G282. Álgebra y Geometría. Prácticas MATLAB

Ruth Carballo Fidalgo, Valvanuz Fernández Quiruelas (UC)
Curso 26-27

Contents

Cómo usar MATLAB 2

Introducción a las prácticas con MATLAB 3

P.1 Semana 14 de septiembre 4

P.2 Semana 21 de septiembre 12

P.3 Semana 28 de septiembre 17

P.4 Semana 5 de octubre 23

P.5 Semana 12 de octubre 28

P.6 Semana 19 de octubre 32

P.7 Semana 26 de octubre 38

P.8 Semana 2 de noviembre 47

P.9 Semana 9 de noviembre 54

Cómo usar MATLAB

MATLAB desde Porticada

Porticada es un portal de aplicaciones de la UC. Accediendo a Porticada desde cualquier ordenador, podemos seleccionar la aplicación MATLAB R2024a y lanzarla (botón "lanzar" o "ejecutar"). Seguidamente, en la ventana Cloudpaging Player, verás que Matlab R2024a se está ejecutando como aplicación "virtualizada" desde nuestro equipo de trabajo. Si no se ejecuta tienes que seleccionar Matlab 2024a y clicar el botón "Launch".
Este será el procedimiento de trabajo en las prácticas de la asignatura y en los exámenes con MATLAB.

MATLAB desde tu ordenador utilizando la Licencia de la UC

Para poder descargarte el software tienes que abrir previamente una cuenta en MathWorks con la dirección de correo de la universidad pero eligiendo una contraseña distinta de la de la Universidad. Una vez dispongas de esa cuenta, debes conectarte a este enlace, del "Matlab Campus" del Servicio de Informática. Desde la ventana emergente debes clicar en Portal Matlab de la UC (es el primer enlace en el cuadro gris arriba a la derecha). A continuación te pedirá tu correo electrónico de la universidad. De ahí pasas al Sistema de Identificación Rediris en el que se te pide nombre de usuario y contraseña de la UC. El usuario se te pide en la forma usuario@alumnos.unican.es utilizando como usuario el usuario corto (Ej: usr123). Con esto habrás completado el proceso de acreditación.
En la ventana emergente pulsa en el enlace "Install Matlab" en un icono arriba a la derecha, o puedes abrir MATLAB Online, icono a la izquierda, si quieres usar esta opción.

Descarga e instalación de MATLAB

Tras clicar en la instalación, te aparece una ventana en la que tienes que cubrir dos campos, con desplegables.
Select release: R2024a (la opción que debemos escoger)
I want to: Install Products
Seguidamente clica "Download for Windows" para descargar el fichero ejecutable `matlab_R2024a_Windows.exe`, necesario para la instalación de MATLAB. A este fichero se le denomina "instalador". Te da otras dos opciones de sistemas operativos: macOS y Linux. Clicamos en el ejecutable descargado para proceder a la instalación de MATLAB. Le damos permiso para que haga los cambios necesarios en nuestro dispositivo. Nos pide nuestro correo y de nuevo nuestros credenciales en la UC a través de Rediris. Aceptamos los términos de la licencia marcando "Sí" y pulsamos "Siguiente". "Siguiente" otra vez en "Seleccionar licencia". A continuación seleccionamos la carpeta de destino para el software de MATLAB. Podemos tomar la de defecto.
`C:\Program Files\MATLAB\R2024a`
La siguiente ventana se titula "Productos", y en ella debemos marcar aquellos que queremos descargar. Además de MATLAB, marcado por defecto, debemos marcar "Symbolic Math Toolbox". Lo encontrarás fácilmente porque la lista de productos sigue el orden alfabético a partir de la cuarta opción. Una vez marcada esa Toolbox clica en "Siguiente". En la ventana de Opciones marca las que quieras y en la siguiente ventana Confirma las selecciones pulsando en "Comenzar instalación". Al finalizar envía el mensaje "Instalación completada" y debes pulsar "Cerrar". Desde el enlace de "Aplicaciones Instaladas" de tu ordenador encontrarás MATLAB R2024a, y haciendo doble clic se abrirá para que la puedas utilizar.

Uso de MATLAB Online

Es posible utilizar MATLAB desde tu ordenador sin necesidad de instalarlo. Basta con disponer de un navegador, de la cuenta en Mathworks, y de las credenciales de la UC.
Clicando en MATLAB Online ya podemos acceder (los pasos son muy sencillos). Nos aparecerá una interfaz de MATLAB muy similar a la que aparece cuando lo instalamos en nuestros ordenadores y que nos permitirá trabajar igual que lo hacemos en éstos.
MATLAB online puede ser muy útil cuando tenemos un equipo en el que no está instalado MATLAB o cuando nuestro equipo es muy viejo y tarda mucho en ejecutar las órdenes. Al utilizar MATLAB online los cálculos no se realizan en nuestro equipo, sino en la nube.

Introducción a las prácticas con MATLAB

Introducción a MATLAB preparada por R. Carballo. Incluida como referencia. Las instrucciones requeridas como contenidos de la asignatura estarán especificadas para cada práctica en este documento.

P.1 Semana 14 de septiembre

(última revisión: 17-09-2026)

Las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

Ejercicio 1.1.5 1) Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados[1], utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ producirá una solución válida del sistema). 2) Obtén dos soluciones particulares $\vec{p_1}$ y $\vec{p_2}$ del SL I y dos soluciones particulares $\vec{p_3}$ y $\vec{p_4}$ (ninguna de ellas la solución trivial) del SL II.

$$I: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

```
% INTRODUCCIÓN DE LOS DATOS

A=[0 1 -2 2 0; 1 1 -4 5 2; -1 3 -4 3 0];  % A Matriz de coeficientes
b=[-7  -23  3]';  % vector de términos independientes (columna)

% CLASIFICACION DEL SISTEMA I

Am=[A b]          % Matriz ampliada concatenando A con b a la derecha
Am =
     0     1    -2     2     0    -7
     1     1    -4     5     2   -23
    -1     3    -4     3     0     3
% La existencia o no de solución se determina mediante el Teorema
% de Rouché-Frobenius
rank(A)  % rango = número de cols. pivotales
rank(Am)
ans =
       3
ans =
       3
Los rangos son iguales por tanto el sistema tiene solución.

n=size(A,2)
% n es el número de cols de A = número de incógnitas del SL
n =
       5
% Sería determinado si n=rango(A). Ya sabemos por adelantado que no puede
% suceder, pues n=5 y A solo tiene tres filas.
% El SL es indeterminado, siendo n - rango(A) el grado de la indeterminación.
%  5 - 3 = 2 parámetros libres
```

