Aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$
$\vec{x} \longmapsto \vec{y} = A\vec{x}$

4.1 Matriz estándar A de la aplicación lineal (eso es un recordatorio del Tema 1)

Se utiliza la base estándar o base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) \quad \overset{\text{A.L.}}{\Rightarrow} \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \ldots + x_n f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n)\,]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

$$\boxed{A = [\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \ldots \;\; f(\vec{e}_n)\,] \qquad A\,\vec{x} = \vec{y}} \qquad [1]$$

$\vec{x}$ está en coordenadas estándar
$\vec{y}$ está en coordenadas estándar
A es la matriz estándar de f

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$$

4.2 Imagen y núcleo

- **Im f** El subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las imágenes.

  $\text{Im}f = \{f(\vec{x}) \ : \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$
  Por comodidad trabajamos con la base canónica.

  Cada vector de Imf es una combinación lineal de los $f(\vec{e}_i)$.
  Las coordenadas de $\vec{x}$ son los coeficientes que se usan en la combinación lineal de salida o imagen.
  Ya que Imf es el conjunto de las imágenes de todos los $\vec{x}$, tendremos en Imf todas las combinaciones lineales posibles de los $f(\vec{e}_i)$.

  $\text{Im}f = < f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n) > = \text{Col } A$, siendo $A = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)]$ la matriz estándar de f.

  La base de $\text{Im}f$ se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{ f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, quedándonos con los vectores correspondientes a las columnas pivotales de A.

  dim Imf = número de columnas de A l.i. = rg$A$.

- **Núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ Se denota $\text{Ker}f$ y es el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^n$:

  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

  Teniendo en cuenta que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, Ker $f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}A$

- **Dimensiones de Imf y Ker$f$**
  Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, con matriz asociada A. Teniendo en cuenta que Imf=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

  $$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f} \qquad [2]$$

  $$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

  Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de A es igual al nº de no pivotales, que es igual al nº de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el nº de pivotales, que es igual al rg$A$ y dimensión de la imagen.

  De la relación de dimensiones anterior se deduce que A invertible o de rango n si y solo si Imf=$\mathbb{R}^n$ si y sólo si Ker$f$= $\{\vec{0}\}$

Recordatorio:

Una aplicación entre dos conjuntos se dice que es sobreyectiva si el conjunto final y la imagen de la aplicación coinciden.
Una aplicación se dice que es inyectiva si todo par de elementos distintos, en el conjunto inicial, tiene imágenes distintas.
Cuando una aplicación es sobreyectiva e inyectiva se dice que es biyectiva.

Observación importante: Si de una aplicación f sabes que es biyectiva y te preguntan si es inyectiva tienes que contestar que sí. El hecho de que además de ser inyectiva sea sobreyectiva no le quita la propiedad de ser inyectiva.
Lo mismo sucede si sabes que una aplicación es biyectiva y te preguntan si es sobreyectiva, tienes que contestar que sí.

En este tema tratamos aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, es decir matrices estándar cuadradas, y en este caso la aplicación lineal o es inyectiva y sobreyectiva a la vez (rg$A$=n) o no es ni inyectiva ni sobreyectiva (caso contrario).

La justificación es sencilla. Si rg(A)=n, entonces $A\vec{x} = \vec{y}$ es compatible determinado para todo $\vec{y}$, por lo que todos los vectores tienen antecedente y sólo uno, lo que implica, respectivamente, sobreyectividad e inyectividad. Si por el contrario rg(A)$<$ n, entonces fallan las dos propiedades: existirán vectores sin antecente (casos de sistema incompatible) y vectores con más de un antecedente (los casos en los que el sistema es indeterminado, como por ejemplo en el caso de los antecedentes del vector $\vec{0}$).

AMPLIACIÓN: Para las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, con $n \neq m$, Imf y Ker$f$ se definen de forma análoga, a partir de la matriz asociada $A_{m\times n}$.

Imf = Col $A = < f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n) >$
Ker(f) = Nul $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ A\vec{x} = \vec{0}\}$

Las dos expresiones encuadradas en la página anterior se cumplen también para las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$: la dimensión del espacio inicial, es decir n, es igual a la suma de la dimensión del subespacio formado por las imágenes, que es igual al rango de A, y la dimensión de Nul$A$.
La diferencia con el caso $m = n$ es que si $m = n$ Imf y Ker$f$ son ambos subespacios de $\mathbb{R}^n$, mientras que si $m \neq n$, entonces Ker$f$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$ (el inicial) e Imf es subespacio de $\mathbb{R}^m$ (el final).

