{m\times n}$.

En general se omite el símbolo "$*$" de la operación, escribiendo $\alpha * A$ simplemente como αA

Este producto se designa frecuentemente como "producto externo", ya que involucra dos factores de conjuntos distintos, uno es un escalar y el otro una matriz.

Ejemplo 1.5. $5\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot(-1) & 5\cdot 0\\ 5\cdot 2 & 5\cdot 1 & 5\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -5 & 0\\ 10 & 5 & 15\end{bmatrix}$

Ejemplo 1.6. $(5+i)\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5+i & -5-i & 0\\ 10+2i & 5+i & 15+3i\end{bmatrix}$

Ejemplo 1.7. $5\begin{bmatrix}1+i & 0\\ 2-i & 3i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot(1+i) & 5\cdot 0\\ 5\cdot(2-i) & 5\cdot 3i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5+5i & 0\\ 10-5i & 15i\end{bmatrix}$

Ejemplo 1.8. $(5+i)\begin{bmatrix}1+i & 0\\ 2-i & 3i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(5+i)\cdot(1+i) & (5+i)\cdot 0\\ (5+i)\cdot(2-i) & (5+i)\cdot 3i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+6i & 0\\ 11-3i & -3+15i\end{bmatrix}$

1.6 Propiedades del producto de una matriz por un escalar del mismo cuerpo

1. Cerrada: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

2. Ley de identidad o de unidad del producto externo: 1 A = A   1 es el elemento neutro del producto en el cuerpo $\mathbb{K}$, también llamado elemento unidad de $\mathbb{K}$.

   En $\mathbb{R}$ es el escalar 1 , ejemplo $1(-25) = -25$

   En $\mathbb{C}$ es el escalar $1+0i$, ejemplo $(1+0i)(2-6i) = (2-6i)$

3. Pseudoasociativa (asociativa entre el producto externo y el producto interno en $\mathbb{K}$):

   $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$

Se cumplen además:

4. Distributiva respecto a la suma de matrices:

   $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

5. Distributiva respecto a la suma de escalares:

   $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$

Otros resultados: $-1\ A = -A$, $0\ A = 0$

1.7 Estructura de Espacio Vectorial de las matrices: $(\mathbb{K}^{m\times n}, +, *\mathbb{K})$

El conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ con las operaciones de suma y producto externo por un escalar de $\mathbb{K}$, al cumplir las 10 propiedades anteriormente enumeradas, tiene estructura de **Espacio vectorial**.

Este resultado se expresa cómo: $(\mathbb{K}^{m\times n},\ +\ ,\ *\ \mathbb{K})$ Espacio Vectorial

o diciendo simplemente que $\mathbb{K}^{m\times n}$ es Espacio Vectorial sobre $\mathbb{K}$ (se entiende en este caso, implícitamente, cuales son las operaciones a las que nos referimos).

Al igual que habíamos visto para los vectores de $\mathbb{R}^n$, con las matrices $\mathbb{K}^{m\times n}$, al haber definido la suma y el producto externo por un escalar del cuerpo $\mathbb{K}$, podemos realizar la operación "mixta" de obtener combinaciones lineales.

Ejemplo 1.9. *Escribe la matriz C obtenida como combinación lineal de las matrices $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ con coeficientes 3 y -6, respectivamente.*

Sol.:

$$3\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + -6\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 15 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & -12 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

Lección 2

Producto de matrices e inversa de una matriz cuadrada

2.1 Definición del producto de matrices

Dadas dos matrices $A_{m\times n} = \{a_{ij}\}$ y $B_{n\times p} = \{b_{ij}\}$ [1], se define $C = A \cdot B$, como otra matriz $C_{m\times p}$ con tantas filas como A y tantas columnas como B, siendo su elemento c_{ij} el resultado de sumar los productos de los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B, en la forma dada en el siguiente sumatorio:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad i = 1, \dots, m \; j = 1, \dots, p$$

El algoritmo puede entenderse fácilmente observando el siguiente esquema:

$$\underset{\substack{\text{fila } i \\ m\times n}}{\begin{bmatrix} & & & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}} \underset{\substack{\text{columna } j \\ n\times p}}{\begin{bmatrix} & - & \\ & - & \\ & - & \\ & - & \\ & - & \end{bmatrix}} \underset{\substack{c_{ij} \\ m\times p}}{\begin{bmatrix} & & \\ & - & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}$$

