3 Espacios Vectoriales
- 3.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos
- 3.2 Combinación lineal, conjunto generado y dependencia lineal
- 3.3 Subespacio vectorial. Subespacio generado
- 3.4 Base y dimensión de un espacio vectorial
- 3.5 Formas paramétrica e implícita de los subespacios de $\mathbb{R}^n$
- 3.6 Coordenadas
- 3.7 Ejercicios Parte 1
- 3.8 Matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^n$
- 3.9 Subespacios Col$A$, Nul$A$ y relación entre sus dimensiones
- 3.10 Intersección y suma de subespacios de $\mathbb{R}^n$
- 3.11 Ejercicios Parte 2

# 3.1 Definición de espacio vectorial. Ejemplos

**3.1.1 Definición**

Un conjunto $V$ de elementos se dice que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, si en el se han definido dos operaciones:
la suma, $+$, de manera que a cada par de elementos $u$ y $v$ de $V$ se le haga corresponder el elemento $u + v$ de $V$,
y la multiplicación por un número real, de tal manera que a cada par de elementos $u$ de $V$ y $\alpha$ de $\mathbb{R}$ se le haga corresponder el elemento $\alpha u$ de $V$, cumpliéndose además los siguientes axiomas:

Para la suma

A1 Conmutativa: $\forall\ u, v \in V,\ u + v = v + u$

A2 Asociativa: $\forall\ u, v, w \in V,\ u + (v + w) = (u + v) + w$

A3 Existencia de elemento neutro: $\exists\ 0_V \in V\ /\ u + 0_V = u \quad \forall\ u \in V$

A4 Existencia de elemento opuesto: $\forall u \in V \quad \exists\ -u \in V\ /\ u + (-u) = 0_V$

Para la multiplicación por un escalar

A5 $1u = u$ 1 es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}$. Se le denomina elemento unidad de $V$.

A6 Pseudoasociativa respecto de la multiplicación por escalares: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \quad \forall u \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Distributivas

A7 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de vectores[6]: $\alpha(u + v) = \alpha v + \alpha v \quad \forall u, v \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

A8 De la multiplic. por escalar respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall u \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Es importante volver a señalar explícitamente la condición dada en la definición de que las dos operaciones sean cerradas, o axiomas de cierre:

C1 $\forall\ u, v \in V,\ u + v \in V$ C2 $\forall u \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u \in V$

Debido a que la multiplicación es "por un número real", se dice que el conjunto $V$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o que es un espacio vectorial real.

[6] A los elementos de un espacio vectorial se les designa con frecuencia con el nombre genérico de vectores, heredando la nomenclatura de los elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

### 3.1.2 Propiedades

De la definición de Espacio Vectorial se infieren las siguientes propiedades:

- Por la propiedad conmutativa:
  $0_V + u = u$ $\qquad\qquad$ $-u + u = 0_V$
- El elemento neutro de un espacio vectorial es único.
- El elemento opuesto de cada elemento de un espacio vectorial es único.
- $\forall u \in V \quad 0\ u = 0_V$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha\ \ 0_V = 0_V$
- $\alpha u = 0_V \quad \Rightarrow \alpha = 0 \ \ o \ \ u = 0_V$
- $(-1)\ \ u = -u$
- La combinación de las operaciones de multiplicación por un escalar y suma es la operación conocida como combinación lineal.
  La combinación lineal de los elementos $u$ y $v$ (o vectores $u$ y $v$ de $V$) con escalares $\alpha$ y $\beta$ de $\mathbb{R}$ es $\alpha\ u + \beta\ v$, y pertenece a $V$.

### 3.1.3 Ejemplos

(ver HVZ12, pgs. 145-146)
Para justificar que un conjunto es espacio vectorial hay que comprobar que se cumplen los 10 axiomas.

- El conjunto $\mathbb{R}^2$ de los vectores en el plano.
- El conjunto $\mathbb{R}^3$ de los vectores en el espacio.
- El conjunto $\mathbb{R}^n$ de los vectores con $n$ componentes o entradas.
- El conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de todas las matrices reales de $m$ filas y $n$ columnas.
- El conjunto de las funciones reales de variable real continuas y definidas en el intervalo $[a, b]$ es espacio vectorial.
  Def. de la suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad$ Def. de la multiplicación por un real: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

- El conjunto $P_n$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que $n$.

  Los elementos de $P_n$ se definen por la expresión: $p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$

  Un polinomio tiene grado $k$ si $a_k \neq 0$ y $a_i = 0$ para todo $i > k$.

  Definición de la suma:

  Sean $p_1(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ y $p_2(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, entonces

  $p(x) = p_1(x) + p_2(x) = (a_o + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$

  Definición de la multiplicación por un real:

  Sean $p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
  $\alpha p(x) = \alpha a_o + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_nx^n$

### 3.1.4 Ejemplos de conjuntos que no son espacios vectoriales

Para justificar que no lo son basta con que no se cumpla uno de los 10 axiomas.

**Ejerc. 3.1** Demuestra que los siguientes conjuntos no son espacios vectoriales.

- Conjunto de las matrices de orden $n$ de determinante cero, con las operaciones de suma y multiplicación por escalar estudiadas. Es subconjunto del espacio vectorial formado por las matrices cuadradas.
- El conjunto de los polinomios de grado exactamente $n$. Es subconjunto del espacio vectorial formado por los polinomios de grado $\leq n$.
- El subconjunto $W$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, definido como $W = \{(a, 1) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$
  (Observa que $W$ es la recta de $\mathbb{R}^2$ de ecuación $y = 1$).

### 3.2.1 Definiciones

Sea $V$ espacio vectorial real y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$.

- Se dice que $v \in V$ es combinación lineal de los elementos de $S$ si
  $\exists\ c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}\ /\ v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$.

  A los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ se les llama pesos o coeficientes de la combinación lineal. Los pesos pueden tomar cualquier valor real incluido el 0.

- El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los elementos de $S$ se denomina conjunto generado por $S$ y se denota $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$ o $< S >$.

- Se dice que el conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es linealmente dependiente si existen $p$ reales $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$[7], no todos cero, tales que

  $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p = 0_V$ **[1]**

  Una ecuación como **[1]**, en la que no todos los coeficientes son cero, se denomina relación de dependencia lineal del conjunto.

- Se dice que $S$ es linealmente independiente si y sólo si no es linealmente dependiente.

  Es decir, si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p = 0_V \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, p$

### 3.2.2 Propiedades en relación con la dependencia e independencia lineal

- $\{0_V\}$ es conjunto linealmente dependiente.
- $S$ formado por dos elementos es linealmente dependiente si y sólo si un elemento es múltiplo del otro.
- $S$ es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si al menos un elemento de $S$ puede expresarse como combinación lineal del resto.