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

```
% SOLUCIÓN DEL SL I MEDIANTE EL MÉTODO GAUSS-JORDAN

% A continuación aplicamos Gauss-Jordan para obtener
% el sistema equivalente más sencillo posible.
[U j]=rref(Am)  % U proporciona la forma escalonada reducida de Am
                % U viene de "upper", porque la matriz al estar escalonada
                % tiene ceros debajo de la diagonal principal.
                % rref es acrónimo de  "reduced row echelon form"
                % j es un vector fila que da los índices de las cols pivotales
                % por lo que length(j), que es el número de entradas de j,
                % es el rango de la matriz que estamos estudiando, Am.
length(j)

U =
     1     0    -2     3     0   -24
     0     1    -2     2     0    -7
     0     0     0     0     1     4

j =
1    2     5

ans =
       3

% La matriz U muestra que el SL es indeterminado, con grado dos de indeterminación.
% Las columnas pivotales son la primera, la segunda y la quinta.
% Esas columnas corresponden a las incógnitas  x1, x2, x5,
% que adoptamos como variables básicas, o incógnitas principales.
% x3, x4 son las variables libres, también llamadas parámetros libres.

% A partir de U despejaremos las incógnitas principales, y obtendremos la solución.
% Lo haremos sin utilizar MATLAB:

x1 =  -24 + 2*x3 - 3*x4    % despejamos x1
x2 =   -7 + 2*x3 - 2*x4    % despejamos x2
x3 =          x3           % x3 es parámetro
x4 =                 x4    % x4 es parámetro
x5 =    4                  % despejamos x5

% La solución en forma vectorial paramétrica, o lo que es lo mismo,
% escrita en la forma  x = p + alpha1*v1 + alpha2*v2 es:
% x=(-24,-7,0,0,4) + x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)  con x3, x4 reales cualesquiera.

% El vector p agrupa las constantes de los sumandos de la derecha.
% Los otros dos vectores, v1 y v2,  están multiplicados cada uno
% por un parámetro libre.

% Al tener dos parámetros libres la solución la forman las infinitas combinaciones
% lineales de dos direcciones independendientes, trasladadas mediante un vector p
% distinto de cero, también independiente de las dos direcciones anteriores.
```

```
% Vemos a contimuacuón cómo podemos obtener la expresión
% x=(-24,-7,0,0,4) + x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)  con x3, x4 reales cualesquiera,
% usando MATLAB

Partimos de la escalonada reducida U

syms x3 x4 real          % declaramos que x3 y x4 son variables,
                         % y que tienen que ser números reales

x1 =  -24 + 2*x3 - 3*x4    % despejamos x1
x2 =   -7 + 2*x3 - 2*x4    % despejamos x2
x3 =          x3           % x3 es parámetro
x4 =                 x4    % x4 es parámetro
x5 =    4                  % despejamos x5


sol=[x1 x2 x3 x4 x5]'    % solución en forma vectorial (traspuesta de fila)
pretty(sol)              % formato con mejor apariencia para datos simbólicos
sol =
 2*x3 - 3*x4 - 24
  2*x3 - 2*x4 - 7
               x3
               x4
                4

/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                  |
|  2 x3 - 2 x4 - 7 |
|                  |
|        x3        |
|                  |
|        x4        |
|                  |
\         4        /

% La solución en forma vectorial parémetrica, separando el vector constante
% y cada vector que queda multiplicado por un parámetro libre, es:

% sol = p + x3*v1 + x4*v2 siendo
p  = [-24 -7 0 0 4]' , v1 = [ 2  2 1 0 0]' , v2 = [-3 -2 0 1 0]'

p =
    -24
     -7
      0
      0
      4

v1 =
     2
     2
```

```
     1
     0
     0

v2 =
    -3
    -2
     0
     1
     0


% Ejecutamos la instrucción de arriba para comprobar está bien
sol = p + x3*v1 + x4* v2

sol =
2*x3 - 3*x4 - 24
 2*x3 - 2*x4 - 7
              x3
              x4
               4

pretty(sol)

/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                  |
|  2 x3 - 2 x4 - 7 |
|                  |
|        x3        |
|                  |
|        x4        |
|                  |
\         4        /

% La solución en forma vectorial paramétrica es:
% x = (-24,-7,0,0,4) + x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

[p v1 v2] , rank(ans)   % comprobamos que esos tres vectores son
                        % linealmente independientes, al encontrar que su
                        % rango es 3.
ans =
    -24     2    -3
     -7     2    -2
      0     1     0
      0     0     1
      4     0     0
ans =
       3
```

```
% SOLUCIÓN DEL CORRESPONDIENTE HOMOGÉNEO (SL II)

% Teniendo en cuenta que la solución del SLNH es
% sol = p + x3*v1 + x4*v2,
% la solución del correspondiente SLH será la misma, sustiyendo p por el vector 0.
% sol = x3*v1 + x4*v2,

% Para practicar el procedimiento puedes repetir el ejercicio cambiando b por el
% vector cero.

b=[0 0 0]';  Amh=[A b]   , rref(Amh)


Amh =
     0     1    -2     2     0     0
     1     1    -4     5     2     0
    -1     3    -4     3     0     0

ans =
     1     0    -2     3     0     0
     0     1    -2     2     0     0
     0     0     0     0     1     0


% Aquí tendríamos que despejar como antes x1, x2 y x5 en función
% de los parámetros, obteniendo
% x = x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% SOLUCIONES PARTICULARES

% Dos soluciones particulares del SL I
% ------------------------------------

% sol = p + x3*v1 + x4*v2  es la solución general.

Si no tuviéramos definidos p, v1 y v2 en MATLAB, los
definiríamos aquí.
p  = [-24 -7 0 0 4]' , v1 = [ 2  2 1 0 0]' , v2 = [-3 -2 0 1 0]'

% Estas son las dos soluciones particulares más sencillas:

% escogiendo parámetros (0,0)
p1 = p + 0*v1 + 0*v2  ;  % es la p que ya conocemos
                         % p1 = p

% escogiendo parámetros (1,0)
p2 = p + 1*v1 + 0*v2     % p2 = p + v1

    -22
    -5
     1
     0
     4
```

```
% Dos soluciones particulares del SL II (no incluir la trivial)
% -------------------------------------------------------------

% Los parámetros libres más simples son (1,0) y (0,1)

p3 = 1*v1 + 0*v2  ;  % v1 que ya conocemos
p4 = 0*v1 + 1*v2  ;  % v2 que ya conocemos

% MÉTODO ALTERNATIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS con null()

% A = matriz de coeficientes
% La solución del SL [A | 0] se puede obtener así:
% B = null(A,'r')

% Hemos visto que la solución general del SLH no es más que el conjunto de
% todas las combinaciones lineales de dos soluciones independientes v1 y v2.

% La función null() nos dará directamente esas dos soluciones v1 y v2.
% Concretamente, las columnas de la salida B serán los vectores v1 y v2.
% Da dos en este caso porque los parámetros libres son dos.
% Si hubiera más parámetros libres daría más soluciones (columnas).

% En el caso de un SLH compatible determinado con n incógnitas la solución será
% el vector 0 de n entradas. null() no devolverá esa solución, sino este resultado:
% "n x 0 empty matrix".
% Por tanto null() informa al usuario de que no existe solución distinta de la
% trivial dando como resultado una matriz vacía.

% Obviamente el algoritmo null( ) ya sabe que resuelve un SLH, por eso el único
% argumento que necesita es la matriz de coeficientes A.
% Si por error añadiéramos la columna de ceros de los términos independientes,
% null() consideraría esa columna como una incógnita más.

sol = null(A,'r')

sol=
2  -3
2  -2
1   0
0   1
0   0

% La solución deducida así es
x=alpha*(2,2,1,0,0)+beta*(-3,2,0,1,0),
% que es la misma que la obtenida con rref, y que nos evita ahora tener que separar
% incógnitas principales de parámetros libres y despejar.
% La solución se obtiene de forma directa.

% El lugar geométrico de la solución es el formado por las combinaciones lineales de
% los vectores v1 y v2. La solución pasa por el origen (0,0,0,0,0).
```