En general se omite el símbolo "·" de la operación, escribiendo $A \cdot B$ simplemente como AB

Ejemplo 2.1. *Multiplicar las siguientes matrices:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot -1 + 1\cdot -2 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + -1\cdot -1 + -2\cdot -2 & 0\cdot 0 + -1\cdot 2 + -2\cdot 3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.2. *Multiplicar entre sí por pares, las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, *cuando sea posible.*

[1] Nótese que el número de columnas de A ha de coincidir con el número de filas de B

$$A\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = 14$$

$$B\ A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

AC, CA, CB, BC no son operaciones posibles

RECORDATORIO de la condición del producto de matrices:

$$A_{m\times\mathbf{n}} \cdot B_{\mathbf{n}\times p} = C_{m\times p}$$

2.2 Propiedades básicas

Siempre que los productos sean posibles, el producto de matrices en $\mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ el cuerpo de los reales, o el de los complejos, cumple las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $\forall A, B, C \in M \quad A\ (B\ C) = (A\ B)\ C$

Se cumplen además:

2. Distributiva respecto a la suma de matrices:
   $\forall A, B, C \in M \quad A\ (B + C) = (A\ B) + (A\ C)$
   $(A + B)\ C = A\ C + B\ C$

3. Pseudoasociativa (asociativa entre el producto externo y el producto interno en M)
   $\forall A, B \in M$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha A)\ B = A\ (\alpha B) = \alpha(A\ B)$

   Nota: Considerando $\alpha = 0$ vemos que si una de las matrices producto es nula el resultado es la matriz nula del orden correspondiente.

2.3 Otras propiedades

1. $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$; $\quad A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$; $\quad I_m A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$

Ejemplo 2.3. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. *Se cumple:*

$I_2\ A = A \qquad A\ I_3 = A \qquad I_2\ A\ I_3 = A$

Ejemplo 2.4. $\begin{bmatrix} 2+i & 7-3i \\ 4i & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & 7-3i \\ 4i & 6 \end{bmatrix}$

2. El producto de matrices no es conmutativo, es decir, no necesariamente $A\ B$ es igual a $B\ A$ aunque ambos productos puedan realizarse.

Una condición necesaria (aunque no suficiente) para que se cumpla $A \cdot B = B \cdot A$ es que el resultado sea del mismo orden, y esto último requiere que A y B sean matrices cuadradas de ese mismo orden.

Justificamos el resultado: $\begin{cases} A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} \\ B_{n\times p} \cdot A_{m\times n} = C'_{n\times n} \end{cases}$

Tenemos por una parte que el producto es de orden $m \times p$, y por otra que $p = m$ (para poder multiplicar B por A), por tanto C y C' tienen tamaños $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente. Para que ambas sean del mismo orden tendremos $m = n$. Por tanto, al concluir que $m = n = p$, A y B tienen que ser ambas cuadradas de orden n.

Se dice que dos matrices cuadradas de orden n conmutan o que son <u>conmutativas</u> o <u>permutables</u> si cumplen $A \cdot B = B \cdot A$. También se utiliza la denominación "conmutante" o "permutante".

En algunos casos se verifica que $A\ B = -B\ A$ [2], entonces se dice que las matrices cuadradas de orden n A y B son <u>anticonmutativas</u> o <u>antipermutables</u>. También se utiliza la denominación "anticonmutante" o "antipermutante".

Ejemplo 2.5. *Ejemplo de dos matrices cuadradas del mismo orden que no son permutables ni antipermutables.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 17 & 3 \end{bmatrix} \qquad B\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

3. El producto de matrices tiene divisores de cero: $A\ B = 0$ no implica que $A = 0$ ó $B = 0$.

   La definición estricta de los divisores de cero es la siguiente: una matriz no nula A es un divisor de cero por la izquierda si existe una matriz no nula B tal que $AB = 0$. De forma análoga se define un divisor de cero por la derecha. Una matriz que sea tanto divisor de cero por la izquierda como por la derecha se dice que es divisora de cero.