En la Sección 1.2 se adelantaron algunas de estas definiciones y propiedades para los vectores de $\mathbb{R}^n$.

[7] Se ha incluido el paréntesis para recalcar que los coeficientes actúan de forma agrupada

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se cumplen estos resultados:
  - No puede haber conjuntos linealmente independientes formados por más de $n$ vectores. Justificación: La matriz cuyas columnas son los vectores tendrá $n$ filas, y por tanto no puede tener más de $n$ columnas pivotales, tendrá como máximo $n$.
  - $n$ vectores que formen las $n$ columnas de una matriz $A_n$ son l.i. si y solo si la matriz $A$ es invertible.

### 3.2.3 Ejercicios

- **Ejerc. 3.2** En el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2 por 2, obtén la combinación lineal de las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, tomando como coeficientes 2 y $-2$, respectivamente.

- **Ejerc. 3.3** Justifica que en el espacio vectorial de las funciones reales de variable real, continuas, y definidas en el intervalo $[\, a\ ,\ b\,]$, las funciones $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ y $h(x) = 1$ forman un conjunto linealmente dependiente. (HVZ12 pg. 151).

- **Ejerc. 3.4** Considera el espacio vectorial $P_2(x)$ y determina si los siguientes conjuntos de polinomios son linealmente dependientes o linealmente independientes.

  a) $A = \{p(x), q(x)\}$, con $p(x) = 1 + x$, $q(x) = 1 + 3x$.

  b) $B = \{p(x), q(x), r(x)\}$, con $p(x) = 1 + x + x^2$, $q(x) = 1 - x + 3x^2$, $r(x) = 2 + 5x^2$.

  c) $C = \{p(x), q(x), r(x)\}$, con $p(x) = 1 + x + x^2$, $q(x) = 1 - x + 3x^2$, $r(x) = 2 + 4x^2$.

  d) $D = \{p(x), q(x), r(x)\}$, con $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $q(x) = 2 - 2x + 3x^2$, $r(x) = 7 + 8x + ax^2$. Determina en función del valor de $a$. Para el caso en el que el conjunto es linealmente dependiente, escribe una relación de dependencia lineal.

### 3.3.1 Definición

Sea $V$ espacio vectorial y $H$ un subconjunto no vacío de $V$. Se dice que $H$ es subespacio vectorial de $V$, si $H$ es, en sí mismo, espacio vectorial con las mismas operaciones.

$H \subseteq V$, no vacío, es subespacio de $V$ si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

C1 $\forall\, u, v \in H,\ u + v \in H$ C2 $\forall u \in H$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha u \in H$

Basta por tanto con que se cumplan los axiomas de cierre.

$\{0_V\}$ es subespacio vectorial de $V$. Se denomina subespacio cero de $V$.

El espacio vectorial completo $V$ puede considerarse subespacio vectorial de sí mismo. A los subespacios de $V$ que no son el propio $V$ los denominamos subespacios estrictos.

### 3.3.2 Ejemplos

Para justificar que un conjunto es subespacio vectorial basta con demostrar que se cumplen los dos axiomas de cierre. Para justificar que no lo es basta con encontrar un ejemplo en el que no se cumpla uno de los axiomas. Dicho ejemplo se denomina **contraejemplo**.

- En $\mathbb{R}^3$ todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales. Puedes fijarte, gráficamente, en que la suma y el producto por un real son cerrados tanto en las rectas que pasan por el origen como en los planos que pasan por el origen.
- Los polinomios de grado menor o igual que $n$ con coeficientes reales, $P_n(x)$, son subespacio de las funciones continuas reales de variable real.
- El conjunto formado por la unión de los polinomios de grado igual a $n$ *con todos los coeficientes iguales* junto con *el polinomio cero*, es subespacio del espacio vectorial $P_n(x)$, formado por los polinomios con coeficientes reales de grado igual o inferior a $n$.
- Las matrices cuadradas de orden $n$ *diagonales* son subespacio del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden $n$.

### 3.3.3 Definición de subespacio generado

Dado $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$, $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$ es subespacio vectorial de $V$. Se le denomina subespacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Lo habíamos llamado en la sección anterior subconjunto generado. Precisamos ahora que es subespacio. En efecto lo es porque se cumplen los axiomas de cierre: la suma de combinaciones lineales es una c.l. de los mismos vectores, y la multiplicación de una c.l. por un real es también c.l. de los mismos vectores.
Decimos del conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ que es conjunto generador o sistema generador del subespacio vectorial $< v_1, v_2, \ldots, v_p >$.

- Por ejemplo $S_1 = \{1, x, x^2\}$ es sistema generador del espacio vectorial formado por todos los polinomios de grado menor o igual que 2, $P_2$. Ese espacio vectorial se puede escribir como $< 1, x, x^2 >$.
  $S_2 = \{1, x, x^2, x + 2x^2\}$ también es sistema generador de $P_2$. La diferencia entre $S_1$ y $S_2$ es que el conjunto $S_1$ es l.i. mientras que $S_2$ es l.d.
- $< \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} >$ es el subespacio formado por las matrices diagonales $2 \times 2$.

### 3.3.4 Subespacio nulo de una matriz

El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo con $n$ incógnitas es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. (En la Secc. 1.2 vimos que la suma soluciones de un SLH es también solución y que el producto de una solución por un real es también solución. Se cumplen los dos "axiomas de cierre", por tanto es subespacio). Recuerda que la solución o soluciones de un SL son vectores (de $\mathbb{R}^n$ si se tienen $n$ incógnitas).

Tomando $A \in M_{m \times n}$ como matriz de coeficientes, $A\vec{x} = \vec{0}$ es el SLH.
Si $A\vec{x}_1 = \vec{0}$ , $A\vec{x}_2 = \vec{0}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0}$ y $A\alpha\vec{x}_1 = \vec{0}$.

El conjunto de soluciones se conoce como subespacio nulo de $A$, y se denota Nul$(A)$ o $\mathrm{N}(A)$.

Nul$(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\vec{x} = \vec{0}\}$

Nul$(A)$ es subconjunto de $\mathbb{R}^n$, al estar formado por vectores de $\mathbb{R}^n$.

También se designa a este subespacio como núcleo de $A$ o $\ker(A)$.

Ejemplo: Dado el SL $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, obtén el subespacio formado por sus soluciones, expresado en forma vectorial paramétrica.

