2 Determinantes
- 2.1 Introducción
- 2.2 Definición de determinante
- 2.3 Propiedades de los determinantes
- 2.4 Inversa a partir de la traspuesta de la matriz de cofactores
- 2.5 Relación entre el determinante de A y el de una forma escalonada de A
- 2.6 Relación entre determinante, inversa, rango y forma escalonada reducida
- 2.7 Método de Cramer: resolución de SL $A_n\vec{x} = \vec{b}$ con A invertible
- 2.8 Rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo

Ejercicios

A toda matriz real cuadrada A_n le asociamos un real denominado **determinante de** A, $\det A$ o $|A|$ simbolizado así :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Su valor nos dirá si la matriz es singular o no.
Los determinantes nos proporcionan otro método para determinar inversas y facilitan la resolución de sistemas lineales (método de Cramer por ejemplo).

Presentamos/repasamos varias definiciones y propiedades de las matrices cuadradas antes de empezar con los determinantes:

- En una matriz cuadrada se denomina diagonal principal al conjunto ordenado de reales $\{a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}\}$[4]
- Una matriz cuadrada A es:
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
  - triangular si es triangular superior o triangular inferior.
  - diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
  - estrictamente triangular superior si es triangular superior y los elementos de la diagonal principal son todos distintos de cero.
- Toda matriz A cuadrada y escalonada es triangular superior.

[4] Se toma la definición de LLM16, pg. 110.

Reglas mnemotécnicas para los determinantes de orden 2 y de orden 3.

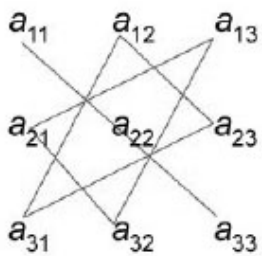
Para un determinante de orden 2 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} \bullet & \\ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \circ \\ \circ & \end{vmatrix}$$

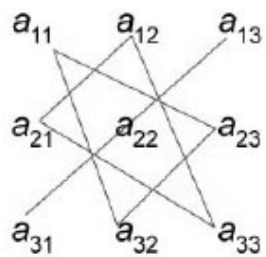
Para un determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La regla de Sarrus simplifica la obtención del determinante de orden 3.



+



−

Definición del determinante de A mediante inducción:

- si $n = 1$ $\qquad |A| = a_{11}$
- si $n > 1$

  elegida una fila i $\qquad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ $\qquad$ ó elegida una columna j $\qquad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

A_{ij} es el denominado **cofactor** de a_{ij} y se define cómo: $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, siendo M_{ij} la matriz $n-1 \times n-1$ que resulta de quitar de A la fila i y la columna j.

Al determinante de M_{ij} se le denomina **menor** o menor complementario de a_{ij}.

Vemos que para calcular un determinante de orden 2, n=2, tenemos que obtener dos cofactores de orden 1, es decir, dos determinantes de orden 1. La definición inductiva se basa en que el determinante de orden n se calcula a partir de n determinantes de orden $n-1$.

Ejercicio 2.1. Calcula el siguiente determinante por cofactores de la primera columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -51$$

En este caso hubiera sido más conveniente elegir la primera fila, puesto que dos de sus cuatro elementos son ceros, ahorrándonos el cálculo de dos cofactores.

- $|A^t| = |A|$
- El determinante de las matrices triangulares (superiores o inferiores) es el producto de los elementos de la diagonal principal. Por tanto el determinante de las matrices diagonales es también el producto de los elementos de la diagonal principal. El determinante de la matriz identidad es 1. $|I| = 1$.
- Si todos los elementos de una línea[5] tienen un factor común, el determinante puede obtenerse como el producto de ese factor común por el determinante que resulta de eliminar ese factor común en la correspondiente línea.
  Como consecuencia de lo anterior:
  - Si los elementos de una línea son todos cero, el determinante es cero.
  - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- Si se intercambian entre sí dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.
  Como consecuencia de lo anterior:
  - Si dos líneas paralelas son iguales el determinante es cero.
- Si dos líneas paralelas son proporcionales el determinante es cero.
- Si los elementos de una línea los podemos escribir como el resultado de la suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de dos determinates iguales al original salvo en esa línea, para la que tomamos el primer sumando en el primer determinante y el segundo sumando en el segundo.
- Como consecuencia de las dos propiedades anteriores: Si los elementos de una línea son combinación lineal de líneas paralelas, el determinante es cero.
- Si a los elementos de una línea se le suman los correspondientes a otra paralela multiplicados por un real, el determinante no varía. **Esta propiedad es muy útil para simplicar el cálculo de determinantes**.