Ejemplo 2.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq 0 \quad y \quad A\ B = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los dos ejemplos anteriores vemos que las matrices A y B son respectivamente divisores de cero por la izquierda y por la derecha.

[2] Nótese que en este caso también se requiere que A y B sean matrices cuadradas del mismo orden

4. El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación:
   - $A\ B = A\ C$ no implica que $B = C$
   - $B\ A = C\ A$ no implica que $B = C$

   Obviamente sí se verifican las implicaciones recíprocas.

Ejemplo 2.8. *$A\ B = A\ C$, sin embargo $B \neq C$*

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 7\\12 & 28\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.9. *De nuevo $AB = AC$ pero $B \neq C$*

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

5. El producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

6. El producto de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.

Ejemplo 2.10. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 3 & 0\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\4 & 3 & 0\\6 & 29 & 12\end{bmatrix}$

7. El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. Además $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$

Ejemplo 2.11. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 18\end{bmatrix}$

8. Una matriz diagonal conmuta con todas las matrices diagonales. Es consecuencia de que el producto de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ sea conmutativo.

Ejemplo 2.12.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 18\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 18\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.13. *En este ejemplo se analiza el resultado del producto de una matriz dada por una matriz diagonal.*

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\8&10&12\\6&9&6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&9\\4&10&18\\2&6&6\end{bmatrix}$$

En el primer caso, DA, cada fila de A queda multiplicada por el elemento de la diagonal.

En el segundo caso, AD cada columna de A queda multiplicada por el elemento de la diagonal.

$$D\ A \qquad\qquad A\ D$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_{kj}=a_{ij}d_{jj} \qquad\qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}a_{kj}=d_{ii}a_{ij}$$

9. El producto de una matriz $A_{m\times n}$ por un vector $n\times 1$ es un vector $m\times 1$.

   $A\vec{v}=\vec{w}$

   El vector resultante $\vec{w}$ es igual a la combinación lineal de las columnas de A tomando como coeficientes las componentes de $\vec{v}$.

   Ejemplo 2.14. $\underset{A}{\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}}\underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}=\underset{\vec{w}}{\begin{bmatrix}14\\32\\14\\6\end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1&+&2\times2&+&3\times3\\4\times1&+&5\times2&+&6\times3\\2\times1&+&3\times2&+&2\times3\\1\times1&+&1\times2&+&1\times3\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\4\\2\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\5\\3\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3\\6\\2\\1\end{bmatrix}$$

10. Tomando la matriz $B=[\ \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \dots\ \vec{v}_p\ ]$, en la que cada columna viene representada por un vector, tenemos que $AB=[\ A\vec{v}_1\ \ A\vec{v}_2\ \ \dots\ A\vec{v}_p\ ]$

    Ejemplo 2.15. *Supongamos que tenemos la matriz* $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}$, *los vectores* $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ *y* $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$, *y que queremos calcular* $A\vec{v}_1$ *y* $A\vec{v}_2$.

    Podemos construir entonces:

    $B=[\ \ \vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\ \ ]=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\3&-2\end{bmatrix}$

    A continuación multiplicamos $A\ B$

$$A\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\ \vec{v}_1 & A\ \vec{v}_2 \end{bmatrix}$$

La última igualdad indica que en la primera columna recogemos el resultado $A\vec{v}_1$ y en la segunda el resultado $A\vec{v}_2$.

2.4 Potencia de una matriz cuadrada

Dada una matriz A_n y un natural positivo k, entonces A^k, leído como A a la potencia k, es el producto de A por sí misma k veces. Análogamente a la nomenclatura utilizada para los escalares reales o complejos, A correspondería a la base y k al exponente.

$$A^k = \overbrace{AA\ldots A}^{k\ veces}$$

2.5 Inversa de una matriz

Dada una matriz $A \in M_n$ decimos que F es la inversa de A si: $A\ F = F\ A = I$.
La inversa de A se denota como A^{-1}, es decir $F = A^{-1}$, y se tiene entonces $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = I$

De razonamientos en apartados anteriores se concluye que $A^{-1} \in M_n$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una matriz A que posee inversa se denomina **matriz regular** o **matriz invertible**. De una matriz que no tiene inversa se dice que es **singular** o **no invertible**.