Nul$(A) = \{(2, -1)\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\} =< (-2, 1) >$

Para simplificar la notación también nos referiremos a este subespacio como Nul$A$, sin usar los paréntesis para la matriz $A$.

### 3.3.5 Todo espacio vectorial es un subespacio generado

Hay espacios vectoriales que sólo tienen un elemento: los que están formados exclusivamente por el elemento neutro $O_V$. Para el resto de espacios vectoriales $V$, siempre existe un conjunto generador de la forma $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ tal que $V =< v_1, v_2 \ldots, v_p >$. Dicho de otra forma, todo espacio vectorial es un subespacio generado.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$:
  1. El espacio vectorial $< (1,1,1) >$ es la recta que pasa por el origen, con vector generador (1,1,1).
  2. El espacio vectorial $< (1,1,1), (2,2,1) >$ es un plano que pasa por el origen, con vectores generadores (1,1,1) y (2,2,1). Es así no porque sean dos vectores, sino porque son dos y l.i.
     Por ejemplo $< (1,1,1), (2,2,2) >=< (1,1,1) >$. Los conjuntos $S = \{(1,1,1), (2,2,2)\}$ y $S' = \{(1,1,1)\}$ son sistemas generadores de la misma recta.
  3. El espacio vectorial $< (1,0,0), (0,2,0), (1,1,1) >$ es $\mathbb{R}^3$, ya que tenemos tres vectores l.i., y por tanto todo vector $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como comb. lineal de esos tres vectores.
- En el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales $2 \times 2$.
  4. $\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\}$ es sistema generador del subespacio formado por las matrices diagonales.
  5. $\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\}$ es sistema generador del subespacio formado por las matrices simétricas.
- En el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3:
  6. $\{1 + x + x^2 + x^3\}$ es sistema generador del subespacio formado por los polinomios que tienen todos los coeficientes iguales.

# 3.4 Base y dimensión de un espacio vectorial

Sea un espacio vectorial $V$. Un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ se dice que es base de $V$ si es conjunto generador de $V$ y linealmente independiente.

En el ejemplo 2 anterior $S$ y $S'$ son conjunto/sistema generador de la recta $< (1,1,1) >$, pero sólo $S'$ es base de la recta. $S$ no lo es porque el conjunto es l.d.

Se verifican los siguientes resultados:

- $v \in V$ se escribirá de forma única como c.l. de los vectores del conjunto generador $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ si y solo si ese conjunto es linealmente independiente, o lo que es lo mismo si ese conjunto es base.

- Todas las bases de $V$ tienen el mismo número de vectores. A ese número se le denomina dimensión de $V$, denotado $\dim V$.

  El espacio vectorial cero no tiene base, por ser $\{O_V\}$ un conjunto l.d. Se le asigna, por definición, dimensión cero.

  $$\dim \mathbb{R}^n = n \qquad \dim P_n = n+1 \qquad \dim M_{m\times n} = m \times n$$

  La dimensión de un espacio vectorial marca el mínimo número de vectores necesarios para ser conjunto generador, y el máximo número posible para ser conjunto l.i.

Sea $V$ de dimensión $d > 0$:

- Todo subconjunto que genere $V$ tendrá al menos $d$ vectores.
  - Si tiene $d$ serán l.i. y por tanto base.
  - Si tiene $p > d$ será conjunto l.d. Si se elimina uno a uno cada vector del conjunto que sea c.l. del resto, los vectores que quedan, que serán $d$, serán l.i. y por tanto base.
- Todo subconjunto de $V$ l.i. tendrá $p \leq d$ vectores.
  - Si Si tiene $d$ vectores el conjunto es sistema generador y por tanto base.
  - Si $p < d$ el conjunto puede ampliarse con $d - p$ vectores (que formen con el anterior un conjunto total l.i.) para formar una base de $V$.

**Ejerc. 3.5** Encuentra una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $\{(0,0,1,1),(1,1,0,0)\}$. (HVZ12, ejerc. 6, pg. 160).

**Ejerc. 3.6** Determina para qué valores de $a$ los vectores $\vec{u}_1 = (a,0,1)$, $\vec{u}_2 = (0,1,1)$ y $\vec{u}_3 = (2,-1,a)$ forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. (HVZ12, ej. 15, pg. 162).

**Ejerc. 3.7** En $\mathbb{R}^3$, obtén una base del subespacio generado por el conjunto $S = \{(1,0,1),(-1,1,0),(1,1,2)\}$. (HVZ12, pg. 163).
*Añadido: Obtén una relación de dependencia lineal entre los vectores de $S$.*

**Base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$**

Los vectores dados por las columnas de la matriz real $I_n$ son elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y se denotan como $\vec{e}_i$, con $i$ desde 1 hasta $n$.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \ldots , \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al conjunto $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ se le denomina **base canónica o estándar de** $\mathbb{R}^n$.

- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es sistema generador de $\mathbb{R}^n$, ya que el sistema lineal de matriz ampliada $[\,\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n \mid \vec{v}\,]$ es compatible para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, pues $\text{rg}A = n = \text{rg}A^*$, y por tanto todo $\vec{v}$ puede escribirse como c.l. del conjunto $B$.

- $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, puesto que esos vectores, dispuestos como columnas en la matriz $I_n$ corresponden todos a columnas pivotales (en este caso la matriz coincide con su forma escalonada reducida).

$\{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$
$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$

# 3.6 Formas paramétrica e implícita de los subespacios de $\mathbb{R}^n$

Todo subespacio $H$ de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de las combinaciones lineales o conjunto generado por sus vectores base.

Para $H$ con dimensión $d$, podemos expresar $H =< \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d >$, siendo $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ base de $H$. $\vec{b}_i \in H$ y a su vez a $\mathbb{R}^n$.

Los vectores de $H$ se expresan en forma vectorial paramétrica (o forma explícita) como:

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_d \vec{b}_d$, con $\alpha_i$ parámetros libres.

La expresión anterior nos muestra que $H$ es el conjunto de las soluciones $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de un SLH con $n$ incógnitas y $d$ paramétros libres, por tanto con $n - d$ ecuaciones.

Los vectores de $H$ se expresan en forma implícita mediante las ecuaciones de las que son solución. En concreto un SLH con $m = n - d$ ecuaciones independientes, que expresamos con la ec. matricial $A_{m \times n}\vec{x} = \vec{0}$.

En el documento Tema3-EV-supl-param-impli.pdf tienes material suplementario de justificaciones teóricas de la obtención de las ecuaciones a partir de la base por dos métodos. También tienes ejemplos, tanto de lo anterior como del paso de ecuaciones a base.