¿Por qué `syms` lo acompañamos con la opción `real`?

```
syms x real % 'syms' crea la variable simbólica
            % añadir la opción 'real' obliga a que la variable sea real.
            %
            % Si no incluimos esta opción la variable se entenderá que es un número
            % complejo, a + b i,
            % siendo 'a' la parte real y 'b' la parte imaginaria
            %
            % Con la opción 'real' incluida, podemos entender la variable x como
            % un número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es 0.
            %
            % Nota: las funciones real(argumento) e imag(argumento) son las
            % instrucciones de MATLAB para obtener la parte real y la parte
            % imaginaria del escalar o matriz "argumento".

% Observa los siguientes resultados:
2*x-5*x
conj(x) % Al calcular el conjugado de x la respuesta es que conj(x) es x
        % porque el conjugado de un real es el mismo real
        % (no hay parte imaginaria que tenga que cambiar de signo).
-3*x
x


syms x  % Ahora creamos la variable simbólica x sin especificar tipo de número.
        % Al no indicarlo, MATLAB supone que x es un número complejo.

2*x-5*x % Aquí todo correcto

-3*x


conj(x) % Sin embargo aquí nos va a decir que conj(x) es conj(x).
        % No puede calcular el conjugado de x porque se trata como un complejo
        % y no se ha dado información de los valores de la parte real
        % y de la parte imaginaria.

 conj(x)
```

Esta diferencia entre variables simbólicas reales y complejas es importante para nosotros ya que con frecuencia "atajamos" la trasposición (traspose(Matriz)) con el símbolo ' (Matriz'), cuando en realidad ' significa para MATLAB traspuesta-conjugada.
Veámoslo en el siguiente ejemplo:

```
syms x y , [x y]' , transpose([x y])


 conj(x)
 conj(y)

 x
 y
```

```
syms x y real,  [x y]', transpose([x y])
```

```
 x
 y

 x
 y
```

Ejercicio 1.1.8 modificado Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del SL con matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$. (*Es el correspondiente homogéneo del SL del Ejercicio 1.1.8*).

```
A = [ 1 2 0 ]
B = null(A,'r')
```

```
B=
    -2     0
     1     0
     0     1
```

La solución en forma vectorial paramétrica es
$x = \alpha * (-2, 1, 0) + \beta * (0, 0, 1)$ con α y β reales cualesquiera.

P.2 Semana 21 de septiembre

Continuamos con ejercicios del Tema 1

Guía:

- `format rat` si queremos usar formato racional
- definir la matriz de coeficientes `A = [ - ... - ; - ... - ; ... ]`
- definir el vector b como `b = [ - ... - ]'`
- definir matriz ampliada como `Am = [ A b]`
- `rref(Am)` para obtener la forma escalonada reducida.
- `null(A, 'r')` permite resolver SL homogéneo con matriz de coeficientes A
- Si el sistema es indeterminado, puedes despejar sobre el papel las incógnitas principales a partir de la escalonada reducida, como función de los parámetros libres, que puedes denotar con el nombre de las incógnitas que les corresponden, o mediante letras griegas en orden. No es necesario declarar los parámetros libres con la función `syms`. Eso sólo se hace si queremos ver en la ventana de comandos de MATLAB como queda la forma paramétrica.
- Puedes obtener los rangos de cualquiera de estas tres formas:
  - Contando las columnas pivotales visualmente en la forma escalonada reducida.
  - Mediante la función `rank()`.
  - Determinando los índices de las columnas pivotales utilizando las dos salidas posibles de `rref()` (por ejemplo `[matrizred j] = rref(matriz)`). El rango es el número de elementos de `j`, que puedes contar visualmente o que obtienes como `length(j)`.
- Las funciones `rref()`, `rank()` y `null()` no pueden utilizarse si la matriz contiene variables, pues dan resultados erróneos.
- Los sistemas de tipo compatible determinado pueden resolverse con la función `linsolve(A,b)`, siendo `A` la matriz de coeficientes y `b` el vector de términos independientes.