Propiedades

1) Si A es invertible A^{-1} es única
2) Si A es invertible A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$
3) Si A y B son invertibles, entonces $A\ B$ es invertible y $(A\ B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4) Si A invertible y $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, entonces $(\alpha\ A)^{-1} = \alpha^{-1}\ A^{-1}$
5) Si A es invertible, $AB = I \Rightarrow BA = I$, $B^{-1} = A$ y $A^{-1} = B$.
6) Si A es invertible A no es divisor de cero por la izquierda ni por la derecha.

Dem.

1) Sea A^{-1} la inversa de A, y B otra matriz inversa de A.
Considerada la igualdad $A\ B = I$ y premultiplicando ambos miembros por A^{-1}, obtenemos:
$A^{-1}A\ B = A^{-1}\ I \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}$
concluimos que B es la misma matriz que A^{-1}.

2) $A^{-1}A = AA^{-1} = I \qquad \Rightarrow \ (A^{-1})^{-1} = A$

3) Consideramos el producto $B^{-1}A^{-1}$
$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ y
$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$
$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4) $\alpha A\ \alpha^{-1}A^{-1} = \alpha\alpha^{-1}AA^{-1} = 1I = I$ y $\alpha^{-1}A^{-1}\alpha A = 1I = I$
$\Rightarrow (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$

5) Partimos de $AB = I$
multiplicando por A^{-1} por la izquierda y por A por la derecha obtenemos: $BA = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$
Por cumplirse $AB = BA = I$ se deduce que B es la inversa de A.

6) Partimos de $AB = 0$, multiplicando por A^{-1} a la izquierda tenemos $B = 0$, por tanto A no es divisor de cero por la izquierda (no existe B no nulo tal que $AB = 0$). La demostración de que A no es divisor de cero por la derecha se obtendría de forma análoga partiendo de $BA = 0$

Nota: Esta última propiedad nos indica que si A es invertible, entonces el producto $AB = 0$ cumple la propiedad de integridad (sólo el cero es divisor del cero), siendo la matriz nula la B.

Observaciones

• Una consecuencia de la propiedad 3) es que el producto de tres matrices invertibles de orden n es invertible, y la inversa es el producto de las inversas en el orden contrario. La generalización a productos de más matrices es obvia.

$$(A\ B\ C)^{-1} = ((A\ B)\ C)^{-1} = C^{-1}\ (A\ B)^{-1} = C^{-1}\ B^{-1}\ A^{-1}$$
$$(A\ B\ \ldots F)^{-1} = F^{-1} \ldots\ B^{-1}\ A^{-1}$$

• Si A es invertible, entonces por la propiedad anterior, A^k tiene inversa, y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

$(A^{-1})^k$ se expresa por definición como A^{-k} siendo k el natural positivo utilizado.
Esta notación es útil al simplificar expresiones como la que se indica a continuación:

$A^k A^{-p} = A^{k-p}$, siendo k y p exponentes positivos.

La igualdad anterior para el caso $k = p$ nos lleva a $A^k A^{-k} = A^0$, y por otra parte $A^k A^{-k} = I$ (cada producto AA^{-1} produce la identidad). Por tanto $A^0 = I$ por definición, para que se cumpla la igualdad $A^k A^{-p} = A^{k-p}$ para cualquier par de valores k y p.

• I_n es invertible y su inversa es I_n

• Si A es invertible, podremos despejar B en la ecuación $AB = C$ del siguiente modo: $B = A^{-1}C$. En la ecuación $BA = D$ se despejaría así: $B = DA^{-1}$.