*Paso de ecuaciones a base:* Si un subespacio $H$ de $\mathbb{R}^n$ viene dado en un ejercicio mediante un SLH, la base de $H$ se obtiene resolviendo el SLH. Las $d$ soluciones independientes forman la base de $H$.

*Paso de base a ecuaciones mediante cualquiera de los dos métodos siguientes:*

- Partiendo de una base $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d\}$ las ecuaciones implícitas en las variables $x_1, \ldots, x_n$ pueden obtenerse sin más que imponer que el siguiente sistema lineal sea compatible:

  $[\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ]$, con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, dejando los $x_i$ como variables.

  En efecto $\vec{x} \in < \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_d > \Leftrightarrow [\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ]$ es compatible.

  La ecuación que da lugar al SLH buscado es:

  $\text{rg}([\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d\ ]) = \text{rg}([\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ])$, dejando los $x_i$ como variables, o lo que es lo mismo:

  $\text{rg}([\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d \mid \vec{x}\ ]) = d$, dejando los $x_i$ como variables.

- Se obtiene una base de Nul( $[\ \vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_d\ ]^t$ ). Esos vectores base puestos como filas forman una matriz $A$ que es matriz de coeficientes de las ecs. implícitas.

# 3.5 Coordenadas

La razón principal de elegir una base de un espacio vectorial en vez de un conjunto generador es que cada vector $v$ de ese espacio puede escribirse de una sola manera como combinación lineal de los vectores de la base.

Sea $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ una base del espacio vectorial $V$, entonces $\forall v \in V$, $v$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de la base. A los coeficientes o pesos $c_1, c_2, \ldots, c_d$, tales que $v = c_1 b_1 + \ldots + c_d b_d$ se les denomina coordenadas de $v$ relativas a la base $B$.

Las coordenadas, que son $d$ reales, se pueden almacenar como un vector, denominado vector de coordenadas de $v$ respecto a $B$.

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$$

Notación en el espacio $\mathbb{R}^n$

- El vector de coordenadas de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto de una base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ se expresa de acuerdo con la notación indicada cómo:

  $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, partiendo de $\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \ldots + c_n \vec{b}_n$

- Cuando las coordenadas están referidas a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, utilizamos la notación:

  $\vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, prescindiendo de los corchetes y de la referencia a la base.

  $\vec{x} = c_1 \vec{e}_1 + \ldots + c_n \vec{e}_n$,

  Más usual es expresar $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, denotando las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a la base canónica como $x_i$. A estas coordenadas las denominamos coordenadas canónicas o coordenadas estándar de $\vec{x}$ $\quad \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \ldots + x_n \vec{e}_n$,.

**Ejerc. 3.8**

- **a)** $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ significa que $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ tiene coordenadas $(2, 3, 4, 5)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, o lo que es lo mismo, que $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 5\vec{e}_4$

  Respecto de la base $B = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ las coordenadas de $\vec{x}$ son: $[\vec{x}]_B = (2, 1, 1, 1)$. Compruébalo.

- **b)** Considerado el subespacio vectorial $H$ de $\mathbb{R}^3$, con base $B = \{(1, 1, 1), (2, 2, 1)\}$, determina si el vector $\vec{x} = (5, 5, 6)$ pertenece o no a $H$, y en caso afirmativo obtén sus coordenadas relativas a la la base $B$.

**Ejerc. 3.9**

- **a)** Considerando en $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{(5,1),(2,3)\}$ y el vector $\vec{v}$ de coordenadas (4,3) respecto de la base $B$, determina las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

  El vector $\vec{v}$ se obtiene así: $\quad 4\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}26\\13\end{bmatrix}$

  o, escribiendo la combinación lineal como producto matriz-vector: $\quad \begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}26\\13\end{bmatrix}$

  $$B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ ] = \begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} \qquad \boxed{B\quad [\vec{v}]_B = \vec{v}} \qquad \textbf{[ 2 ]}$$

- **b)** Considerando en $\mathbb{R}^2$ la base $B = \{(5,1),(2,3)\}$ y $\vec{v} = (26,13)$, determina las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base $B$.

  Hay que obtener $(c_1, c_2)$ tales que $c_1(5,1) + c_2(2,3) = (26,13)$. O lo que es lo mismo, hay que resolver el SL de matriz ampliada $[\ B \mid \vec{v}\ ]$ **[ 3 ]**.

  Resolviendo $\left[\begin{array}{cc|c}5 & 2 & 26\\1 & 3 & 13\end{array}\right]$ obtendremos como solución, obviamente, $[\vec{v}]_B = (4,3)$

  Teniendo en cuenta que $B$ es invertible, la solución del sistema también se puede obtener así:

  $$\boxed{[\vec{v}]_B = B^{-1}\vec{v}} \quad \textbf{[ 4 ]}\ .$$

  Esta ecuación también se puede obtener de **[ 2 ]** sin más que premultiplicar ambos miembros por $B^{-1}$.

  - La ecuación **[ 2 ]** nos da la transformación desde $[\vec{v}]_B$ a $\vec{v}$, es decir, de coord. en base $B$ a coord. estándar.
  - La ecuación **[ 4 ]** da la transformación desde $\vec{v}$ hasta $[\vec{v}]_B$, es decir, de coord. estándar a coord. relativas a base $B$. En la práctica requiere menos operaciones resolver el sistema (método **[ 3 ]**) que calcular la inversa y después premultiplicar por ella (la obtención de la inversa es la que requiere en general más operaciones).

# 3.7 Ejercicios Parte 1

**Ejerc. 3.10** Considera el conjunto $S = \{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \}$

¿Es el conjunto $S$ sistema generador del subespacio $H$ de $\mathbb{R}^4$ de ecuación implícita $x_4 = 0$?. ¿Es base de $H$?. Razona las respuestas.

**Ejerc. 3.11**

a) Determina una base y la dimensión del subespacio Nul($A$), para $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

El enunciado también podía haber sido: "Determina una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones implícitas $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , $2x_1 + x_2 + x_4 = 0$."

b) Determina una base y la dimensión del subespacio Nul($A$), siendo $A = [\ 1\ 1\ 1\ ]$.

El enunciado también podía haber sido: "Determina una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación implícita $x_1 + x_2 + x_3 = 0$."

**Ejerc. 3.12** Determina la/s ecuación/es implícitas de $H =< (2, -1, 0), (3, 0, -1) >$. $H$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$. *En $\mathbb{R}^n$ se denominan hiperplanos a los subespacios de dimensión $n - 1$.*

**Ejerc. 3.13** Sean $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ , $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}$ , $\vec{x} = \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ base de $H =< \vec{b}_1, \vec{b}_2 >$.

a) Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a $B$.
b) Obtén la ec/ecs. implícita/s del subespacio vectorial $H$.
c) A partir del resultado anterior obtén una nueva base $B'$ de $H$ que sea lo más sencilla posible (es decir con el mayor número posible de ceros).

