Lección 8

Determinantes

8.1 Definición

A toda matriz cuadrada A_n con elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ le asociamos un número denominado **determinante de** A, $\det A$ o $|A|$ simbolizado así :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}$$

Este número se calcula sumando todos los productos que se obtienen al multiplicar n elementos de la matriz de todas las formas posibles, con la condición de que en cada producto exista un único elemento de cada fila y un único elemento de cada columna; cada uno de estos productos llevará su signo o el opuesto según la permutación formada por los subíndices fila de los n factores y la formada por los subíndices columna de los n factores sean o no de la misma clase, respectivamente.

Cada sumando tiene esta forma:

$$a_{1\ j_1}\ \ a_{2\ j_2}\ \ \dots\ \ a_{n-1\ j_{n-1}}\ \ a_{n\ j_n}$$

siendo $j_1, j_2, \dots, j_n$ una permutación de $1, 2 \dots n$. Por simplicidad hemos tomado para las filas el orden natural.

El número de permutaciones (ordenaciones) de n elementos distintos $1, 2 \dots n-1, n$ es $n!$, por tanto el número de sumandos es $n!$.

Dos permutaciones son de la misma clase (distinta clase) cuando para pasar de una otra se necesita un número par (impar) de intercambios (también llamados inversiones o trasposiciones).

Dos importantes resultados sobre determinantes son los siguientes:

- **El valor de un determinante no varía cuando cambiamos ordenadamente sus filas por sus columnas.** $|A^t|$=$|A|$**.** En efecto, los productos y sus signos son los mismos en A^t que en A.

- $|I| = 1$. En efecto, en la matriz identidad de orden n solo existe un producto que no es nulo, que es el de los elementos de la diagonal principal.

Cuando el determinante es de una matriz de orden 2 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \circ & \\ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \bullet \\ \bullet & \end{vmatrix}$$

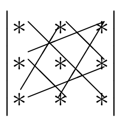
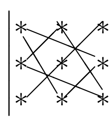
Perm. Filas	Perm. Columnas	Signatura
1 2	1 2	$\times(+1)$
	2 1	$\times(-1)$

Para un determinante de orden 3 resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Perm. Filas	Perm. Columnas	Inversiones	Signatura
1 2 3	1 2 3	0	$\times(+1)$
	1 3 2	1	$\times(-1)$
	2 1 3	1	$\times(-1)$
	2 3 1	2	$\times(+1)$
	3 1 2	2	$\times(+1)$
	3 2 1	1	$\times(-1)$

La regla de Sarrus simplifica la obtención del determinante de orden 3.

con signo +  ; con signo − 

Para un determinante de orden 4, tendríamos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ sumandos, cada uno formado por el producto de 4 elementos. Sin embargo, veremos cómo determinadas propiedades de los determinantes nos permitirán simplificar enormemente su cálculo.

Ejemplo 8.1. *Calcular los siguientes determinantes:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 2 - 3 - 8 - 0 = -7$$

$$\begin{vmatrix} 2+i & 4-i \\ 6 & 5i \end{vmatrix} = (2+i)5i - 6(4-i) = 10i - 5 - 24 + 6i = 16i - 29$$

8.2 Matriz de cofactores

Sea la matriz $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Se define **menor complementario** (i, j) de A, denotado m_{ij}, como el determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j.

Se define **cofactor** (i, j) de A y se denota A_{ij}, al producto del menor complementario m_{ij} por el factor $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

Se define **matriz de cofactores de** A, denotada como $\mathrm{cof}(A)$, a aquella cuyo elemento (i, j) es el cofactor A_{ij}.

$$\mathrm{cof}(A) = \{A_{ij}\} \qquad \mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: En Álgebra tiene mucho interés la traspuesta de la matriz de cofactores de A, ya que a partir de ella se puede calcular el determinante de A. Demuestre la siguiente propiedad:

$$(cof(A))^t = cof(A^t)$$

Sol.