2.6 Ejercicios

Ejercicio 2.1. *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix}$ *en* $\mathbb{R}$, *calcula, en función de* λ, *las matrices* B *de orden 2 tales que* $AB = 0$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+\lambda c & 3b+\lambda d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos un sistema de 4 ecuaciones lineales y 4 incógnitas (a, b, c y d), homogéneo, que depende del parámetro λ:

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \\ 3a+\lambda c=0 \\ 3b+\lambda d=0 \end{cases}$$

Sustituyendo $a=-2c$ *en la tercera ecuación y* $b=-2d$ *en la cuarta ecuación, obtenemos el siguiente sistema lineal equivalente:* $\begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \\ -6c+\lambda c=0 \\ -6d+\lambda d=0 \end{cases}$,

que también puede escribirse cómo: $\begin{cases} a=-2c \\ b=-2d \\ (\lambda-6)c=0 \\ (\lambda-6)d=0 \end{cases}$,

Aplicamos la propiedad de la integridad en la tercera ecuación y razonamos a partir de ahí:

- *Si* $\lambda=6$ *la solución es cualquier matriz* B *de la forma:* $B = \begin{bmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{bmatrix}$ *con* $c, d \in \mathbb{R}$
- *Si* $\lambda \neq 6$ *la única solución del SL homogéneo es la trivial:* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2.2. *Determina todas las matrices U reales de orden 2 triangulares superiores (no diagonales) tales que $U^2 = I$, o lo que es lo mismo, tales que $U^{-1} = U$.*

```
syms a b c ;  A=[a b; 0 c];
% [ a, b]
% [ 0, c]
A*A
% [ a^2, a*b + b*c]
% [   0,       c^2]
A*A-eye(2)           % eye(2) es la identidad de orden 2
                     % el resultado anterior tiene que igualarse a la matriz cero
% [ a^2 - 1, a*b + b*c]
% [       0,   c^2 - 1]

% a^2-1=0      a=+-1  solo dos valores posibles
% c^2-1 = 0    c=+-1  solo dos valores posibles, de momento independientes de a
% b*(a+c)=0 => a=-c, puesto que b es distinto de cero.    a queda entonces fijado por c

%[ 1,  b]
%[ 0, -1]
%
%[ -1,  b]
%[  0,  1]


% si en el enunciado se admitieran diagonales habria que anadir a las anteriores las
% matrices que obtenemos en este apartado.

syms a b ;   A=[a 0; 0 b];
% [ a, 0]
% [ 0, b]
A*A,   A*A-eye(2)
% [ a^2,   0]
% [   0, b^2]

% [ a^2 - 1,       0]
% [       0, b^2 - 1]

% a^2-1=0     a=+-1  solo dos valores posibles
% b^2-1 = 0   b=+-1  solo dos valores posibles, independientes de a

sol=[a 0 ; 0 b]
m1=subs(sol,{a,b},{1,1})
m2=subs(sol,{a,b},{1,-1})
m3=subs(sol,{a,b},{-1,1})
m4=subs(sol,{a,b},{-1,-1})

%[ 1, 0]
%[ 0,  1]
%
%[ 1,  0]
%[ 0, -1]
```

```
%
%[ -1, 0]
%[  0,  1]
%
%[ -1,  0]
%[  0, -1]
```

Ejercicio 2.3. *Sabiendo que $B = A/3$, siendo B regular, obtén la inversa de B en función de la inversa de A.*

Sol.:

$$BB^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{3}\, B^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad AB^{-1} = 3I \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = 3\ A^{-1}$$

O también se podría haber deducido así :

$$B = \frac{A}{3} \Rightarrow B^{-1} = \left(\frac{A}{3}\right)^{-1} = 3A^{-1}$$

Lección 3

Transformaciones de una matriz

3.1 Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A_{m\times n}$ se llama traspuesta de A y se denota A^t, a la matriz que resulta de cambiar ordenadamente sus filas por sus columnas.
A^t será entonces de orden $n \times m$. $\quad a^t_{ij} = a_{ji} \quad \forall \ \ i = 1,\dots,n \ \ , \ \ j = 1,\dots,m$

Ejemplo 3.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Propiedades:

1) $(A^t)^t = A$
2) $(\alpha\ A)^t = \alpha\ A^t \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$
3) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
4) $(A\ B)^t = B^t\ A^t$

Demostración de la propiedad 4):
Sea $A\ B = C$

$$c^t_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a^t_{kj}b^t_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b^t_{ik}a^t_{kj}$$

La penúltima igualdad se obtiene porque el producto de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ cumple la propiedad conmutativa.