**Ejerc. 3.14** Obtén la/s ec./ecs. implícita/s de $H =< (1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1) >$ utilizando los dos métodos que conoces. *Está resuelto en el material suplementario.*

**Ejerc. 3.15** Obtén la/s ec./ecs. implícita/s del subespacio de $\mathbb{R}^5$ de base $B = \{(1, 2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1\}$. (En HVZ12 pgs. 164-165, ejemplo D).

**Ejerc. 3.16** Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base $B$ del subespacio $H$ generado por el conjunto y la dimensión de $H$. Razona la respuesta.

b) A partir de la base obtenida calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de $H$, denotando a las variables como $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$.

c) Escribe un vector de $\mathbb{R}^4$ que no pertenezca a $H$. Razona la respuesta.

d) Escribe las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$, sabiendo que sus coordenadas respecto de la base $B$ son (4,2,1), o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (4, 2, 1)$.

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base $B'$ de $H$ distinta de la base anterior $B$.

**Ejerc. 3.17** Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base $B$ del subespacio $H$ generado por el conjunto.

b) A partir de la base $B$, obtén la/s ec/ecs. implícita/s de $H$, denotando a las variables de $\mathbb{R}^4$ como $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$.

c) Obtén el o los valores de $a$ tales que $\vec{w} = (a, 4, -5, -10)$ pertenezca a $H$. Escribe "ninguno" o "para todo $a$" si ese es el caso.

d) Obtén la/s relacion/es de dependencia lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$, es decir las ecuaciones de la forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4 + c_5\vec{v}_5 = \vec{0}$ donde no todos los reales $c_i$ son cero, que se deriven del conjunto.

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base $B'$ de $H$ distinta de la base anterior $B$, que sea lo más sencilla posible (con el mayor número posible de ceros, y el mayor número posible de unos en los valores distintos de cero).

# 3.8 Matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^n$

1. Justificaciones teóricas

Se verifica el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en cualquiera de los libros de la bibliografía:

Considerados el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y dos bases $B$ y $B'$ del mismo, existe una matriz $P$ única tal que $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$, siendo $[\vec{x}]_B$ las coordenadas de un vector $\vec{x}$ cualquiera de $\mathbb{R}^n$ respecto de la base B, y $[\vec{x}]_{B'}$ las coordenadas de ese mismo vector respecto de la base $B'$.

Las columnas de dicha matriz $P$ son las coordenadas de los vectores de la base $B$, en su orden, respecto de la base $B'$,

$$\boxed{P = [\ [\vec{b}_1]_{B'}\ [\vec{b}_2]_{B'}\ \ldots\ [\vec{b}_n]_{B'}\ ]} \qquad \textbf{[ 5 ]}$$

La expresión **[ 5 ]** proporciona un método de obtención de $P$ que llamamos obtención de $P$ "por construcción"

Nótese:

$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n$ $\qquad$ $\vec{x} = c'_1\vec{b'}_1 + \ldots + c'_n\vec{b'}_n$

$[\vec{x}]_B = (c_1, \ldots, c_n)$ $\qquad$ $[\vec{x}]_{B'} = (c'_1, \ldots, c'_n)$

Fijándonos en **[ 5 ]** cada columna $i$ de $P$ se obtiene resolviendo el SL de matriz ampliada $[\ B' \mid \vec{b}_i\ ]$, siendo $B'$ la matriz cuyas columnas son los vectores de la base $B'$. Para obtener las $n$ columnas de $P$ hay que resolver los $n$ sistemas, cada uno con un $\vec{b}_i$ pero usando siempre la misma matriz de coeficientes $B'$. Por tanto resolveremos el SL como un sistema múltiple, de matriz ampliada $[\ B' \mid B\ ]$. Obviamente $B$ es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base $B$.

• Resolviendo el SL $[B'|B]$ con el método de Gauss-Jordan llegaremos a que la forma escalonada reducida de $B'$ es la identidad, ya que $B'$ es cuadrada de rango $n$ (sus columnas son base de $\mathbb{R}^n$, por fanto son $n$ vectores l.i. con $n$ entradas).

$$\boxed{[\ B' \mid B] \ \rightarrow\ \ldots\ \rightarrow\ [\ I \mid P\ ]} \qquad \textbf{[ 6 ]}$$

Obtención de $P$ resolviendo las ecs. lineales mediante Gauss-Jordan.

Aquí $B'$ actúa como matriz de coeficientes, $B$ como 'columna' de términos independientes, y $P$ es la solución, es decir $B'P = B$.

• También podríamos resolver el SL $[B'|B]$ teniendo en cuenta que $B'$ es invertible: $\boxed{P = B'^{-1}B}$ **[ 7 ]**, pero es más sencillo aplicar el procedimiento **[ 6 ]**, ya que la obtención de la inversa junto con la multiplicación de las matrices requiere de muchas más operaciones.

2. Transformación inversa: $[\vec{x}]_{B'}$ a $[\vec{x}]_B$.

$P$ es obviamente invertible, pues es producto de invertibles. $B$ es invertible por la misma razón que $B'$, esto es, por ser sus columnas base de $\mathbb{R}^n$.

Partiendo de $P[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$ y multiplicando ambos miembros por $P^{-1}$ tenemos, $[\vec{x}]_B = P^{-1}[\vec{x}]_{B'}$, por tanto $P^{-1}$ es la matriz de cambio de base de $[\vec{x}]_{B'}$ a $[\vec{x}]_B$. Denotando $Q = P^{-1}$, los resultados equivalentes a los anteriores para el cambio de base de $B'$ a $B$ son:

$$Q = [\ [\vec{b'}_1]_B\ [\vec{b'}_2]_B\ \dots\ [\vec{b'}_n]_B\ ] \qquad [\ B \mid B'\ ] \ \to\ \dots\ \to\ [\ I \mid Q\ ] \qquad Q = B^{-1}B'$$

En la práctica, si conocemos $P$ calcularíamos $Q$ directamente como la inversa de $P$.

3. Otra deducción de $P$

$$\begin{matrix} B\,[\vec{x}]_B = \vec{x} \\ B'[\vec{x}]_{B'} = \vec{x} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad B[\vec{x}]_B = B'[\vec{x}]_{B'} \quad \Rightarrow \quad B'^{-1}B\,[\vec{x}]_B = [\vec{x}]_{B'}$$

Hemos llegado a la ecuación **[7]** anterior, $P = B'^{-1}B$.