Analicemos los cofactores de A^t:

m_{ij} de A^t es igual a m_{ji} de A.

En efecto eliminando las líneas (i, j) en A^t y las líneas (j, i) en A nos siguen quedando dos matrices que son una la traspuesta de la otra (con esas líneas eliminadas, y por tanto de orden $n-1$). Por ser esas matrices traspuestas una de otra tienen el mismo determinante.

Multiplicando los menores complementarios anteriores por $(-1)^{i+j}$ tenemos:

cofactor (i, j) de A^t = cofactor (j, i) de A

Denotando a la matriz de cofactores de A^t como B y a la matriz de cofactores de A como C, la igualdad anterior nos dice:

$b_{ij} = c_{ji}$, es decir $B = C^t$.

Por tanto $\mathrm{cof}(A^t) = (\mathrm{cof}(A))^t$

8.3 Propiedades de los determinantes

1. El valor de un determinante no varía cuando cambiamos ordenadamente sus filas por sus columnas. $|A^t|=|A|$. (Esta propiedad ya se habían enunciado en la primera sección).

2. Si se intercambian entre sí dos líneas (filas o columnas) paralelas el determinante cambia de signo.

3. Un determinante con dos líneas paralelas iguales es nulo. (Consecuencia inmediata de la propiedad 2)).

4. Si todos los elementos de una línea tienen un factor común, el determinante puede obtenerse como el producto de ese factor común por el determinante que resulta de eliminar ese factor común en la correspondiente línea.

   por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. Si los elementos de una línea son nulos, el determinante es nulo. (Consecuencia inmediata de la propiedad 4), puesto que el escalar que sería factor común es el cero).

6. Si la matriz A tiene dos líneas paralelas proporcionales el determinante de A es nulo. Consecuencia de las propiedades 4 y 3, pués al sacar factor común quedarán dos líneas iguales.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{11} \\ a_{12} & \alpha a_{12} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

7. Si los elementos de una línea son la suma de r sumandos, el determinante se puede descomponer en suma de r determinantes que tienen las restantes líneas iguales y en el lugar de aquella, otra formada por los primeros, segundos, terceros, etc, sumandos.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & 5 & 0 \\ d+e+f & 1 & -1 \\ g+h+i & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5 & 0 \\ d & 1 & -1 \\ g & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ e & 1 & -1 \\ h & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 5 & 0 \\ f & 1 & -1 \\ i & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+a & 1 \\ a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Si los elementos de una línea son combinación lineal[1] de líneas paralelas, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{12}+\beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22}+\beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32}+\beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \beta a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \beta a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\ 0 + \beta\ 0 = 0$$

9. Si a los elementos de una línea se le suman los correspondientes a otra paralela multiplicados por un escalar, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| + \alpha\ 0 = |A|$$

[1]Considerando los elementos de una línea como un vector

Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes

Significa que la operación elemental de reemplazamiento no altera el determinante

10. La suma de los elementos de una línea multiplicados por sus respectivos cofactores es igual al valor del determinante.

Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes

11. La suma de los elementos de una línea multiplicados por los cofactores de otra paralela es nula.

12. El determinante de las matrices triangulares y diagonales es el producto de los elementos de la diagonal principal. De esta propiedad se deduce de forma inmediata que el determinante de la matriz identidad es 1, propiedad que ya se había presentado en la sección anterior.

13. Dadas A_n, B_n, $|A\ B| = |A|\ |B|$

    Generalización tomando C cuadrada de orden n

    $|A\ B\ C| = |(A\ B)\ C| = |A\ B|\ |C| = |A|\ |B|\ |C|$

    y lo mismo para más de tres factores

14. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ (se deduce de la propiedad (4))

15. Si A es invertible, entonces su determinante es distinto de cero y $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

    Dem:

    $AA^{-1} = I$ y obteniendo los determinantes: $|AA^{-1}| = |I| = 1$

    por la propiedad 13 $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$,

    por tanto $|A||A^{-1}| = 1$ y ello implica tres resultados:

    $$\begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A^{-1}| \neq 0 \\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{cases}$$

    Consecuencia de esta propiedade es que si $|A| = 0$, entonces A no es invertible.