  Esta transformación en el caso de filas es lo que hemos llamado operación elemental de reemplazamiento, $F_i = F_i + \alpha F_j$. Establecemos ahora que no altera el determinante.

[5] Por "línea" nos referiremos en toda la sección a filas o a columnas

- Dadas A_n, B_n, $|A\ B| = |A|\ |B|$

  Se generaliza a cualquier número de matrices.

- Si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$ y $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

  Se deduce de la igualdad siguiente: $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$

Aplicando las propiedades anteriormente expuestas podemos simplificar enormemente el cálculo de determinantes.

Ejercicio 2.2. Calcula el valor del siguiente determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Desarrollaremos por cofactores de la 1^{a} columna. Pero previamente realizaremos las operaciones elementales necesarias para hacer ceros todos los elementos de esta columna excepto el primero. La fila 1 es la fila auxiliar, utilizada para transformar los elementos de las filas 3 y 5.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \begin{matrix} F_3 = F_3 + (-1) * F_1 \\ F_5 = F_5 + (-1) * F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+(-1) & 1+(-2) & 0+(-1) & 2+(-2) & 0+(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1+(-1) & 2+(-2) & 2+(-1) & 1+(-2) & 1+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los cofactores de la 1^{a} columna:

$$|A| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el nuevo determinante de orden 4 por cofactores de la 1^{a} columna.

$$|A| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1+2-1+2) = 2$$

2.4 Inversa a partir de la traspuesta de la matriz de cofactores

Dada $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, se define **matriz de cofactores de** A, $\text{cof}(A)$, como aquella cuyo elemento (i, j) es el cofactor A_{ij}.

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

En Álgebra tiene mucho interés la traspuesta de la matriz de cofactores de A, ya que a partir de ella se puede calcular la inversa de A.

Propiedad: $(\text{cof}(A))^t = \text{cof}(A^t)$

Se cumplen los siguientes resultados, sencillos de demostrar: $\begin{cases} A\ (\text{cof}(A))^t = |A|\ I \\ (\text{cof}(A))^t\ A = |A|\ I \end{cases}$

Si $|A| \neq 0$, podemos pasar $|A|$ al primer miembro, dividiendo, y obtenemos:

$$A \quad \frac{(\text{cof}(A))^t}{|A|} = I \tag{1}$$

$$\frac{(\text{cof}(A))^t}{|A|} \quad A = I \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) deducimos: $A^{-1} = \dfrac{(\text{cof}(A))^t}{|A|}$ (3)

La ecuación (3) nos da un procedimiento para calcular la inversa de una matriz.

RESUMEN: En esta sección encontramos que si $|A| \neq 0$, entonces A es invertible, con $A^{-1} = (\mathrm{cof}(A))^t/|A|$. En la sección anterior vimos que si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$. Por tanto concluimos:

$$\boxed{A \text{ invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$$

OBSERVACIÓN: Teniendo en cuenta la propiedad $\mathrm{cof}(A^t) = (\mathrm{cof}(A))^t$ la ecuación (3) se puede reescribir así:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{cof}(A^t)}{|A|}$$

Ejercicio 2.3. Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ a partir de su matriz de cofactores.

Sol.

En primer lugar hay que calcular el determinante de A, confirmando que no es cero. Se obtiene $|A| = -10$ aplicando el método de Sarrus.

Tomamos la traspuesta de A: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Seguidamente cambiamos cada valor por su menor complementario: $\begin{bmatrix} -4 & 6 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Para obtener la matriz de cofactores de A^t tenemos que multiplicar los elementos de la matriz anterior por el factor $(-1)^{i+j}$, o lo que es lo mismo, tenemos que cambiar de signo los elementos en los que la suma del índice de fila y el índice de columna sea impar.

$$cof(A^t) = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la inversa sólo queda dividir por el determinante.