Ejercicio 1.2.11. Dado el SL $\begin{cases} x + 2y + 3z - 5t = 1 \\ \quad\; 3y + 3z + 3t = 3 \\ x + 3y + 4z - 4t = 2 \end{cases}$, halla:

a) La solución en forma vectorial paramétrica.

b) La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.

c) La solución en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

Solución:

Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.
Tanto los comentarios como los resultados que aparecen por pantalla están precedidos con el símbolo '%'.

```
Am = [1 2 3 -5 1; 0 3 3 3 3; 1 3 4 -4 2]   % Esta vez empezamos con la ampliada

% Apartado a)
% -----------

Amred = rref(Am)
%     1     0     1    -7    -1
%     0     1     1     1     1
%     0     0     0     0     0

% Vemos que el SL original (no homogéneo) es compatible, porque tanto A como Am
% tienen el mismo número de columnuas pivotales (2) y por tanto el mismo rango.

% Las cols. piv. son 1 y 2, que corresponden a las incógnitas x e y.
% Estas son las que tenemos que despejar.

% x = -1 -z + 7t
% y =  1 -z -  t

% z t son los parámetros libres => dan lugar a las ecuaciones z=z  t=t

% z =     z
% t =          t

% Unimos las dos partes:
% x = -1 -z + 7t
% y =  1 -z -  t
% z =     z
% t =          t

% Agrupamos ahora, para decir que la solución en forma vectorial paramétrica es
% x = p + z*v1 + t*v2     con z, t reales cualesquiera,
% p = [-1 1 0 0]', v1=[-1 -1 1 0]', v2=[7 -1 0 1]'

% Guardamos en MATLAB esos vectores con su nombre:
p = [-1 1 0 0]'; v1=[-1 -1 1 0]'; v2=[7 -1 0 1]'
% porque los necesitaremos luego.
```

```
% Apartado b)
% -----------

% Las ecuaciones paramétricas que tenemos incluyen
% z=z    y   t=t
% Para obtener z=1  tenemos que tomar como parámetro z=1
% Para obtener t=-2 tenemos que tomar como parámetro t=-2

% Por tanto tenemos que tomar para ese par de parámetros los valores 1 y -2.
z=1, t=-2,
xpar= p + z*b1 + t*b2   % solución particular pedida
% -16
%  2
%  1
% -2


% Apartado c)   Resolvemos el SL    A x = 0
% ----------------------------------------

Procedimiento 1) con null

A  = Am(:,1:4)                 % Aquí extraemos A  (filas: todas ,
                               % cols: desde la 1 hasta la 4)

B  = null(A,'r') % las cols de la salida son los vectores que acompañan
                 % a los parámetros en la solución del SLH
% -1   7
% -1  -1
%  1   0
%  0   1

% Por la escalonada sabemos que los parámetros son z, t
% por tanto la solución es
% xh = z * b1 + t *  b2  con z,t  reales cualesquiera
%   b1=(-1,-1,1,0) es la primera columna que nos da la función null
%   b2=( 7,-1,0,1) es la segunda columna.

% Estos vectores se pueden obtener a partir de B así, si los queremos guardar.

b1=B(:,1), b2=B(:,2)

% Puedes observar que, como era de esperar, b1=v1 y  b2=v2.
```

```
% Comprobaciones
% --------------

% En la sección 1.3 de los apuntes se justifica la
% expresión de un SL de ecuaciones
% con la ecuación matricial A x = b,
% siendo A la matriz de coeficientes,
% x el vector de incógnitas, y
% b el vector de términos indenpendientes.

% En lo que sigue hacemos uso de esta ecuación, A x = b,
% para la comprobación de las soluciones

%    Comprobación de la solución del homogéneo
%       A * b1  tiene que producir (0,0,0)
%       A * b2  tiene que producir (0,0,0)

%    Comprobación de la solución del no homogéneo
%       Basta añadir a las dos anteriores, la siguiente:
%       A * p   tiene que producir el vector (1,3,2)
%               (p es la solu. particular con z=0, t=0)

%    Comprobación de la solución particular.
%       Al tener comprobado que la solución es correcta sólo tenemos que
%       asegurarnos de haber sustituido bien los parametros libres
%        z como 1 y t como -2,
%       comprobando que la solución obtenida
%       xpar
%       toma esos valores en la posición de esas incógnitas.
%
%     Para mayor seguridad podemos añadir también la comprobación de que
%       A*xpar produzca (1,3,2)


% Propiedad de las soluciones de los SL indeterminados de que
% los vectores [p b1 b2] son linealmente independientes.

[p b1 b2]

%    -1    -1     7
%     1    -1    -1
%     0     1     0
%     0     0     1

rank(ans)

%     3
```

Ejercicio 1.3.7. Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:
$\vec{v} = (\ 17\ \text{mg de vitamina C}\ ,\ 54\ \text{mg de calcio},\ 31\ \text{mg de magnesio})$

Solución:

Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.
Tanto los comentarios como los resultados que aparecen por pantalla están precedidos con el símbolo '%'.

```
Am=[1 5 3; 1 2 1; 17 54 31]'
rref(Am)   % aquí vemos que el sistema es incompatible.

%    1     0     0
%    0     1     0
%    0     0     1

% otro método
A=Am(:,1:2)
[rank(A) rank(Am)]

% 2 3

% =>  sist. incompatible
```

P.3 Semana 28 de septiembre

Ejercicio 1.4.4. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ que asigna a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

(Añadido) Aplicación de esta matriz para el estudio de casos PCR+ en Cantabria, en los períodos del 1 al 5 y del 8 al 12 de marzo de 2021.