16. Q ortogonal $\Rightarrow |Q|$ es 1 o -1

    Recordamos que una matriz cuadrada Q se dice **ortogonal** si $QQ^t = Q^tQ = I$.

    Tomando determinantes y teniendo en cuenta que $|Q^t| = |Q|$, obtenemos

    $|QQ^t| = |Q||Q^t| = |Q||Q| = 1 \Rightarrow |Q| = 1$ o $|Q| = -1$

Aplicando las propiedades anteriormente expuestas podemos simplificar enormemente el cálculo de determinantes.

8.4 Desarrollo del determinante por cofactores

El valor del determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) de A por sus respectivos cofactores (Propiedad 10 de la lista anterior). Es decir

elegida una fila i $\qquad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

ó

elegida una columna j $\qquad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

Este resultado es muy útil para calcular determinantes de orden superior a 3, al permitirnos reducir el cálculo del determinante de una matriz de orden n a básicamente el cálculo de n determinantes de orden $n-1$.

Ejemplo 8.2. *Calcula el siguiente determinante por cofactores de la primera columna.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -51$$

En caso de poder elegir la línea para el desarrollo de $|A|$ por cofactores se tomaría la primera fila, puesto que dos de sus cuatro elementos son ceros, ahorrándonos el cálculo de dos cofactores.

Ejemplo 8.3. *Calcula el valor del siguiente determinante.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos por ejemplo por cofactores de la 1^{a} *columna. Pero previamente realizaremos las operaciones (propiedad 9, no modifican el determinante) necesarias para hacer ceros todos los elementos de esta columna excepto el primero. La fila 1 es la fila auxiliar, utilizada para transformar los elementos de las filas 3 y 5.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \begin{matrix} F_{31(-1)} \\ F_{51(-1)} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+(-1) & 1+(-2) & 0+(-1) & 2+(-2) & 0+(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1+(-1) & 2+(-2) & 2+(-1) & 1+(-2) & 1+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los cofactores de la 1^{a} *columna:*

$$|A| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Y desarrollando el nuevo determinante de orden 4 por cofactores de la 1^{a} *columna.*

$$|A| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1+2-1+2) = 2$$

8.5 Inversa a partir de la traspuesta de la matriz de cofactores

Consideremos el producto $A\ (\mathrm{cof}(A))^t$,

$$A\ (\mathrm{cof}(A))^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Recordando que la suma del producto de los elementos de una línea de A por sus respectivos cofactores es el determinante de A, y que la suma del producto de los elementos de una línea por los cofactores de otra paralela es nulo, tenemos:

$$A\ (\mathrm{cof}(A))^t = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|I \tag{8.2}$$

Si $|A| \neq 0$, podemos pasar $|A|$ al primer miembro, dividiendo, y obtenemos:

$$A \quad \frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|} = I \tag{8.3}$$

Partiendo del producto de matrices $(\mathrm{cof}(A))^t A$, y con el mismo desarrollo, obtendríamos:

$$\frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|} \quad A = I \tag{8.4}$$

De las ecuaciones (8.3) y (8.4) deducimos: $$A^{-1} = \frac{(\mathrm{cof}(A))^t}{|A|} \tag{8.5}$$

La ecuación (8.5) nos da un procedimiento para calcular la inversa de una matriz.