Para el caso $m \neq n$ la inyectividad no lleva aparejada la sobreyectividad, ni la sobreyectividad lleva aparejada la inyectividad. Puede verse en estos ejemplos:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. La aplicación es sobreyectiva porque todo $\mathbb{R}^2$ es imagen, y no es inyectiva porque ya vemos que el vector $(0, 0)$ tiene más de un antecedente (sistema compatible indeterminado).
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. La aplicación no es sobreyectiva porque hay vectores de $\mathbb{R}^3$ que no tienen antecedente. Sí es inyectiva porque los vectores que están en la imagen tienen un único antecedente (sistema compatible determinado para los vectores que se encuentran en $< (1, 0, 3), (2, 1, 2) >$).

4.3 Cambio de base de un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$

- **Trabajando en base estándar**

$$\boxed{A = [\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \ldots\ f(\vec{e}_n)\,] \qquad A\,\vec{x} = \vec{y}}$$

$\vec{x}$ está en coordenadas estándar $\qquad \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$

$\vec{y}$ está en coordenadas estándar $\qquad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$

- **Trabajando en base B**

$$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n) \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n f(\vec{b}_n)$$

Ahora premultiplicamos los dos miembros por B^{-1}, pues así cambiamos $\vec{y}$ y los $f(\vec{b}_i)$ de coordenadas estándar a coordenadas relativas a la base B.

$$B^{-1}\,\vec{y} = c_1 B^{-1} f(\vec{b}_1) + c_2 B^{-1} f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n B^{-1} f(\vec{b}_n)$$

$$[\vec{y}]_B = c_1\,[f(\vec{b}_1)]_B + c_2\,[f(\vec{b}_2)]_B + \ldots + c_n\,[f(\vec{b}_n)]_B$$

$$\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix} = \underbrace{[\,[f(\vec{b}_1)]_B\ [f(\vec{b}_2)]_B\ \ldots\ [f(\vec{b}_n)]_B\,]}_{F} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$[\vec{y}]_B$ $\qquad$ F $\qquad$ $[\vec{x}]_B$

$$\boxed{\begin{array}{c} F = [\,[f(\vec{b}_1)]_B\ [f(\vec{b}_2)]_B\ \ldots\ [f(\vec{b}_n)]_B\,] \\ F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \end{array}} \qquad [3]$$

Tomamos del vector de partida sus coordenadas relativas a la base B: $[\vec{x}]_B$
La transformación produce las coordenadas de la imagen relativas a la base B: $[\vec{y}]_B$
F es la matriz de f relativa a la base B, porque usa coordenadas relativas a la base B, tanto para el vector original como para el transformado.

$$\vec{x} = c_1\,\vec{b}_1 + c_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n\,\vec{b}_n$$

$$\vec{y} = c'_1\,\vec{b}_1 + c'_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c'_n\,\vec{b}_n$$

- **Obtención operativa de** $F = [\ [f(\vec{b}_1)]_B\ \ [f(\vec{b}_2)]_B\ \ \ldots\ \ [f(\vec{b}_n)]_B\ ]$

  Igual que las columnas de A se obtenían mediante las imágenes de los vectores de la base canónica, expresando las imágenes en base canónica, ahora las columnas de F se determinan como las imágenes de los vectores de la base B, en coordenadas relativas a la base B.

- **Relación entre** A **y** F**, dada base** B

  Si nos fijamos en la matriz $[\ f(\vec{b}_1)\ \ f(\vec{b}_2)\ \ \ldots\ \ f(\vec{b}_n)\ ]$, teniendo en cuenta que $f(\vec{b}_i) = A\vec{b}_i$, se deduce que:

  $AB = [\ f(\vec{b}_1)\ \ f(\vec{b}_2)\ \ \ldots\ \ f(\vec{b}_n)\ ]$

  Y como para obtener F tenemos que expresar cada $f(\vec{b}_i)$ respecto de la base B, tenemos que pre-multiplicar esos vectores por B^{-1}. Por tanto nos queda:

  $F = B^{-1}AB$. Esta es una importantísima factorización que relaciona la matriz asociada a f respecto de la base B con la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

  De la ec. anterior se deduce fácilmente que la factorización también se puede escribir así: $A = BFB^{-1}$.

  Denotamos como $[4]$ cualquiera de estas dos factorizaciones. Se denominan factorizaciones porque se expresa una matriz como producto de otras (los factores).

$$\boxed{A = BFB^{-1}} \qquad [4]$$

  ¿Cómo calcular $B^{-1}AB$ a partir de A y B (para obtener F)?