El término más a la izquierda de la cadena de igualdades es el elemento (i, j) de $(A\ B)^t$ y el término más a la derecha es el elemento (i, j) de la matriz B^tA^t. Concluyendo entonces que $(AB)^t = B^t\ A^t$
Nótese que la matriz identidad cumple $I^t = I$.

Cuando A es cuadrada tenemos los siguientes resultados:

- A es invertible si y sólo si A^t es invertible, y en este caso $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

  Demostración:

  $AA^{-1} = I \Leftrightarrow (A^{-1})^tA^t = I$ (tomando traspuestas a ambos lados de la primera igualdad o de la segunda)

  $A^{-1}A = I \Leftrightarrow A^t(A^{-1})^t = I$ (tomando traspuestas a ambos lados de la primera igualdad o de la segunda)

  Las igualdades de la derecha muestran que A^t tiene inversa y que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

- Una matriz A_n es simétrica si y sólo si $A = A^t$.

  En efecto A_n es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}$, y como $a_{ij} = a^t_{ji}$, tenemos que $a^t_{ji} = a_{ji}$ y por tanto $A^t = A$

Ejemplo 3.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ *es una matriz simétrica*

- Una matriz A_n es antisimétrica o hemisimétrica si y sólo si $A = -A^t$.

  En efecto A_n es antisimétrica o hemisimétrica si y sólo si $a_{ij} = -a_{ji}$, y como $a_{ji} = a^t_{ij}$, tenemos que $a_{ij} = -a^t_{ij}$ y por tanto $A = -A^t$

  Ejemplo 3.3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *es una matriz antisimétrica*

  Ejemplo 3.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ *no cumple* $A = -A^t$ *pues* $-A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

  Este ejemplo nos permite recordar el requisito de que los elementos de la diagonal principal sean nulos en las matrices antisimétricas.

- Dada una matriz cuadrada A_n, $A + A^t$ es simétrica.

  Veamos la demostración: Definimos $C = A + A^t$

  $c_{ij} = a_{ij} + a^t_{ij} = a^t_{ji} + a_{ji} = a_{ji} + a^t_{ji} = c_{ji}$

  El resultado $c_{ij} = c_{ji}$ demuestra que C es simétrica.

  (La tercera igualdad se cumple por la propiedad conmutativa de la suma de los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$).

- Dada una matriz cuadrada A_n, $A - A^t$ es antisimétrica.

  Veamos la demostración: Definimos $C = A - A^t$

  $c_{ij} = a_{ij} - a^t_{ij} = a^t_{ji} - a_{ji} = -a_{ji} + a^t_{ji} = -(a_{ji} - a^t_{ji}) = -c_{ji}$

  El resultado $c_{ij} = -c_{ji}$ demuestra que C es antisimétrica.

  (La tercera igualdad se cumple por la propiedad conmutativa de la suma de los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$).

- Toda matriz cuadrada A_n se puede expresar de <u>forma única</u> como suma de una matriz simétrica S y otra antisimétrica H: $A = S + H$

  Veamos la demostración:

  $A = S + H$ [1]

  y tomando traspuestas $A^t = S^t + H^t$

  Por otra parte $S^t = S$ y $H^t = -H$, por tanto $A^t = S - H$ [2]

  Sumando [1] y [2] obtenemos $A + A^t = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}(A + A^t)$

  Restando [1] y [2] obtenemos $A - A^t = 2H \Rightarrow H = \frac{1}{2}(A - A^t)$

  Hemos demostrado cómo obtener S y H a partir de A

Ejemplo 3.5. *Descomponer* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ *como suma de una matriz simétrica y otra anti-simétrica.*

Sol. $S = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$H = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

También se podría haber resuelto partiendo de la siguiente ecuación matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix}$$

Los sumandos de la derecha son las matrices S y H que tenemos que obtener.

A partir de la ecuación matricial anterior obtenemos las siguientes ecuaciones escalares:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b + d = 1 \\ b - d = -3 \\ c = 5 \end{cases}$$

Y resolviendo el SL de 4 ecuaciones y 4 incógnitas nos queda:

$a = 2, b = -1, c = 5, d = 2$

Obteniendo las mismas matrices que con el método anterior.