Nótese que si A es singular obtendríamos

$$A\ (\mathrm{cof}(A))^t = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|I = 0, \text{ por lo que deduciríamos } |A| = 0.$$

RESUMEN: En esta sección encontramos que si $|A| \neq 0$ existe inversa, dada por $A^{-1} = (\mathrm{cof}(A))^t/|A|$. En la propiedad 13 vimos que si A es invertible, $|A| \neq 0$. Por tanto concluimos que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) A es invertible b) A tiene determinante no nulo

O expresado de otra forma: A invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

OBSERVACIÓN: Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio de la página 58, $\mathrm{cof}(A^t) = (\mathrm{cof}(A))^t$, la ecuación (8.5) se puede reescribir así:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{cof}(A^t)}{|A|}$$

Ejemplo 8.4. *Calcula la inversa de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ *a partir de su matriz de cofactores.*

Sol.

La matriz cuyos elementos son los menores complemetarios m_{ij} *de* A *es la siguiente:*

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de cofactores de A *tenemos que multiplicar los elementos* m_{ij} *por el factor* $(-1)^{i+j}$*, o lo que es lo mismo, tenemos que cambiar de signo los elementos en los que la suma del índice de fila y el índice de columna sea impar.*

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Seguidamente se obtiene la traspuesta:

$$(cof(A))^t = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la inversa sólo queda dividir por el determinante.

$$A^{-1} = \frac{(cof(A))^t}{|A|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Comprueba el resultado siempre que calcules una inversa, confirmando que $A^{-1}A = I$.

En dos de los libros de la Bibliografía básica de la asignatura, S.I. Grossman y J.J. Flores Godoy "Algebra Lineal" (2012, McGraw-Hill, Séptima Edición, página 210) y D.C. Lay, S.R. Lay y J.J. McDonald "Álgebra Lineal y sus aplicaciones" (2016, Pearson Educación de México, Quinta Edición, página 181), verás que a la traspuesta de la matriz de cofactores se le llama **matriz adjunta**, adj$A$. También es ésta la definición que usa MATLAB en la función **adjoint** para matrices simbólicas.

La ecuación para la inversa en estos textos, y en la documentación de Matlab, queda entonces como:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

Esta definición y su correspondiente ecuación para la inversa pueden crear confusión, ya que en algunos libros de texto, aunque cada vez en menos, se *llama adjunta directamente a la matriz de cofactores*, por lo que al llevarla a la ecuación para la inversa han de escribir adj(A^t) en vez de adj(A). El libro de J. Burgos "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana" (2006, McGraw-Hill, Tercera Edición), incluido en la Bibliografía, usa esta definición de adjunta y obviamente traslada adj(A^t) en la fórmula para la inversa.

En este manual se da la fórmula (8.5) para la inversa, que lleva en el numerador la traspuesta de la matriz de cofactores de A. Esta es la fórmula que se puede encontrar por ejemplo en G. Strang "Introduction to Linear Algebra" (2009, Wellesley-Cambridge Press, Cuarta Edición), página 270, también incluido como libro de referencia en la Bibliografía.

8.6 Relación entre los determinantes de matrices equivalentes

En esta sección analizamos cómo varía el determinante de una matriz al efectuar sobre ella operaciones elementales, recordando las siguientes propiedades de los determinantes:

- la permutación o intercambio de líneas cambia el signo del determinante
- reemplazar una línea por ella más un múltiplo de otra paralela no hace variar el determinante
- el escalamiento de una línea (recordemos que ha de ser con un factor no nulo) escala el determinante por el mismo factor

Por tanto, si $A \sim B$, $\boxed{|B| = |A| \times (-1)^s \times \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_p}$ siendo s el número de intercambios de líneas y α_i (todos distintos de 0) los factores de los escalamientos realizados sobre A.

La expresión anterior nos está indicando:

$\boxed{\text{Si } A \sim B \ , \ |A| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0}$

Es obvio que la expresión anterior es la misma que " Si $A \sim B$, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$ "

En la Lección 5 de "Equivalencia de Matrices" vimos que si $A \sim B$, entonces A invertible $\Leftrightarrow$ B invertible. En la sección 8.5 ya completamos la deducción: A invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$, por tanto el resultado que acabamos de presentar ahora ya se podría haber descrito en esa sección. Aquí lo hemos analizado a partir de los cambios que produce en el determinante la aplicación de operaciones elementales.