4. Ecuación **[ 7 ]** interpretada como composición de: Paso 1) cambio de base de $B$ a canónica, Paso 2) cambio de base de canónica a $B'$

Nótese en la ec. **[ 7 ]** que $P$ es la composición de dos transformaciones. Primero se aplica $B$ para transformar coordenadas relativas a la base $B$ a coordenadas estándar (relativas a la base canónica). Seguidamente se resuelven las coordenadas estándar respecto de la base $B'$ para obtener las coordenadas en $B'$. Y resolver no es más que premultiplicar las coordenadas estándar por $B'^{-1}$.

5. Matriz de cambio de base de base $B$ a base canónica

En la ecuación **[ 5 ]** tomamos la base canónica como $B'$, obteniendo:

$$P = [\ [\vec{b}_1]_{Bcan}\ [\vec{b}_2]_{Bcan}\ \dots\ [\vec{b}_n]_{Bcan}\ ] = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_n\ ] = B$$

Encontramos lo que ya conocíamos: la matriz de cambio de base de base $B$ a la base canónica es $B$, de forma que $B[\vec{x}]_B = \vec{x}$

**Observación:** No todo lo presentado en esta sección es aplicable si en vez de trabajar con las bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ trabajamos con las bases de un subespacio $H$ de $\mathbb{R}^n$ con dimensión estrictamente menor que $n$. La expresión **[ 5 ]** sigue siendo válida, sin embargo no se puede aplicar la expresión **[ 7 ]** ya que la matriz $B'$ (al igual que la matriz $B$) no es invertible, ya que aunque las columnas son l.i. la matriz no es cuadrada. La matriz $P$ sí es invertible. No trataremos en este curso cambios de base en subespacios estrictos de $\mathbb{R}^n$, únicamente en el propio $\mathbb{R}^n$.

**Ejerc. 3.18** Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y en él las bases $B = \{\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\}$ y $B' = \{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\}$

a) Obtén la matriz de $P$ de cambio de coordenadas de base $B$ a base $B'$.

b) Sabiendo que las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base $B$ son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, obtén sus coordenadas respecto de la base $B'$.

c) ¿Cuáles son las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$?

Solución:

**a)** Obtención de $P$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

La matriz de cambio de coordenadas de la base $B$ a la base $B'$ es: $\boxed{P = \begin{bmatrix}3 & 5/2\\ -2 & 1/2\end{bmatrix}}$

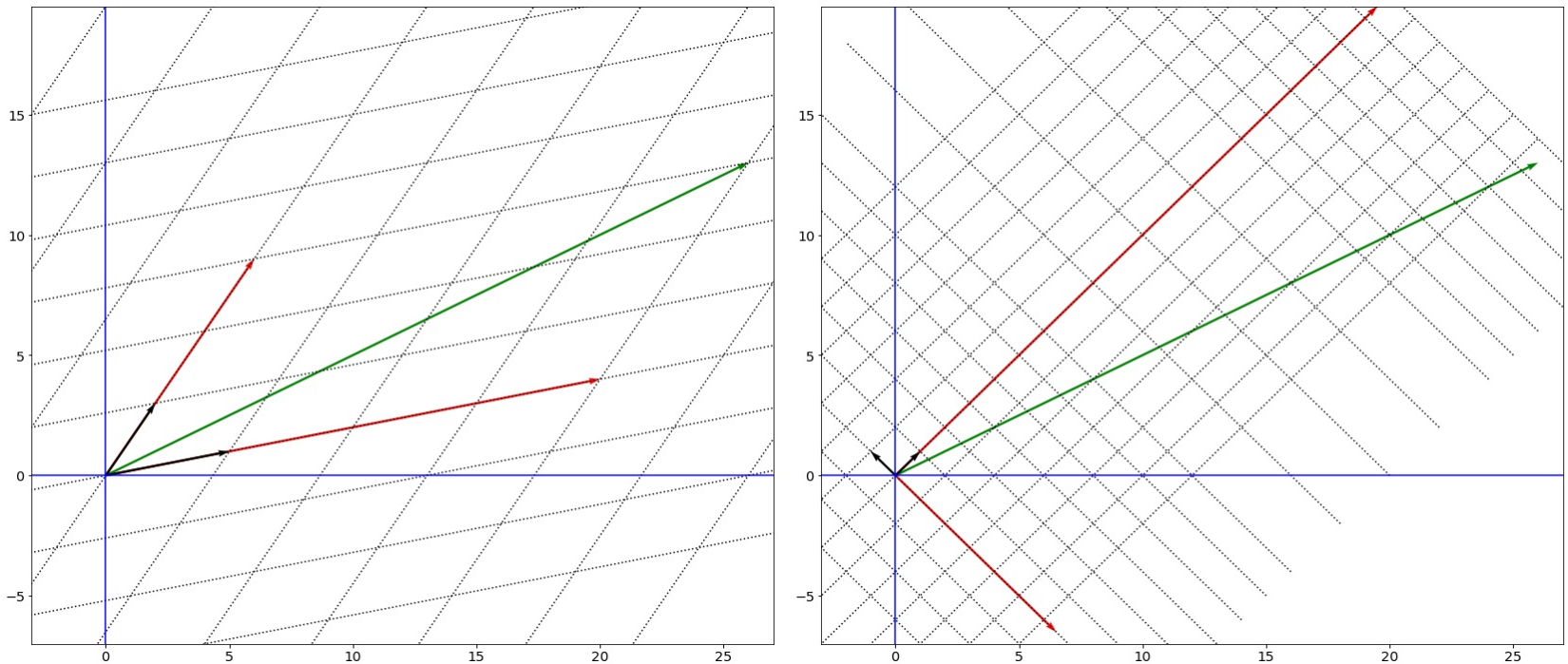
**b)** $P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B'}$, por tanto: $[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix}3 & 5/2\\ -2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}39/2\\ -13/2\end{bmatrix}$ $\boxed{\begin{bmatrix}39/2\\ -13/2\end{bmatrix}}$

**c)** $B[\vec{v}]_B = \vec{v}$, por tanto: $\vec{v} = \begin{bmatrix}5 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}26\\13\end{bmatrix}$ $\boxed{\begin{bmatrix}26\\13\end{bmatrix}}$

**Conclusiones sobre coordenadas de $\vec{v}$:**

- $\vec{v}$ tiene coordenadas (4,3) en base $B = \{(5,1),(3,2)\}$.
- $\vec{v}$ tiene coordenadas (39/2,-13/2) en base $B' = \{(1,1),(-1,1)\}$
- $\vec{v}$ tiene coordenadas (26,13) en $B_{\text{can}} = \{(1,0),(0,1)\}$

En la figura izquierda vemos en negro los vectores de la base $B$, $(5, 1)$ y $(2, 3)$. En verde vemos el vector $\vec{v}$, que tiene coordenadas $(4, 3)$ en esta base. Se marca en rojo el vector igual a las cuatro unidades del primer vector base, y el vector igual a las tres unidades del segundo vector base.
En la figura derecha vemos en negro los vectores de la base $B'$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$. El vector $\vec{v}$, en verde, tiene coordenadas $(39/2, -13/2)$ respecto de esta base. Se marca en rojo el vector igual a $39/2$ unidades del primer vector base, y el vector igual a las $-13/2$ unidades del segundo vector base.