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{cof}(A^t))}{|A|} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Comprueba el resultado siempre que calcules una inversa, confirmando que $AA^{-1} = I$.

OBSERVACIÓN: Si todos los elementos de una matriz son enteros y su determinante es 1 o -1, entonces los elementos de la inversa son también todos enteros.

2.5 Relación entre el determinante de A y el de una forma escalonada de A

Analizamos aquí cómo varía el determinante de una matriz al efectuar operaciones elementales sobre sus filas, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes

- Intercambio de filas: cambia el signo del determinante
- Reemplazar una fila por ella más un múltiplo de otra: no hace variar el determinante
- El escalamiento de una fila por un factor no nulo: escala el determinante por el mismo factor

Por tanto, si T es una forma escalonada de A, entonces $\boxed{|T| = |A| \times (-1)^s \times \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_p}$ (4)

siendo s el número de intercambios de filas y α_i (todos distintos de 0) los factores de los escalamientos realizados sobre las filas de A.

La expresión anterior implica: $\boxed{|T| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0}$

Aquí denotamos con la letra T la forma escalonada de A para hacer énfasis en que la forma escalonada de una matriz cuadrada es **T**riangular.

La ec. (4) la podemos escribir, despejando $|A|$, así $\boxed{|A| = |T| \times (-1)^s \times \alpha_1^{-1} \times \ldots \times \alpha_p^{-1}}$

2.6 Relación entre determinante, inversa, rango y forma escalonada reducida

Continuando con las matrices A y T de la sección anterior, analicemos $|T|$.

Por ser T cuadrada y escalonada es triangular superior, y por tanto $|T|$ es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$|T| = t_{11} \times t_{22} \times \ldots \times t_{nn}$

Deducimos:

A invertible $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |T| \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n\ t_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A_{\text{red}} = I_n$.

En este caso las formas escalonadas de A son triangulares superiores estrictamente.

En el Tema 1 también se dedujo el resultado de que A invertible si y solo si rg$A$=n.

Estas afirmaciones también se pueden escribir en esta forma:

A no invertible $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow |T| = 0 \Leftrightarrow \exists t_{ii} = 0 \Leftrightarrow \text{rg}A < n \Leftrightarrow A_{\text{red}}$ no es la identidad.

En este caso las formas escalonadas de A son triangulares superiores no estrictamente.

Ejercicio 2.4. Determina si las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Sol:

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = 1 \times -6 \times 1/3 = -2$ El determinante es distinto de cero por tanto A es invertible

  También se podría haber razonado que A es invertible ya que rg A $= 3$ (vemos que en la forma escalonada quedan 3 pivotes)

- $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times -6 \times 0 = 0$ B no es invertible ya que su determinante es cero.

  Del resultado rg B=2 (en la forma escalonada quedan 2 pivotes) también se podría haber concluido que B no es invertible.

Ejercicio 2.5. Determina el valor de c para que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ sea invertible.

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & c & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & c-4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2(c-4) \end{bmatrix} = A_{\text{esc}}$$

$$\begin{matrix} F_2 = F_2 - 2 * F_1 \\ F_3 = F_3 - 2 * F_1 \end{matrix} \qquad F_{23} \qquad F_3 = F_3 + (c-4) * F_2$$

Nótese que la operación $F_3 = F_3 + (c-4)F_2$ puede realizarse cualquiera que sea el valor de c.

No se podría efectuar $F_2 = (c-4)F_2$, porque en los escalamientos el factor no puede ser cero, y se tendría ese valor para $c = 4$.

De la matriz A_{esc} obtenida se concluye:

- Si $c = 4$ rg$A$=2 por tanto A no es invertible.
- Si $c \neq 4$ rg$A$=3 por tanto A es invertible.

Resultado: La matriz es invertible si y sólo si $c \neq 4$

Otro método: Mediante el determinante de A. Este determinante lo podemos obtener con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & c-4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, ya que las operaciones de reemplazamiento del primer paso no han variado el valor del determinante.