Relación entre el determinante y la equivalencia a la identidadd

Analicemos el caso en que partiendo de A_n realizamos operaciones elementales por filas hasta llegar a una forma escalonada que denotamos como U (la denominada eliminación gaussiana).

$A \sim_f U$

Por ser U cuadrada y escalonada es triangular superior y $|U|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Por tanto:

$|U| = u_{11} \times u_{22} \times \ldots \times u_{nn}$

Deducimos:

- $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |U| \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \ u_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow$ el número de pivotes es $n \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$

  Continuando con o.e. por filas hasta llegar a la forma escalonada reducida ésta sería I_n.

Estas afirmaciones también se pueden escribir en esta forma:

- $|A| = 0 \Leftrightarrow |U| = 0 \Leftrightarrow \exists \ u_{ii} = 0 \Leftrightarrow$ el número de pivotes es menor que n, es decir, $\mathrm{rg}A < n$.

  Continuando con o.e. por filas hasta llegar a la forma escalonada reducida, ésta no sería I_n, ya que el número de pivotes es menor que n.

8.7 Determinante, inversa, rango y equivalencia a la identidad

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}A = n \Leftrightarrow A \sim I \Leftrightarrow A$ es producto de matrices elementales.

Ejemplo 8.5. *Determina si las siguientes matrices son invertibles.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>*Sol:*</u>

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = -2$ *El determinante es no nulo por tanto A es invertible*

  También se podría haber razonado que A es invertible ya que rg A = 3 (vemos que en la EG quedan 3 pivotes)

  Por tener tres columnas pivotales A es equivalente por filas a I_3 (sólo hace falta escalar las filas para hacer "unos" los pivotes y realizar la eliminación de Gauss-Jordan), lo cual indicaría también que la matriz es invertible.

- $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ *B no es invertible ya que su determinante es nulo.*

  Del resultado rg B=2 (en la EG quedan 2 pivotes) también se podría haber concluido que B no es invertible.

  Nótese, aunque no se haya formulado esta pregunta, que B no es equivalente a I_3

Ejemplo 8.6. *Determina el valor de c para que la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *sea invertible, analizando su equivalencia a la matriz identidad.*

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21(-2)} \\ F_{31(-2)}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & c-4 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{32(c-4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} = A_{esc}$$

Nótese que la operación $F_{32(c-4)}$ *puede realizarse cualquiera que sea el valor de c.*

- *Si* $c = 4$ *obtenemos la forma escalonada por filas* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *que no puede transformarse mediante operaciones elementales por filas en* I_3*, ya que sólo disponemos de dos pivotes.*

- *Si* $c \neq 4$ *podemos seguir operando a partir de* A_{esc} *hasta llegar a la identidad.*

$$A_{esc} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} \underset{F_{3\left(\frac{1}{-2(c-4)}\right)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que la operación $F_{3\left(\frac{1}{-2(c-4)}\right)}$ *puede realizarse por ser* $c \neq 4$.

En la forma escalonada vemos que la matriz tiene 3 pivotes, por tanto la matriz es equivalente a la identidad e invertible.

Resultado: *La matriz es invertible si y sólo si* $c \neq 4$

A modo de repaso realizaremos las transformaciones de Gauss-Jordan para llegar a I_3 *para el caso* $c \neq 4$:

$$\underset{\substack{F_{23(2)} \\ F_{13(-1)}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{12(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{2(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

8.8 Factorización de matrices equivalentes

En la Lección 5 de "Equivalencia de Matrices" obtuvimos que si $A_{m\times n}$ era equivalente a $B_{m\times n}$, entonces existía P invertible y Q invertible tales que $PAQ = B$, quedando P y Q definidas, respectivamente, por las operaciones elementales realizadas sobre las filas y las columnas de A para llegar a B.