  - Determinamos B^{-1} y seguidamente efectuamos el producto de matrices $B^{-1}AB$
  - Podemos evitar la pre-multiplicación por B^{-1} (y el cálculo de la inversa) aplicando el método de Gauss-Jordan de resolución de sistemas lineales:

    $[\ B \mid AB\ ] \sim \ldots \sim [\ I \mid F\ ]$ (F es la solución de $BF = AB$, o lo que es lo mismo $F = B^{-1}AB$)

- **Otra justificación de $A = B\,F\,B^{-1}$**

  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ $\qquad B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\ ]$ $\qquad \vec{x} = B\,[\vec{x}]_B$ $\qquad \vec{y} = B\,[\vec{y}]_B$

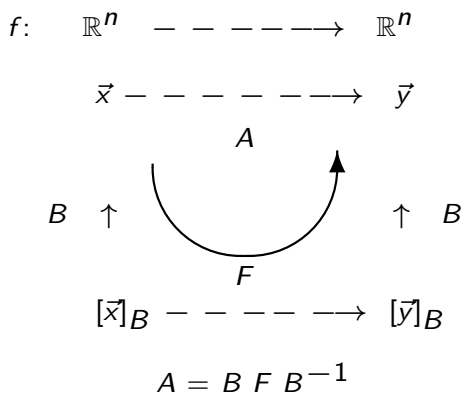
  La ec. $F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ la podemos reescribir como: $F\,B^{-1}\,\vec{x} = B^{-1}\,\vec{y}$

  Premultiplicando por la izda. por B: $B\,F\,B^{-1}\,\vec{x} = \vec{y}$

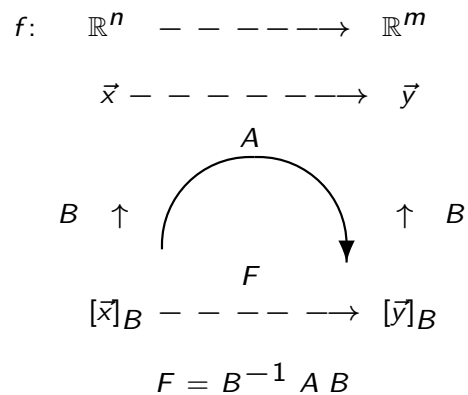
  Por otra parte, $A\vec{x} = \vec{y}$, por lo que igualando las dos últimas ecuaciones: $\boxed{A = B\,F\,B^{-1}}$

- **Justificación gráfica para interpretar $A = B\,F\,B^{-1}$ como composición de aplicaciones lineales**

  Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a f y a los cambios de base.



$A = B\,F\,B^{-1}$



$F = B^{-1}\,A\,B$

En el esquema de la izquierda podemos ver A como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha F como composición de tres aplicaciones lineales.

Fijándonos en la izquierda vemos que A se puede entender como la composición de tres pasos:

1) pasar de $\vec{x}$ a $[\vec{x}]_B$, con B^{-1}.
2) aplicar la función en base B, con la matriz F
3) pasar el resultado a base estándar, con B.

$A = B\,F\,B^{-1}$

- **Invariantes entre las matrices A y F**
  - **Matrices semejantes**
    - Definición: M_1 y M_2 matrices cuadradas se dice que son semejantes si existe una matriz P invertible tal que $M_1 = PM_2P^{-1}$.
      Obviamente también se cumple que existe una matriz P tal que $M_2 = PM_1P^{-1}$. Esta P sería la inversa de la matriz P del párrafo anterior.
    - Tres propiedades:
      Las matrices semejantes entre sí tienen el mismo rango, el mismo determinante, y la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).
  - Las matrices A y F son semejantes entre sí, ya que cumplen la factorización requerida. Por tanto:
    - A y F tienen el mismo rango.
    - tienen el mismo determinante. Deducción obvia desde el resultado anterior.
    - tienen la misma traza.

Ejercicio 4.1. Considera el endomorfismo f en $\mathbb{R}^2$ tal que $f((1,1)) = (3,3)$ y $f((-1,1)) = (1,-1)$.

a) Determina la matriz F asociada a f respecto de la base $B = \{(1,1),(-1,1)\}$.

b) Determina la matriz A asociada a f respecto de la base canónica.

c) Comprueba los tres invariantes.

Solución:

- **Apartado a)**

  Teniendo en cuenta que $F = [\,[\,f(\vec{b_1}]_B\,[f(\vec{b_2}]_B\,]$, vamos a expresar los transformados de los vectores $\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$ respecto de la base B.