Comparación entre las coordenadas del vector $\vec{v} = (26, 13)$ relativas a dos bases distintas. El vector está representado en verde y los vectores que forman cada base en negro (una base en el panel izquierdo y otra en el derecho). Cada vector rojo es el producto de uno de los vectores base por su correspondiente coordenada, de forma que la suma de los dos vectores rojos es el vector verde.

**Ejerc. 3.19**

a) Demuestra que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$
$B_1 = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1, 1), \vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$
$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1, 2, 0, 0), \vec{u}_2 = (0, 1, 2, -1), \vec{u}_3 = (1, -1, -1, -1), \vec{u}_4 = (0, 1, 1, 1)\}$
b) Encuentra las coordenadas del vector $\vec{x} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ relativas a la base $B_2$
c) Obtén la matriz de cambio de coordenadas de la base $B_1$ a la base $B_2$.

(Los dos primeros apartados son prácticamente iguales a los del ejercicio 10, pg. 161 de HVZ12)

**Ejerc. 3.20** Sean las bases de $\mathbb{R}^3$:
$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
y $B' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \vec{u'}_3\}$ con $\vec{u'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{u'}_2 = \vec{e}_2$ y $\vec{u'}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$,
siendo los $\vec{e}_i$ los vectores de la base canónica.
a) Justifica que ambos conjuntos son base.
b) Obtén las coordenadas en la base $B'$ del vector $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$
c) Obtén la matriz de cambio de base de $B$ a $B'$.
d) Obtén las coordenadas de $\vec{x}$ en la base estándar.

(HVZ12 ejemplo A, pg. 158. Cambiando ligeramente el enunciado y ampliándolo).

# 3.9 Subespacios Col$A$, Nul$A$ y relación entre sus dimensiones

Consideramos la matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Col}A$ denota el subespacio generado por las columnas de $A$, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de $A$.

$A = [\ \vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2 \ \ \ldots \ \ \vec{a}_n\ ] \qquad \mathrm{Col}A = < \vec{a}_1\ ,\ \vec{a}_2\ ,\ \ldots\ ,\ \vec{a}_n >$

Nótese que Col$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$, pues las columnas de $A$ son vectores de $m$ entradas ($m$ filas).

Obviamente dim ( Col$A$ ) = rg($A$), pues las columnas de $A$ que sean c.l. de otras hay que quitarlas para obtener la base.

Recordemos que el subespacio nulo de $A$, denotado $\mathrm{Nul}A$, es el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\vec{x} = \vec{0}\}$.

Nul$A$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$, y obviamente dim ( Nul$A$ ) = $n$ − rg($A$).

La dimensión del subespacio nulo de $A$ o núcleo de $A$ es el número de soluciones independientes en el SLH o, lo que es lo mismo, el grado de indeterminación del SLH.

Se obtiene entonces:

$$\boxed{\text{dim ( Nul}A\text{ ) + dim ( Col}A\text{ ) } = n}$$

**Ejerc. 3.21** Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de Col$A$.
b) Una base y la dimensión de Nul$A$.
c) Nul$A$ te permite obtener las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de $A$. Si el núcleo no resulta ser el vector $(0, 0, 0, 0, 0)$ (lo que es obvio en este caso al tener menos ecuaciones que variables), escribe la/s relación/es de dependencia lineal entre dichas columnas, denotándolas como $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ y $\vec{a}_5$ (por ese orden en $A$).

# 3.10 Intersección y suma de subespacios de $\mathbb{R}^n$

INTERSECCIÓN

- Sean $H$ y $F$ subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define intersección de $H$ y $F$ así :
  $H \bigcap F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ : \ \vec{v} \in H \ \text{y} \ \vec{v} \in F\}$
  Obviamente, $H \bigcap F \subseteq H$ , $H \bigcap F \subseteq F$ , $H \bigcap F = H \Leftrightarrow H \subseteq F$.
- $H \bigcap F$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$. $\dim(H \bigcap F) \leq \dim H$ y $\dim(H \bigcap F) \leq \dim F$
- Los vectores de $H \bigcap F$ son los que cumplen a la vez las ecuaciones implícitas de $H$ y las ecuaciones implícitas de $F$, por tanto las ecuaciones implícitas de $H \bigcap F$ se obtienen uniendo las ecuaciones de $H$ y de $F$, y eliminando en el sistema lineal homogéneo resultante las ecuaciones que sean combinación lineal de otras.
  Las ecuaciones redundantes se convierten en filas de ceros en la eliminación gaussiana del SLH.
  Resolviendo las ecuaciones de $H \bigcap F$ se obtiene la base de $H \bigcap F$.
- **Ejemplos sencillos en** $\mathbb{R}^3$
  - $H = \{(x, y, z) \ : \ z = 0\}$ Plano XY
    $F = \{(x, y, z) \ : \ y = 0\}$ Plano XZ

    $H \bigcap F = \{(x, y, z) \ : \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ Eje X
    Base de $H \bigcap F = \{(1, 0, 0)\}$
  - $G = \{(x, y, z) \ : \ y = 0 \ , \ z = 0\}$ Eje X
    $T = \{(x, y, z) \ : \ x = 0 \ , \ z = 0\}$ Eje Y

    $G \bigcap T = \{(x, y, z) \ : \ x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$
  - $H = \{(x, y, z) \ : \ z = 0\}$ Plano XY
    $F =< (1, 1, 1) >$ Recta no incluida en el Plano XY
    Las ecs. implícitas de $F$ son $x = y$, $x = z$

    $H \bigcap F = \{(0, 0, 0)\}$ ; $x = y = z = 0$

**Ejerc. 3.22** Considera los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes:
$H$ dado por la ec. $x + y + z = 0$
$F$ dado por la ec. $x + y + az = 0$ siendo $a$ una variable
Obtén una base de $H \bigcap F$ en función de $a$.