<u>Propiedad adicional para $A_{m\times n}$</u>.

- Dada $A_{m\times n}$, las matrices AA^t y A^tA son ambas simétricas.

  Demostración: $(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t$

  $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$

3.2 Primera definición de matriz ortogonal

Una matriz cuadrada se dice **ortogonal** si $AA^t = A^tA = I$

Propiedades de una matriz A ortogonal:

a) $A^{-1} = A^t$

b) La traspuesta de una matriz ortogonal es ortogonal

c) La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal (la inversa es la misma que la traspuesta).

d) El producto de dos o más matrices ortogonales es ortogonal

Dem.

a) Por la definición de inversa

b) Sea A ortogonal,
$A^{-1}(A^{-1})^t = A^t(A^t)^t = A^tA = I$ y
$(A^{-1})^tA^{-1} = (A^t)^tA^t = AA^t = I$, por tanto A^{-1} es ortogonal.

c) Sea A ortogonal,
$A^t(A^t)^t = A^tA = I$ y
$(A^t)^tA^t = AA^t = I$, por tanto A^t es ortogonal.

d) Lo demostramos para el producto de dos matrices. Sean A y B ortogonales
$(AB)\ (AB)^t = ABB^tA^t = AIA^t = AA^t = I$
$(AB)^t\ AB = B^tA^tAB = B^tIB = B^tB = I$

Un ejemplo de matriz ortogonal es la siguiente: $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ para cualquier valor $\theta \in \mathbb{R}$.

Comprobación:

$$AA^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerda los siguientes valores de senos y cosenos:

$\sin(0°)=0$	$\sin(30°)=1/2$	$\sin(45°)=\sqrt{2}/2$	$\sin(60°)=\sqrt{3}/2$	$\sin(90°)=1$
$\cos(0°)=1$	$\cos(30°)=\sqrt{3}/2$	$\cos(45°)=\sqrt{2}/2$	$\cos(60°)=1/2$	$\cos(90°)=0$

3.3 Conjugada de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se llama conjugada de A y se denota $\overline{A}$, a una nueva matriz cuyos elementos son los conjugados de los elementos de A. Dado el complejo $z = a + bi$, su conjugado es $\overline{z} = a - bi$. El conjugado es por tanto el complejo con la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo.

Si la matriz A es real, entonces $\overline{A} = A$

Propiedades:

$\overline{\overline{A}} = A$

$\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}$

$\overline{A \pm B} = \overline{A} \pm \overline{B}$

$\overline{AB} = \overline{A}\ \ \overline{B}$

Si todos los elementos de A son imaginarios puros (parte real 0), entonces $\overline{A} = -A$

Cuando A es cuadrada tenemos las siguientes definiciones:

A_n se dice hermítica o autoadjunta si $\overline{A^t} = A$, es decir, si $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos los valores de i y j. Obviamente, los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica han de ser números reales.

A_n se dice antihermítica o hemihermítica si $\overline{A^t} = -A$, es decir, si $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ para todos los valores de i y j. Se desprende que los elementos de la diagonal principal de una matriz antihermítica han de ser nulos o imaginarios puros.

A_n se dice normal si $A\ \overline{A^t} = \overline{A^t}\ A$

A_n se dice unitaria si $\overline{A^t} = A^{-1}$, es decir, si $A\ \overline{A^t} = \overline{A^t}\ A = I$

3.4 Ejercicios

Ejercicio 3.1. *Descompón la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *en* $\mathbb{R}$ *como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*

Ejercicio 3.2. *Considera la matriz* $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Comprueba que las matrices $A = CC^t$ *y* $B = C^tC$ *son ambas simétricas.*

Lección 4

Matrices especiales respecto al valor de sus potencias

Consideremos una matriz cuadrada A.