  Para $f((1,1))$:

  $f((1,1)) = (3,3) = 3(1,1) = 3(1,1) + 0(-1,1)$ $\Rightarrow$ las coordenadas buscadas son $(3,0)$.

  Para $f((-1,1))$:

  $f((-1,1)) = (1,-1) = -1(-1,1) = 0(1,1) - 1(-1,1)$ $\Rightarrow$ las coordenadas buscadas son $(0,-1)$.

  Por tanto $F = [\,[\,f(\vec{b_1}]_B\,[f(\vec{b_2}]_B\,] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- **Apartado b)**

  $A = BFB^{-}1$

  Obtenemos B^{-1} que resulta ser $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

  Efectuamos los productos y obtenemos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- **Apartado c)** En A y en F el determinante es 3, el rango es 2 (las dos columnas son l.i.) y la traza es 2.

4.4 Endomorfismos con interpretación geométrica sencilla

En $\mathbb{R}^2$. Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^2$ giro de ángulo θ alrededor del origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ respecto de todas las bases ortonormales[4] de $\mathbb{R}^2$ con orientación positiva (determinante positivo de la matriz que tiene por columnas los vectores base).

  Por tanto también respecto de la base estándar, ya que es base ortonormal y de orientación positiva.

  $0 \leq \theta \leq \pi$ o $-\pi \leq \theta < 0$

  α positivo o sentido positivo corresponde al giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj.
  α negativo corresponde al giro en el sentido de las agujas del reloj.

  Giro de ángulo 0 = Matriz I. Esta misma matriz para cualquier base.

  Giro de ángulo π = Simetría respecto del origen. Matriz $-I$. Esta misma matriz para cualquier base.

[4] Los vectores son unitarios y ortogonales entre sí, es decir: $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal o reflexión respecto de una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

  $$\begin{cases} f(\vec{a}) = 1\vec{a} + 0\vec{b} \\ f(\vec{b}) = 0\vec{a} - 1\vec{b} \end{cases} \qquad F = [\,[\,f(\vec{a})\,]_B\,[\,f(\vec{b})\,]_B\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  Dado $\vec{a} = (a_1\,,\,a_2)$, un vector $\vec{b}$ sencillo ortogonal a $\vec{a}$ es $\vec{b} = (-a2,\,a1)$ o $\vec{b} = (a2,\,-a1)$

- En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

  $$\begin{cases} f(\vec{a}) = 1\vec{a} + 0\vec{b} \\ f(\vec{b}) = 0\vec{a} + 0\vec{b} \end{cases} \qquad F = [\,[\,f(\vec{a})\,]_B\,[\,f(\vec{b})\,]_B\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- En $\mathbb{R}^2$ contracción de factor k o dilatación de factor k

  Esta transformación tiene la matriz asociada $k\,I$ respecto de cualquier base. También se denomina escalamiento uniforme.

  Contracción: $0 < k < 1$
  Dilatación: $k > 1$

  Para $k = 1$ la matriz asociada es I.

- En $\mathbb{R}^2$ escalamiento anísotropo o no uniforme en dos direcciones l.i.

  Escalamientos de factores k_1 y k_2, con $k_i > 0$ y $k_1 \neq k_2$.
  Esta transformación tiene la matriz asociada $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores base de las direcciones de escalamiento k_1 y k_2 respectivamente.

  Si el escalamiento es uniforme, de factor k, la matriz asociada es $k\,I$ respecto de cualquier base.

• Para pasar de la matriz relativa a la base natural $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de la transformación, a la matriz estándar, si no son la misma, se debe aplicar:

$$\boxed{A = B\,F\,B^{-1}},$$

siendo F la matriz del endomorfismo referida a la base natural B y $B = [\,\vec{a}\ \vec{b}\,]$.

Deben comprobarse los tres invariantes: traza, rango y determinante. En $\mathbb{R}^2$ estos cálculos son sencillos.

En $\mathbb{R}^3$. Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^3$ giro de ángulo θ alrededor del eje dirigido según el vector $\vec{v}$

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}\}$, teniendo $\vec{n}$ la dirección y sentido de $\vec{v}$.

  Para θ positivo se produce el giro de acuerdo con el criterio de la mano derecha, con el pulgar apuntando según $\vec{v}$, y los demás dedos en el sentido del giro.

- En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal o reflexión respecto de un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano (o lo que es lo mismo, ortogonal a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$).