Fecha	Nuevos PCR+
1-3-2021	40
2-3-2021	48
3-3-2021	37
4-3-2021	43
5-3-2021	26
8-3-2021	27
9-3-2021	48
10-3-2021	44
11-3-2021	39
12-3-2021	45

Primera semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	
Segunda semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	

Solución:

Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.
Tanto los comentarios como los resultados que aparecen por pantalla están precedidos con el símbolo '%'.

```
% Construimos la matriz de forma que:
%   y1 sea la media de los tres primeros días: coefs 1/3 en
%      las tres primeras variables y cero en el resto.
%   y2 es la media de los 5 días: todos los coefs 1/5
%   y3 es la suma de casos de los 5 días, todos los  coefs 1

A=[1/3 1/3 1/3 0 0; 1/5 1/5 1/5 1/5 1/5 ; 1 1 1 1 1]
%    0.3333    0.3333    0.3333         0         0
%    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000
%    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000


% Método para obtener la estadística de la semana 1
% -------------------------------------------------

PCRplus_s1 = [40 48 37 43 26]'
%    40
%    48
%    37
%    43
%    26
```

```
A * PCRplus_s1
%   41.6667
%   38.8000
%  194.0000

% Método para obtener los resultados de las dos semanas a la vez
% ---------------------------------------------------------------

% Preparamos la matriz de datos de forma que:
%   primera columna = datos de la primera semana
%   segunda columna = datos de la segunda semana

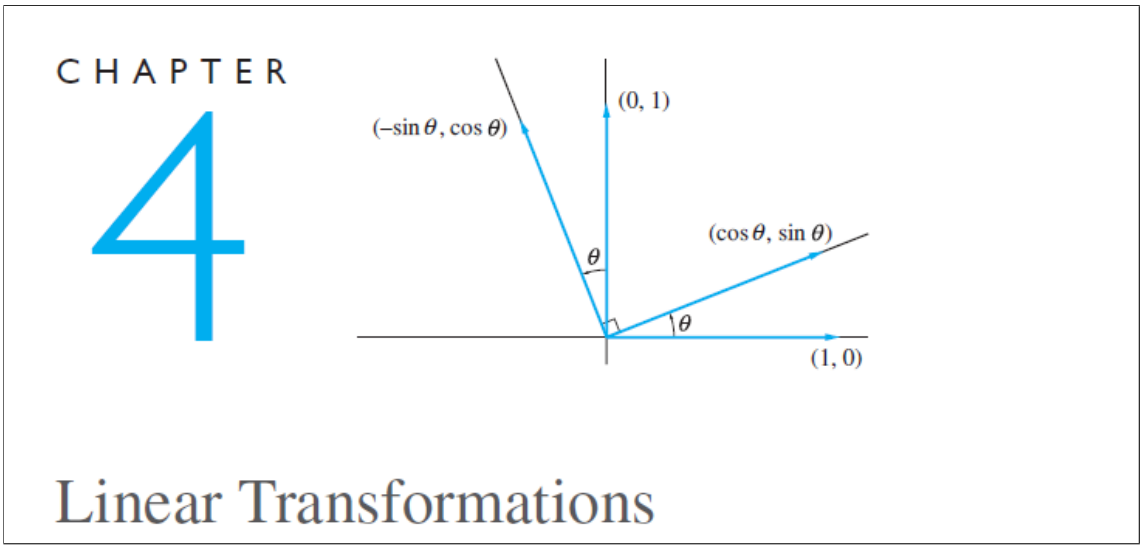
PCRplus = [40 48 37 43 26 ; 27 48 44 39 45]'
%    40    27
%    48    48
%    37    44
%    43    39
%    26    45

A * PCRplus
%   41.6667   39.6667
%   38.8000   40.6000
%  194.0000  203.0000

% la primera col nos da la estadística de la semana 1
% la segunda col nos da la estadística de la semana 2
```

Matriz estándar del giro en $\mathbb{R}^2$ de centro en el origen y ángulo θ

Ejercicio 1.4.12 (Tema 1, pgs. 35-36 de las diapositivas)



S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9ª. Pearson. 2015.

La matriz estándar del endomorfismo, o matriz respecto de la base canónica, es:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

En efecto, siendo $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$,

$$A = [\, f(\vec{e_1}) \;\; f(\vec{e_2}) \,] \quad con \quad \begin{cases} f(\vec{e_1}) = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \text{sen}\theta\, \vec{e}_2 \\ f(\vec{e_2}) = -\text{sen}\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ en el sentido antihorario o positivo

$-\pi < \theta < 0$ en el sentido horario o negativo

Giro y simetría en $\mathbb{R}^2$ y composición de ambos

Ejercicio Adicional 1.4.17

a) En $\mathbb{R}^2$, escribe la matriz estándar R correspondiente al giro de 50 grados en sentido antihorario de centro en el origen.	$R =$
b) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$	$\vec{v}_{\text{girado1}} =$
c) Comprueba que las normas de los dos vectores son iguales, utilizando la función `norm()`	$\| \vec{v} \| =$ $\| \vec{v}_{\text{girado1}} \| =$
d) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 50 grados en sentido horario.	$\vec{v}_{\text{girado2}} =$
e) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 180 grados	$\vec{v}_{\text{girado3}} =$
f) Escribe la matriz estándar S de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la simetría o reflexión respecto del eje Y.	$S =$
g) Escribe la matriz estándar B de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la siguiente composición: giro de 50 grados en sentido antihorario alrededor del punto $(0, 0)$, en primer lugar, y en segundo lugar simetría o reflexión respecto del eje Y.	$B =$
h) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ mediante la transformación B.	$\vec{w} =$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO ADICIONAL 1.4.17  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> a=50
        50

>> R= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]   % respuesta a)
    0.6428   -0.7660
    0.7660    0.6428

>> v=[4 3]'
     4
     3

>>vg1=R*v      % respuesta b)
    0.2730
    4.9925

>> norm(v)     % respuesta c)  esta instrucción y la siguiente
     5
>> norm(vg1)
    5.0000