- Matriz periódica de período k es aquella matriz A cuadrada que verifica que $A^{k+1} = A$ para algún natural positivo k, siendo k el menor de ellos para el que se verifica. En efecto $A^{k+1} = A \ \Rightarrow \ A^{ik+1} = A$ para $i = 1, 2, 3, ...$

  Demostraremos el último resultado mediante inducción:

  - El resultado $A^{ik+1} = A$ se cumple para $i = 1$, es decir, $A^{k+1} = A$.
  - Vamos a suponer que se cumple para un valor i y deduciremos que entonces se cumple también para el siguiente valor de i, es decir $i + 1$.
    Supuesto $A^{ik+1} = A$ se tendrá que $A^{(i+1)k+1} = A^{ik+k+1} = A^{ik+1}A^k = AA^k = A^{k+1} = A$.
  - Al cumplirse para $i = 1$ y para el siguiente índice de cualquiera que lo cumpla, se cumplirá para $i = 2, 3, 4, ...$, es decir, se cumplirá para todo i.

  El período se designa en general como T, es decir $T = k$.

  Si una matriz A es periódica de por ejemplo período $T = 4$, entonces $A^5 = A$, $A^9 = A$, $A^{13} = A$, etc. Partiendo de A, cada vez que multiplicamos A por A^4 volvemos a obtener A.

  Cuando $T = 1$ se tiene $A^2 = A$ y $A^{1*i+1} = A$ para todo i. Por tanto $A^k = A$ para todo $k \geq 2$. Se dice en este caso que A es idempotente.

  Nótese que $A^k = I$ implica $A^{k+1} = A$ pero no recíprocamente. En el caso de A inversible sí se cumple el recíproco, pues multiplicando la expresión $A^{k+1} = A$ por A^{-1} por la derecha se tiene $A^k = I$.

  Por ejemplo la matriz no invertible $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ es períodica de período $T = 2$, cumpliendo por tanto:

  $$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

  Sin embargo A^2 no es igual a la identidad:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

- Matriz nihilpotente de índice k es aquella matriz cuadrada A que verifica $A^k = 0$, siendo k el menor natural positivo para el que se cumple la igualdad.

  Las matrices A nihilpotentes de índice $k = 2$, es decir, tales que $A^2 = 0$, se definen simplemente como matrices nihilpotentes.

  Si una matriz es nihilpotente de índice k (sea $k = 2$ o cualquier otro valor), resulta inmediato que $A^p = 0$ para todo $p \geq k$.

- Matriz involutiva es la matriz cuadrada A que verifica $A^2 = I$, y por tanto $A = A^{-1}$.

  $A^2 = I \;\Rightarrow\; A^3 = A \;\Rightarrow\; A^4 = A^3A = AA = I$

  Considerando un exponente cualquiera se obtendría:

  $A^{2i} = I \;\; \forall i = 1, ..., n$ $\qquad$ $A^{2i+1} = A \;\; \forall i = 1, ..., n$

  Expresado con palabras, las potencias pares de A producen I y las potencias impares de A producen A.

  La demostración formal, que es muy sencilla, tendría que hacerse mediante inducción.

Ejemplo de matriz periódica, de período $T = 4$: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Es la matriz que opera sobre cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ una rotación de 90 grados en el sentido contrario al de las agujas del reloj, es decir, $A\vec{v} = \vec{v}_{rot}$

$A^5 = A$, $A^9 = A$, y lo mismo para A^{13}, A^{17}, ...

Aplicar la rotación 5 veces es lo mismo que aplicarla una vez.

Ejemplo de matriz idempotente: $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Ejemplo de matriz idempotente: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Esta matriz corresponde en $\mathbb{R}^3$ a la proyección ortogonal de cualquier vector $\vec{v} = (x, y, z)$ sobre el plano XY. En efecto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de matriz nihilpotente de índice 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Toda matriz triangular superior con la diagonal principal nula es nihilpotente para algún índice.

Otro ejemplo de matriz nihilpotente: $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ es nihilpotente de índice 2 o simplemente nihilpotente.

Ejemplo de matriz involutiva: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Esta matriz corresponde en $\mathbb{R}^2$ a la reflexión de cualquier vector $\vec{v} = (x, y)$ respecto del eje X. En efecto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Fijémonos en A^2, analizando cómo actúa la matriz A^2 sobre el vector $\vec{v}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vemos que "reflejar el reflejado produce el original", $A^2\vec{v} = I\vec{v}$

Recordemos que el producto de matrices diagonales se obtiene de forma sencilla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 0 \\ 0 & -1 \times -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$