- En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Otras dos transformaciones lineales sencillas son el escalamiento uniforme y el escalamiento no uniforme, en ambos casos sobre tres direcciones linealmente independientes.

  En el segundo caso $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada relativa a la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, que da las direcciones de los tres escalamientos, en el mismo orden.

  Si el escalamiento es uniforme, de factor k, la matriz asociada es $k\,I$ independientemente de la base utilizada.

- De nuevo, para pasar de la matriz F relativa a la base natural de la transformación, a la matriz estándar A, se usala fórmula, $A = B\,F\,B^{-1}$. Una vez obtenida pueden comprobarse los invariantes. Obviamente la comprobación más sencilla es la de la traza.

4.5 Ejercicios

4.2. Dada la aplicación lineal con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

a) Obtén una base de Imf.
b) Obtén una base de Ker$f$.
c) Razona si la aplicación lineal es o no sobreyectiva[5].
d) Razona si la aplicación lineal es o no inyectiva[6].
e) Obtén la imagen de $(2, 7, 0)$.
f) Determina el/los antecedentes de $(6, 9, a)$ en función de a.

4.3. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definida por:

$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, 1)$ $\quad$ $(0, 1, 0) \longmapsto (2, 0, -3)$ $\quad$ $(0, 0, 1) \longmapsto (0, 0, 4)$

a) Halla la matriz estándar asociada a f.
b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2, -3, 5)$
c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, -5, 4)$

4.4. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$. Determina una base de Ker$f$ en función del parámetro c.

4.5 Dada la aplicación lineal f con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de Imf. *Es decir, base y dimensión de ColA*
b) Una base y la dimensión de Ker$f$. *Es decir, base y dimensión de NulA*
c) Calcula una base del subespacio $f(V)$, siendo $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x1 = x4, x3 = 0\}$. Concepto de **imagen de subespacio**.
d) Calcula una base del subespacio $f(W)$, siendo $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x4 = 0\}$.

---

[5] Recuerda que sobreyectiva significa que Imf y el espacio final son el mismo

[6] Recuerda que inyectiva significa que cada elemento de Imf tiene un único antecedente

4.6 Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:

a) simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\, x$

b) proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\, x$

Considerada la figura con los vértices P, Q, R y T dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simétrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$M = (6, 7)$		
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

4.7 Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x + y + z = 0$.

a) Determina una base B respecto de la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible. Escribe también dicha matriz.

b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

4.8 Resuelve el ejercicio anterior tomando f correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$.

4.9 La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ produce un **estiramiento** en la dirección x_1. Representa la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = 1$ y esboza a su alrededor las imágenes $A\vec{x} =$ con $\vec{x} = (x_1, x_2)$. ¿Cual es la forma de la figura resultante?. ¿En qué factor varía el área de la segunda figura respecto de la primera?.

G. Strang. Linear Algebra and its Applications. Edición 4. Wellesley Cambridge Press. 2009. Pg. 149. Ejercicio 3. (Ampliado).

4.10 Dada la aplicación lineal f en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtén la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1, -1, 0), (-2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9. Pearson 2015. Pg. 212. Ejemplo 2.

Añadido: Comprueba los tres invariantes: determinante, rango y traza.

4.11 a) En $\mathbb{R}^3$, obtén la matriz estándar A correspondiente al giro de 90 grados en sentido positivo respecto del eje dirigido según el vector $(0, 0, 1)$. b) Obtén la matriz estándar de la siguiente composición de transformaciones: en primer lugar el giro anterior, y a continuación dilatación de factor 4 según el eje Z.

4.12 En $\mathbb{R}^2$, interpreta geométricamente, cualitativa y cuantitativamente, la transformación lineal con la matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.13 En $\mathbb{R}^3$ demuestra los siguientes resultados:
a) La matriz estándar A de la simetría respecto de un plano es una matriz **involutiva**, es decir $AA = I$.
b) La matriz estándar A de la proyección sobre un plano es una matriz **idempotente**, es decir $AA = A$.

4.14 Igual al ejercicio anterior, pero en $\mathbb{R}^2$: simetría respecto de una recta y proyección sobre una recta.

4.15 En $\mathbb{R}^3$ considera el giro de 30 grados en sentido antihorario respecto del eje orientado definido por $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

a1) Obtén una base B respecto de la cual la matriz de la transformación sea lo más sencilla posible.

a2) Obtén la matriz asociada a la transformación, respecto de la base B anterior.

b) Obtén la matriz asociada a la transformación, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, o lo que es lo mismo, la matriz estándar de la transformación.