Las lecciones 5, 6, 7 han permitido justificar que toda matriz invertible es producto de elementales, y que un producto de elementales se puede interpretar tanto como producto de elementales de filas como de elementales de columnas. Por tanto tenemos el resultado recíproco:

Si existe P invertible y Q invertible tales que $PAQ = B$, entonces A es equivalente a B.

RESUMEN:

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists P \text{ invertible } \text{ y } Q \text{ invertible tales que } A = PBQ.$$

8.9 Rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo

Dada una matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, se define **menor de orden** p de A, con $p \leq m$ y $p \leq n$, al determinante de la submatriz cuadrada de orden p que resulta de eliminar $m-p$ filas y $n-p$ de columnas de A. Nótese que no estamos definiendo el menor como la submatriz, sino como el determinante de esa submatriz.

Por ejemplo, considerada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, veamos algunos de sus menores:

El menor de orden 2 que toma las filas 1,2 y las columnas 1,4, es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

El menor de orden 2 que toma las filas 1,3 y las columnas 2,4, es: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$

El número de menores de orden 2 en esta matriz es 18, ya que existen 3 elecciones para el par de filas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a , 2^a y 3^a) y 6 para el par de columnas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a, 1^a y 4^a , 2^a y 3^a , 2^a y 4^a , 3^a y 4^a).

El número de menores de orden 3 en esta matriz es 4, ya que existen 4 elecciones para la terna de columnas (1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 ; 2,3,4).

Para una matriz de orden $m \times n$ el número de menores de orden p es:

$$\binom{m}{p} \times \binom{n}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

El primer factor corresponde al número de elecciones posibles de p filas y el segundo al número de elecciones posibles de p columnas.

Teorema 8.1. *Dada $A_{m\times n}$, rg$A$ es igual al orden del mayor menor no nulo de A.*

Por ejemplo, si una matriz $A_{5\times 8}$ tiene rango 3, entonces existe al menos un menor de orden 3 que no es nulo, y todos los menores de orden superior (los de orden 4 y los de orden 5 en este ejemplo) son nulos.

Búsqueda del rango sirviéndose de los menores

Básicamente extraído de J. de Burgos "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana". 1999. Segunda edición. McGraw Hill. Página 96.

Para hallar el rango de A, se toma un menor M_2 de orden 2 no nulo y se le orla con una fila fija, la i, y con sucesivas columnas; si todos los menores de orden 3 que así se obtienen son nulos, entonces se prescinde de la fila i, y se repite el proceso con otra o con otras filas hasta: 1) encontrar un menor M_3 de orden 3 no nulo, en cuyo caso el rango es al menos 3; ó 2) descubrir que todos los menores de orden 3 son nulos, en cuyo caso el rango es 2. Si hay un menor M_3 no nulo, se le orla con una fila y con sucesivas columnas, siguiendo el mismo proceso que con M_2, lo que nos lleva o bien a que el rango es 3 (si todos los menores de orden 4 son nulos) o bien a que el rango es al menos 4 (en cuanto se encuentre un menor de orden 4 no nulo). Siguiendo así , se llega a un menor no nulo del mayor tamaño posible; este tamaño es el rango.

Ejemplo 8.7. *Determina el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a & a(a-1) \end{bmatrix}$ *basándote en sus menores.*

Sol.:

Las dos primeras filas y las dos primeras columnas forman un menor M *de orden 2 no nulo, de valor 12. Por existir menor de orden 2 no nulo ya sabemos que el rango de A es igual o mayor que 2.*

Orlando este menor vemos que solo tenemos una posibilidad de filas, que es la fila 3, y dos posibilidades de columna. Denotamos M_1 *y* M_2 *a los menores obtenidos con las columnas tercera y cuarta respectivamente.*

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \qquad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & a(a-1) \end{vmatrix}$$