>> A = [cosd(-a)   -sind(-a) ;   sind(-a)    cosd(-a)]
    0.6428    0.7660
   -0.7660    0.6428

vg2 = A*v      % respuesta d)
    4.8693
   -1.1358

>> norm(vg2)
     5

>> a = 180
   180

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    -1     0
     0    -1

>> vsimetrico_respecto_origen = A*v   % respuesta e)
 -4
 -3

>> % Con el giro de 180 grados se obtiene el vector opuesto.
>> % Esta transformación se conoce con dos nombres: giro de 180
>> % grados y simetría respecto del origen.
```

```
>> S=[-1 0; 0 1]    % respuesta f)
     -1   0
      0   1

>> B = S * R        % respuesta g)
   -0.6428   0.7660
    0.7660   0.6428

>> B*[4 3]'         % respuesta h)
   -0.2730
    4.9925
```

P.4 Semana 5 de octubre

Giro en $\mathbb{R}^2$

Ejercicio 1.4.16. Añadido que el resultado esté redondeado a la milésima.

Escribe la matriz estándar R de la rotación en $\mathbb{R}^2$ tal que el vector $\vec{x} = (4, 3)$ se transforme en el vector $\vec{y} = (5, 0)$. *Observa que la segunda entrada de la imagen es 0, y que la primera entrada, 5, coincide con la norma de $\vec{x}$, por tanto el giro buscado es el necesario para que la imagen de $\vec{x}$ quede en la parte positiva del eje X.*	$R =$

```
% x=(4,3) está en el primer cuadrante, por ser x1 y x2 reales positivos. Se pide
% llevarlo al eje X, parte positiva: y1=5, y2=0. Se requiere un giro en sentido
% horario de ángulo igual al que forman x y la parte positiva del eje X.

>> x1=4; x2=3;  atand(x2/x1)
   36.8699

% Utilizaremos la fórmula de la matriz de rotación [cos -sin; sin cos]
% Sentido horario => tomar el ángulo con signo negativo.

>> a=-ans
>> R= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    0.8000    0.6000
   -0.6000    0.8000
```

Con otros datos y pidiendo que el resultado esté redondeado a la milésima.

Escribe la matriz estándar R de la rotación en $\mathbb{R}^2$ que lleva el vector $\vec{x} = (2, -4.1)$ a la parte positiva del eje X. Presenta el resultado redondeado a la milésima.	$R =$

```
>> x1=2; x2=-4.1;  atand(x2/x1)
 -63.9967

% x está en el cuarto cuadrante, por eso sale negativo el signo del ángulo.
% Hay que tomar el ángulo con signo positivo, pues el giro desde donde se
% encuentra el vector x hasta la parte positiva del eje X tiene sentido
% antihorario.

a=-ans ;  R= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    0.4384   -0.8988
    0.8988    0.4384

% El resultado redondeado a milésimas es:
    0.438   -0.899
    0.899    0.438
```

Resolución de un SL haciendo uso del determinante de la matriz de coeficientes

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución EJERCICIO 2.9 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> syms a real ;  A=[-1 -2 a; 2 -a 2; 1 2 4]
 [-1, -2, a]
 [ 2, -a, 2]
 [ 1,  2, 4]

% 1)   CASO SCD
>> det(A)  % El SL, con tres ecuaciones y tres incognitas, es comp.
           % determinado si y solo si rgA=3.
           % En efecto, la sol. única con tres incógnitas exige rg 3, y el rg 3 a su vez
           % garantiza la compatibilidad, ya que el rango de la ampliada no puede ser
           % mayor que 3, al tener el SL tres ecuaciones.

           % rg A = 3 si y solo si detA not=0
           % No podemos usar rank() para obtener información sobre el rango, ya que
           % la matriz tiene una variable, y además el enunciado ya nos indica que
           % hagamos uso del determinante.
 a^2 + 8*a + 16

% La salida muestra que el determinante es un polinomio de grado 2.
% Sabemos que tendrá dos raíces, es decir, dos valores de a que anulen la expresión.
% Las calculamos con solve()

>> solve(ans) % Resuelve la ecuación   a^2 + 8a+16 = 0
              % También podría haber usado solve(ans==0), pero la igualdad a 0
              % se puede omitir.
 - 4
 - 4

% Las siguientes instrucciones nos darían el mismo resultado:
%    solve(det(A))
%    solve(det(A)==0)

% El determinante se anula si y solo si a = -4, por tanto
% SCD si y solo si a distinto de -4

% Observa que para este apartado no hemos necesitado introducir el vector b
% de términos independientes.

% 2) CASO a=-4
% El sistema podrá ser en principio compatible indeterminado o incompatible.
% Veamos ante cual de los dos casos estamos:

% Definimos a=-4 y volvemos a declarar A, para que quede calculada
% con el valor concreto a=-4
% Declaramos b por primera vez, recogiendo también el valor a = -4
```

```
>> a = - 4;  A=[-1 -2 a; 2 -a 2; 1 2 4] ;  b=[a -2 3]';

% Con las tres instrucciones de la línea anterior
%   a es =-4
%   A es matriz numérica con a=-4
%   y b es vector numérico con a=-4

>> [rank(A) rank([A b])]
     2     3

% Obtenemos que para a=-4 el SL es incompatible, pues los rangos no coinciden.

% 3) De los resultados anteriores se concluye que el SL
% nunca es Compatible Indeterminado.
```

APUNTE sobre polinomio desarrollado y polinomio factorizado

```
%  a^2 + 8*a + 16 es la expresión del polinomio desarrollado.
% la función factor() nos permite ver su expresión factorizada, o lo que es lo mismo
% como producto de términos (a-r) siendo r las raíces.

>> factor(det(A))
[a + 4, a + 4]

% El resultado anterior se lee así:
%    El determinante de A es igual a (a+4)*(a+4)
% En la forma factorizada resulta sencillo identificar las raíces, o valores que
% anulan el polinomio.
% En este caso se anula para a=-4.
```