Por cofactores de la primera columna: $|A| = 1((c-4)(-2) - 0) = -2(c-4)$ por tanto A invertible si y solo si $c \neq 4$.
La matriz es invertible si y sólo si $c \neq 4$

2.7 Método de Cramer: resolución de SL $A_n\vec{x} = \vec{b}$ con A invertible

Consideremos el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ con A invertible de orden n y siendo por tanto compatible determinado.

Dados A y $\vec{b}$ denotamos $\quad A_i = [\ \vec{a}_1 \quad \ldots \quad \underset{\text{col. } i}{\vec{b}} \quad \ldots \quad \vec{a}_n\ ]$

A_i es la matriz que tiene en la columna i el vector $\vec{b}$ y las demás columnas como en A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

col. i

Cada entrada x_i de la solución única $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ puede obtenerse como: $\quad x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

Ejercicio 2.6. Resuelve el SL $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$ mediante el método de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

$\vec{x} = (29, 16, 3)$

2.8 Rango de una matriz como el orden del mayor menor no nulo

Dada una matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, se define **menor de orden** p de A, con $p \leq m$ y $p \leq n$, como el determinante de la submatriz de orden p que resulta de eliminar $m - p$ filas y $n - p$ de columnas de A.

Por ejemplo, considerada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, veamos algunos de sus menores:

El menor de orden 2 que toma las filas 1,2 y las columnas 1,4, es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

El menor de orden 2 que toma las filas 1,3 y las columnas 2,4, es: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$

El número de menores de orden 2 en esta matriz es 18, ya que existen 3 elecciones para el par de filas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a , 2^a y 3^a) y 6 para el par de columnas (1^a y 2^a , 1^a y 3^a, 1^a y 4^a , 2^a y 3^a , 2^a y 4^a , 3^a y 4^a).

El número de menores de orden 3 en esta matriz es 4, ya que existen 4 elecciones para la terna de columnas (1,2,3 ; 1,2,4 ; 1,3,4 ; 2,3,4).

Para una matriz de orden $m \times n$ el número de menores de orden p es:

$$\binom{m}{p} \times \binom{n}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

El primer factor corresponde al número de elecciones posibles de p filas y el segundo al número de elecciones posibles de p columnas.

Propiedad: Dada $A_{m\times n}$, si todos los menores de un determinado orden son cero, también lo serán todos los menores de órdenes superiores.

Propiedad: Dada $A_{m\times n}$, rg$A$=p significa que existe al menos un menor de orden p distinto de cero, y que si la matriz admite menores de orden $p+1$, éstos valen todos cero. **Se dice por tanto que rg$A$ es el máximo orden de los menores no nulos**, o que el rango de A es el orden del mayor (en el sentido de tamaño) menor no nulo.

Por ejemplo, si una matriz $A_{5\times 8}$ tiene rango 3, entonces existe al menos un menor de orden 3 que no es nulo, y todos los menores de orden 4 son nulos, y los de orden 5 también.

Propiedad: Dada $A_{m\times n}$ y dado un menor de orden p distinto de cero en ella, $|M|$, p será el rango de A, o lo que es lo mismo, no habrá menores no nulos de orden superior a p, si y sólo si los menores de orden $p+1$ que contienen la submatriz del menor $|M|$ son todos cero.

2.7 Considera $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

- Obtén una forma escalonada de A.
- A partir de ésta determina el rango y si es invertible o no, ambos en función del parámetro a, y rellena la siguiente tabla de resultados:

	Valor/es de a
rg(A)=1	
rg(A)=2	
rg(A)=3	
rg(A)=4	
A invertible	

Escribe "todo a" o "ningún a" si procediese.

- Obtén el determinante de A. El determinante es un polinomio en a de grados 3. Presenta la expresión desarrollada (como sumas), y la expresión factorizada (como productos) con la mayor descomposición posible.

2.8 Clasifica el sistema lineal en función del parámetro a, haciendo uso del determinante de la matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + a\,x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + a\,x_3 = 3 \end{cases}$$

2.9 Clasifica el sistema lineal en función del parámetro a, haciendo uso del determinante de la matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} -\,x_1 - 2\,x_2 + a\,x_3 = a \\ 2\,x_1 - a\,x_2 + 2\,x_3 = -2 \\ x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 = 3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: .....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: .....