Por cofactores de la tercera fila tenemos:

$$M_3^{(1)} = 12a \qquad M_3^{(2)} = a(a-1)12$$

$rgA = 2 \Leftrightarrow M_3^{(1)} = 0$ *y* $M_3^{(2)} = 0$ *Los dos menores de orden 3 han de ser nulos.*

$$\begin{cases} M_3^{(1)} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ M_3^{(2)} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = 1 \end{cases}$$

Por tanto $rgA = 2 \Leftrightarrow a = 0$

Analicemos ahora el resto de casos, es decir, el caso $a \neq 0$. *Para ese caso* $M_3^{(1)} \neq 0$, *por tanto al tener un menor no nulo de orden 3 el rango es como mínimo 3. Como la matriz tiene 3 filas este es además el rango máximo, por tanto para* $a \neq 0$ *el rango es 3.*

Conclusión: $\begin{cases} \text{rango A} = 2 \Leftrightarrow a = 0 \\ \text{rango A} = 3 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$

Ejemplo 8.8. *Determina el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & a & b \end{bmatrix}$ *basándote en sus menores.*

Sol.:

Las dos primeras filas y las dos primeras columnas forman un menor M *de orden 2 no nulo, de valor 12. Por existir menor de orden 2 no nulo ya sabemos que el rango de A es igual o mayor que 2.*

Orlando este menor vemos que solo tenemos una posibilidad de filas, que es la fila 3, y dos posibilidades de columna. Denotamos como $M_3^{(1)}$ *y* $M_3^{(2)}$ *a los menores obtenidos con las columnas tercera y cuarta respectivamente.*

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} \qquad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 7 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-4 \end{vmatrix}$$

Por cofactores de la tercera fila tenemos:

$$M_3^{(1)} = (2-a)12 \qquad M_3^{(2)} = (b-4)12$$

- $rgA = 2 \Leftrightarrow M_3^{(1)} = 0$ *y* $M_3^{(2)} = 0$ *Los dos menores de orden 3 han de ser nulos.*

$$\begin{cases} M_3^{(1)} = 0 \Leftrightarrow a = 2 \\ M_3^{(2)} = 0 \Leftrightarrow b = 4 \end{cases}$$

Por tanto $rgA = 2 \Leftrightarrow a = 2$ *y* $b = 4$.

- *rgA = 3 en el resto de los casos, es decir,* $\Leftrightarrow a \neq 2$ *o* $b \neq 4$.

En efecto, si $a \neq 2$ *tenemos que el menor de orden 3* $M_3^{(1)}$ *no se anula, y si* $b \neq 4$ *tenemos que el menor* $M_3^{(2)}$ *no se anula. Basta con que* <u>*no se anule*</u> *uno de los dos menores para que A tenga rango 3. Si no se anula ninguno de los dos es obvio que también tenemos rango 3.*

8.10 Aplicación de los determinantes para el cálculo de áreas y volúmenes

1) El área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

Teniendo en cuenta que $|A| = |A^t|$, podríamos también colocar los vectores en las filas.

Tomando en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el área del paralelogramo que definen es:

$$\text{Area} = |\ |\ \vec{u}\ \vec{v}\ |\ | = |\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\ |$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O, por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector $\vec{u}$.

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector $\vec{v}$.

Este paralelogramo tiene vértices consecutivos U, O, V.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B y C, usaríamos:

$\vec{u} = \vec{AB}$ $\qquad$ $\vec{v} = \vec{AC}$

2) El volumen de un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

De nuevo podríamos también colocar los vectores en las filas.

Tomando en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el volumen del paralelepípedo que definen es:

$$\text{Volumen} = |\ |\ \vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}\ |\ | = |\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}\ |$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O, por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector $\vec{u}$.

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector $\vec{v}$.

$\vec{w} = \vec{OW}$, siendo W el extremo del vector $\vec{w}$.