Resolución de ecuaciones con productos de matrices

Ejercicio 2.24 Leon 2015. Ejercicio 11 pg. 85. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $AX + B = C$ b) $XA + B = C$
c) $AX + B = X$ d) $XA + C = X$

```
>> A=[5 3; 3 2], B=[6 2; 2 4], C=[4 -2 ; -6 3],

     5     3
     3     2

     6     2
     2     4

     4    -2
    -6     3
```

```
% apartado a)
% AX + B = C   =>   AX = C - B => X = inv(A)*(C-B)
>> X=inv(A)*(C-B)
   20.0000   -5.0000
  -34.0000    7.0000

>> A*X + B - C   % comprobación de que AX+B-C es la matriz cero
    1.0e-13 *
    0.1421         0
         0    0.0355

% apartado b)
% XA + B = C   =>   XA = C - B => X = (C-B)*inv(A)
>> X=(C-B)*inv(A)
    8.0000  -14.0000
  -13.0000   19.0000

>> X*A+B-C   % comprobación
   1.0e-13 *
    0.1421    0.0711
         0    0.0711

% apartado c)
% A X + B    =  X   =>   A X - X = -B  =>
% A X - I X  = -B   =>  (A-I) X = -B  => X = inv(A-I)*(-B)
>> X= inv(A-eye(2))*(-B)
    0.0000   -2.0000
   -2.0000    2.0000

>> A*X+B-X % comprobación
   1.0e-14 *
   -0.1110         0
    0.0444         0

% apartado d)
% X A + C = X      =>  X A - X   = - C  =>
% X A - X I = - C  =>  X (A - I) = - C  =>  X  = (- C)*inv(A - I)
>> X= (-C)*inv(A-eye(2))
    2.0000   -4.0000
   -3.0000    6.0000
>> X*A+C-X % comprobación
   1.0e-14 *
    0.1332    0.1776
    0.0888   -0.2665
```

Aplicaciones lineales e inversa

Ejercicio 1.6.7. Lay 2016. Ejercicio 17 pg. 69. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que mapea $\vec{u} = (5, 2)$ en $(2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$ en $(-1, 3)$. Usa el hecho de que T sea aplicación lineal para encontrar la imagen dada por T de $3\vec{u}$, $2\vec{v}$ y $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
Añadido: Obtén la matriz estándar T de la transformación.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

u =[5 2]' ,  v=[ 1 3]'

fu=[2 1]' , fv=[-1 3]'  % llamamos así a sus imágenes o transformados

im1 = 3*fu        % f(3u)    = 3*f(u)      por ser aplicación lineal
im2 = 2*fv        % f(2v)    = 2*f(v)      por ser aplicación lineal
im3 = im1+im2     % f(3u+2v) = f(3u)+f(2v) por ser aplicación lineal

%     6
%     3

%    -2
%     6

%     4
%     9

% Apartado añadido, obtención de la matriz T  asociada:
%  T * [ u  v ]  = [ fu fv ]
%  Despejamos T multiplicando a la derecha por [u v]^-1

format rat ;  T = [fu fv] * inv([u v])
%   8/13          -7/13
%  -3/13          14/13

A*[u v] - [fu fv]     % Comprobación (en formato racional * significa 0)
       0              0
       *              0

% Observa que para poder calcular T se necesita usar la inversa de [u v],
% dicho de otra forma, tenemos que conocer los transformados o imágenes de un
% conjunto {u,v} linealmente independiente.
```

P.5 Semana 12 de octubre

Ejerc. 3.17 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H. Razona la respuesta.

b) A partir de la base B, obtén la/s ec/ecs. implícita/s de H, denotando a las variables de $\mathbb{R}^4$ como x_1, x_2, x_3, x_4.

c1) Obtén el o los valores de a tales que $\vec{w} = (a, 4, -5, -10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

c2) Obtén el o los valores de a tales que $\vec{w} = (a, 8, -10, 10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

d) Obtén las relaciones de dependencia lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es decir, ecuaciones de la forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4 + c_5\vec{v}_5 = \vec{0}$, donde no todos los reales c_i son cero. Observa que estas relaciones te permitirían despejar los vectores eliminados en el apartado a) como combinación lineal del resto.

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B, que sea lo más sencilla posible (el mayor número posible de ceros, y el mayor número posible de unos en los valores distintos de cero).

SOLUCIÓN

```
Se usa:
%  para indicar los datos que salen por pantalla
%% para los comentarios en el script

%% APARTADO a
%% ----------

v1=[1 0 -3 2]'; v2=[0 1 2 -3]'; v3=[-3 -4 1 6]'; v4=[1 -3 -8 7]'; v5=[ 2 1 -6 9]';
S=[v1 v2 v3 v4 v5]
%  1  0 -3  1  2
%  0  1 -4 -3  1
% -3  2  1 -8 -6
%  2 -3  6  7  9

[Sred j] = rref(S)   %% en Sred se guarda la escalonada reducida
                     %% en j los índices de las columnas pivotales
%     1     0    -3     0     4
%     0     1    -4     0    -5
%     0     0     0     1    -2
%     0     0     0     0     0

%      1     2     4
```

```
 B        = S(:,j)   %% La base la forman los vectores de S
                     %% que aparecen como cols. pivotales en Sred.

%     1     0     1
%     0     1    -3
%    -3     2    -8
%     2    -3     7

%% Vemos que la dimensión es 3.
%% Para obtenerla de forma automatizada podríamos haber utilizado
rank(S)
% 3
%% o haber usado length(j) pues j es un array que almacena los índices
%% de las cols pivotales, y length(j) es el número de elementos del array.

%% APARTADO b
%% ----------

%% Las ecuaciones implícitas de H son el SLH cuyas soluciones
%% (x1,x2,x3,x4) son los vectores de H.
%% Dicho de otra forma, al buscar la matriz de coeficientes A
%% de las ecuaciones implícitas estamos buscando A tal que Nul(A) es H.

%% Comenzamos escribiendo un vector genérico (x1,x2,x3,x4) a la derecha de los
%% tres vectores base.

syms x1 x2 x3 x4 real; x=[x1 x2 x3 x4]' ;
Bx=[B x]

% [  1,  0,  1,  x1]
% [  0,  1, -3,  x2]
% [ -3,  2, -8,  x3]
% [  2, -3,  7,  x4]

%% El formato de salida de Bx, con corchetes a los lados y comas
%% separando los elementos, es debido a que Bx es matriz simbólica,
%% al construirse con variables simbólicas.

%% Las tres primeras columnas proporcionan rango 3, pues son base.