Sol: Resolviendo el SL conjunto obtienes:
Si $a = 1$ $B = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$
Si $a \neq 1$ $B = \{(1, -1, 0)\}$

SUMA

- Sean $H$ y $F$ subespacios de $\mathbb{R}^n$, se define suma de $H$ y $F$ así :

  $H + F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ : \ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \ \text{ con } \ \vec{v}_1 \in H \ \text{ y } \ \vec{v}_2 \in F\}$

  $H \subseteq H + F \ , \ F \subseteq H + F \ , \ H + F = H \Leftrightarrow F \subseteq H.$

  Observación: $H + F \neq H \bigcup F$
  (se puede analizar por ejemplo tomando $H$: eje $X$ y $F$: eje $Y$ en $\mathbb{R}^3$. La suma es el plano $XY$ y es subespacio, sin embargo la unión de los dos ejes no es subespacio.)

- $H + F$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

  $$\dim(H + F) \geq \dim H \ \text{ y } \ \dim(H + F) \geq \dim F.$$

- La unión de una base de $H$ y una base de $F$ es conjunto generador de $H + F$.

  Podemos escribir la afirmación anterior así: Dadas $B_H$ base de $H$ y $B_F$ base de $F$, entonces $H + F =< B_H \bigcup B_F > =$ Col ( $[\ B_H \ B_F\ ]$ )

  $B_H \bigcup B_F$ es conjunto generador de $H + F$. Para pasar de conjunto generador a base tenemos que eliminar los vectores dependientes, es decir, que sean combinación lineal del resto.

  dim $(H + F) \leq \dim H + \dim F$, con la igualdad en el caso de que la unión de las bases de $H$ y $F$ sea conjunto l.i. y por tanto directamente base.

  $$\dim(H + F) = \text{rango} \ (\ [\ B_H \ B_F\ ]\ )$$

- Se dice que $H + F$ es suma directa si $\dim(H+F) = \dim H + \dim F$. Se denota $H \bigoplus F$.

  Por tanto la suma directa es directa si y solo si: $\text{rango}\,(\ [\ B_H\ B_F\ ]\ ) = \text{rango}\ B_H + \text{rango}\ B_F$

- Sea $H$ subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $G$ es subespacio complementario de $H$ si $H \bigoplus G = \mathbb{R}^n$.

  Basta por tanto con que se cumpla lo siguiente: $\text{rango}\ B_H + \text{rango}\ B_G = n$

- Todo subespacio $H$ de $\mathbb{R}^n$ tiene subespacio complementario.

  Obviamente $\mathbb{R}^n + \{\vec{0}\} = \mathbb{R}^n$ ($\{\vec{0}\}$ y $\mathbb{R}^n$ son complementarios uno de otro).

  Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ con dimensión $d$ tal que $1 \leq d \leq n-1$ tienen infinitos subespacios complementarios. Los dos subespacios restantes, $\{\vec{0}\}$ y $\mathbb{R}^n$, son, uno respecto a otro, el único complementario.

- **Ejemplos sencillos en** $\mathbb{R}^3$. Analizamos si la suma es directa o no y en caso afirmativo si los subespacios son complementarios entre sí o no.

  - $H =< (0,1,0) >$ eje Y
    $F =< (0,0,1) >$ eje Z

    Sol.:
    $B_H = \{(0,1,0)\}$ ; $B_F = \{(0,0,1)\}$
    Los dos vectores son l.i. entre sí, porque uno no es múltiplo del otro, por tanto juntos forman base de $H+F$.
    $B_{H+F} = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$
    La suma es directa $1+1=2$ No son complementarios porque su suma no es todo $\mathbb{R}^3$.

  - $H = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}$ $F =< (1,0,0) >$

    Sol.:

    $$\underset{F}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}_{H}$$

    , tiene rango 3 (determinante $1 \times -1 \times -1 \neq 0$ )

    $\text{rg}F = 1$ $\text{rg}H = 2$ $\text{rg}\,[\ F\ H\ ] = 3$

    $1+2=3=n$ La primera igualdad permite afirmar que la suma es directa y la segunda igualdad que son complementarios.

- $H$ es el plano XY $\qquad$ $F$ es el plano XZ
  Sol.:

  Base de $H = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ $\qquad$ $\dim H = 2$

  Base de $F = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$ $\qquad$ $\dim F = 2$

  $$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0}_{H} & & \underbrace{0 \quad 1}_{F} & \end{array}\right],$$

  Base de $H + F = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ $\qquad$ $\dim(H+F) = 3$
  (se elimina el vector de la tercera columna porque es c.l. de los anteriores)

  $2+2 > 3$ por tanto la suma no es directa.

  Al no ser la suma directa no son complementarios.

  En este caso pudimos reconocer fácilmente el vector "sobrante". En general será necesario obtener la forma escalonada de $[H\,F]$ para determinar qué vectores, es decir qué columnas, forman la base de la suma.

# 3.11 Ejercicios Parte 2

**Ejerc. 3.23** Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y) : y = 2x\}$ y otro sobre la recta $\{(x, y) : y = x/2\}$ (*Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90*).

**Ejerc. 3.24** Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
* el plano $\Pi$: $3x + 6y - z = 0$
* la recta $r$ : $\{(1, 2, 3)\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$

a) Obtén una base de $\Pi$.

b) ¿Es la suma de $\Pi$ y $r$ suma directa?. Justifica la respuesta.

c) ¿Son $\Pi$ y $r$ omplementarios entre sí?. Justifica la respuesta.

d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (4, -1, 42)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano $\Pi$ y un vector $\vec{v}_2$ de la recta $r$. En caso de que sea posible:

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.
Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano $\Pi$.
Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta $r$.
Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

**Ejerc. 3.25** Considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio $H = \{(x, y, z, t) : x - y + 2z + t = 0\}$.

a) Halla una base y la dimensión de $H$.
b) Halla la dimensión y una base de un subespacio complementario de $H$, denotándolo $G$.
c) Descompón $\vec{v} = (2, 1, 3, 0)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ de $H$ y un vector $\vec{v}_2$ de $G$.

**Ejerc. 3.26** a) Obtén una base de un subespacio $G$ complementario de $F =< (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4) >$ usando vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
b) Lo mismo para $F =< (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1) >$.

**Ejerc. 3.27** Dado el subespacio $H$ de $\mathbb{R}^4$ dado por: $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_4 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$
a) Obtén una base de $H$. b) Obtén una base de un subespacio $G$ complementario de $H$.
(*Basado en HVZ12 ejercicio 4.5.5 pg 175. En el libro solo apartado b)).*