El vértice principal es O y U, V y W son los vértices adyacentes.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B, C y D usaríamos:

$\vec{u} = \vec{AB}$ $\qquad$ $\vec{v} = \vec{AC}$ $\qquad$ $\vec{w} = \vec{AD}$

Ejemplo 8.9. *a) Considerado el paralelogramo en* $\mathbb{R}^2$ *con vértices consecutivos* $A = (-2, -2)$, $B = (0, 3)$, $C = (4, -1)$, *calcula su área.*

Presentamos su solución en MATLAB

```
A=[-2 -2]'; B=[0 3].'; C=[4 -1]';
abs  (det([A-B C-B]))
ans
28
```

La solución es 28 unidades al cuadrado.

b) Considerado el paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ *con un vértice en* $A = (1, 1, 1)$ *y vértices adyacentes en* $B = (3, 3, 6)$, $C = (5, 7, 3)$ *y* $D = (4, -10, 9)$, *calcula su volumen.*

```
A=[1 1 1]' ;
B=[3 3 6]' ;
C=[5 7 3]' ;
D=[4 -10 9]' ;
abs(det([B-A C-A D-A]))
ans
222
```

El volumen tiene 222 unidades al cubo.

8.11 Ejercicios

OBSERVACIÓN PARA RESOLUCIÓN CON MATLAB: Si trabajas con matrices que incluyen variables simbólicas puedes hacer uso de la función **det()** pero no de las funciones **rank()** ni **rref()**, ya que en general darán resultados erróneos.

Ejercicio 8.1. *Calcula el siguiente determinante, desarrollándolo por cofactores de la tercera fila.*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 8.2. *Demuestra que*

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Ejercicio 8.3. *Demuestra que* $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ *sin efectuar el desarrollo correspondiente.*

Ejercicio 8.4. *Halla el valor de los siguientes determinantes de orden n*

$$a) \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} \quad , \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

Ejercicio 8.5. *Obtén la inversa de la matriz A a partir de la traspuesta de su matriz de cofactores.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8.6. *Dadas las matrices:* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 & 3 \\ 4 & 5.2 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{bmatrix}$ *,* $B = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 1 \\ 5.2 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$ *y* $C = \frac{1}{3}\,A$

- *Escribe la ecuación que relaciona $|A|$ y $|B|$ y justifica el resultado.*

Ecuación:

Justificación:

- *Escribe la ecuación que relaciona $|A|$ y $|C|$ y justifica el resultado.*

Ecuación:

Justificación:

Ejercicio 8.7. *Determina los valores de a y b para que la matriz* $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$ *sea invertible. Para ello obtén una forma escalonada por filas de A y a partir de esta analiza $|A|$.*

Ejercicio 8.8. *Dada las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, *determina para cada una de ellas:*

a) Una forma escalonada por filas
b) La forma reducida por filas
c) El rango
d) El determinante
e) La inversa si existe

Ejercicio 8.9. *Consideradas las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, *obtén para cada una de ellas una matriz equivalente por filas con el triángulo inferior nulo, y a partir de estas determina el rango y si es invertible o no, en función del parámetro a.*

rg(A)=1 si y solo si: .... *rg(A)=2 si y solo si: ....*
rg(A)=3 si y solo si: .... *rg(A)=4 si y solo si: ....*
A invertible si y solo si: ....

rg(B)=1 si y solo si: .... *rg(B)=2 si y solo si: ....*
rg(B)=3 si y solo si: .... *rg(B)=4 si y solo si: ....*
B invertible si y solo si: ....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese.

Ejercicio 8.10. *Demuestra que si A es nihilpotente, entonces $|A| = 0$.*

Ejercicio 8.11. *Si A es una matriz idempotente, ¿ cuales son los valores posibles de $|A|$?.*

Ejercicio 8.12. *¿ Para qué valores de a es la matriz A <u>no invertible</u>?.*

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & -3 \\ 5 & 1-a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8.13. *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, *encuentra un razonamiento rápido que permita afirmar que su rango es 3.*