El sistema es incompatible si y sólo si: .....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí, es decir, que no hay valores de a repetidos entre los tres tipos. Y comprueba además que todos los posibles valores de a ($\in \mathbb{R}$) están considerados.

2.10 (MATLAB) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, y sabiendo que $D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 & 108 \\ 17 & 1 & 108 \\ 4 & 10 & 108 \end{bmatrix}$, calcula la matriz C. Si no existe, indícalo explícitamente.

2.11 Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 & 3 \\ 4 & 5.2 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 1 \\ 5.2 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$ y $C = \frac{1}{3} A$

- Escribe la ecuación que relaciona $|A|$ y $|B|$ y justifica el resultado.

Ecuación:

Justificación:

- Escribe la ecuación que relaciona $|A|$ y $|C|$ y justifica el resultado.

Ecuación:

Justificación:

2.12 Obtén el determinante de la matriz de Vandermonde de orden 3. Para simplificar su obtención utiliza operaciones de reemplazamiento de filas ($F_i = F_i + \alpha F_j$) en primer lugar, y saca factor común del determinante en segundo lugar.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

Así conseguirás que la matriz que queda dentro del determinante sea menos densa (es decir que tenga más "ceros") y más simple (con una gran parte de "unos" en los elementos que permanezcan con valor distinto de cero). Seguidamente puedes obtener el determinante por cofactores (o Sarrus) o continuar simplificando hasta llegar al resultado.

Razona para que valores de x, y, z el determinante es distinto de cero.

2.13 HVZ12, ejercicio 4d, pg. 59. Se pide el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.14 HVZ12, ejercicio 7b, pg. 95. Haz uso del concepto de determinante. El enunciado pide encontrar los valores de a para que la siguiente matriz sea invertible: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -1 \\ 0 & 1 & a-3 \end{bmatrix}$

2.15 HVZ12, ejercicio 7c, pg. 95.

El enunciado pide encontrar los valores de a y b para que la siguiente matriz sea invertible: $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$

Haz uso del determinante, simplificándolo previamente. Para ello saca primero todos los factores comunes que puedas, y seguidamente realiza operaciones de reemplazamiento en las filas, $F_i = F_i + \alpha F_j$. A continuación obtén el determinante por cofactores, y simplifica el resultado lo más posible.

2.16 HVZ12, ejercicio 11, pg. 95. Haz uso del concepto de determinante.
El enunciado pide calcular los valores de m para que el siguiente sistema tenga soluciones además de la trivial:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

2.17 HVZ12. En la página 91, tienes un ejemplo (Ejemplo A) de obtención de la inversa de una matriz de orden 3 por cofactores.

2.18 Razona (sin efectuar cálculos a mano) cúal es el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

2.19 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ determina el elemento de la posición (1,2) de A^{-1} a partir del cociente entre el cofactor que corresponda y el determinante de A.

2.20 Obtén el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, presentando su expresión en la forma más simplificada posible.

2.21 a) ¿Cual es el valor del determinante de cualquier matriz de giro en $\mathbb{R}^2$ respecto del origen?.
b) ¿Cual es el valor del determinante de la matriz de simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto del eje X?.
c) ¿Cual es el valor del determinante de la matriz correspondiente a la composición de un giro en $\mathbb{R}^2$ respecto del origen en primer lugar, y simetría respecto del eje X en segundo lugar?.

2.22 Leon 2015. Ejercicio 5, pg. 110. Determina el siguiente determinante. Escribe la respuesta como un polinomio en x.
$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

2.23 Leon 2015. Ejercicio 4 pg. 116. Encuentra todos los valores de c que hacen la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ singular.

2.24 Leon 2015. Ejercicio 11 pg. 85. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales.
a) $AX + B = C$ b) $XA + B = C$ c) $AX + B = X$ d) $XA + C = X$

2.25 Obtén $\begin{vmatrix} 3-x & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$, expresando el resultado como un polinomio en x completamente factorizado.
(Usa consecutivamente cofactores desde las líneas más ventajosas, es decir, con más ceros).