%% AQUÍ VIENE LA ESENCIA DEL PROCEDIMIENTO:
%% (x1,x2,x3,x4) pertenece a H si y solo si
%% Bx (con el vector genérico añadido a la derecha) no aumenta el rango,
%% es decir, rg(Bx)=3, no pasa a ser 4.

%% Al ser Bx cuadrada podemos usar directamente la condición
%% de que el determinante sea 0 (para que el rango no sea 4).

det(Bx) %% la expresión resultante  igualada a cero es la ec. implícita de H.

% 10*x1 - 5*x2 + 4*x3 + x4
```

```
%% Por tanto la ec implícita es:   10x1 - 5x2 + 4x3 + x4 = 0

%% A=[10 -5 4 1], por tanto la ec. implícita tb la podemos escribir
%% como A x = 0 , con la A dada  (x  vector y 0 también vector)
%% A es la matriz de coeficientes de la ecuación implícita de H

%% Se cumple   dim Esp. total = nº de ecs del subesp. + dimensión del subesp
%%                    4       =       1               +  3

%% Comprobación de que la ec. es correcta: A * solución tiene que ser igual a cero
%% y las soluciones que tenemos que comprobar son los tres vectores v1 v2 y v4
%% que forman la base

A*B
% 0     0     0

%% En clase de teoría y problemas veremos otro método de obtener las implícitas
%% a partir de la base.

%%APARTADO c
%% ---------

syms a real , w=[a 4 -5 -10]'
A*w  %% w pertenece a H si y solo si cumple la ecuación implicita A * w = 0
     %% por tanto A*v ha de ser 0
% 10*a - 50
solve(ans)
% 5              %% a=5

%% Un método alternativo es proceder como el apartado anterior.
%% w pertenece a H <=> [v1 v2 v4 w] tiene rango 3 <=> det()=0.

det([B w])
% 10*a - 50

solve(ans)
% 5

%% APARTADO d
%% -----------

%% Recordemos que la solución de un SL Ax = b es el conjunto
%% de coeficientes que aplicados a las columnas de A producen
%% como combinación lineal el vector de términos independientes.
%% El apartado d) nos pide calcular los coeficientes que producen
%% el vector 0, es decir, la solución del homogéneo.

%% null(S,'r') nos dará dos soluciones independientes,
%% que son los coeficientes a usar en las dos
%% relaciones de dependencia lineal, independientes entre sí.
```

```
%% Sabemos de antemano que tenemos dos soluciones independientes
%% porque tenemos 5 columnas y rango 2, por tanto 2 parámetros libres.

null(S,'r')
% 3 -4
% 4  5
% 1  0
% 0  2
% 0  1

%% Las relaciones de dependencia lineal pedidas son entonces:
%%  3 v1 + 4 v2 + v3 = 0
%% -4 v1 + 5 v2 + 2 v4 + v5 = 0

%% De la primera y segunda podríamos despejar, respectivamente, los vectores
%% dependientes v3 y v5 como combinación lineal de los vectores de B.

%% v3 = - 3 v1 - 4 v2
%% v5 =   4 v1 - 5 v2 - 2 v4

%% Puedes "leer" directamente estos coeficientes,
%% a partir de la escalonada reducida de S
%%  1  0  -3   0   4
%%  0  1  -4   0  -5
%%  0  0   0   1  -2
%%  0  0   0   0   0

%% Fijándonos en las columnas de partida  1,2 y 3,
%% vemos que  v3 es -3*v1-4*v2.

%% Fijándonos en las columnas 1,2,4 y 5
%% vemos que v5 = 4*v1-5*v2-2*v4

%% APARTADO e
%% ----------

%% La base la obtenemos resolviendo la ecuación implícita.
%% Una ec. en cuatro variables tiene 3 parámetros libres.
%% La instrucción  null(A,'r') nos dará los tres vectores de la
%% base B'.

format rat; Bprima=null(A,'r')

%       1/2          -2/5          -1/10
%       1             0             0
%       0             1             0
%       0             0             1

% La base más sencilla posible la forman las tres columnas de la matriz anterior.
```

P.6 Semana 19 de octubre

Ejerc. 3.13 . Sean $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ base de $H =< \vec{b}_1, \vec{b}_2 >$.

a) Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a B.
b) Obtén la/s ec/ecs. implícita/s del sub. vec. H.
c) A partir del resultado anterior obtén una nueva base B' de H.

SOLUCION:

```
Se usa:
%  para indicar los datos que salen por pantalla
%% para los comentarios en el script


B=[-1 0 1; 3 6 2]'
x=[3 12 7]'

%% apartado a)
%% -----------

rank([B x])  %% si es 2 pertenece
             %% si es 3 no pertenece
% 2
             %% Obtenemos que sí pertenece.

xB=linsolve(B,x) %% coordenadas de x en base B
                 %% (linsolve sólo debe usarse para SL compatible determinado)
%       3
%       2

%% Las coordenadas son xB=(3,2)

%% apartado b)
%% -----------

syms x1 x2 x3 real  ; x=[x1 x2 x3]'
det([B x])  %% x=(x1,x2,x3) genérico pertenece a H  sii
            %% x es c.l. de B={v1,v2}               sii
            %% el rango 2 de B no aumenta al añadir la columna con el vector x sii
            %% el determinante de [B x] es 0

% 5*x2 - 6*x1 - 6*x3

            %% Observa bien la expresión anterior:  fíjate como las variables
            %% no siguen el orden natural x1, x2, x3. Hay que tener cuidado
            %% porque este resultado lo vamos a usar en el apartado c).
            %% Reordenamos la expresión.
            %% La expresión IGUALADA A CERO  es la ec. implicita de H
            %% - 6*x1 + 5*x2 - 6*x3 = 0
```

```
%% apartado c)
%% -----------

%% Para obtener una nueva base, resolvemos la ec. implicita obtenida:

A=[-6 5 -6]  %% A es la matriz de coeficientes de la ec.

Bprima=null(A,'r')) %% Las columnas de la matriz obtenida serán los vectores
                    %% de la nueva base B'.
                    %% Obviamente el número de vectores es el mismo que en la base
                    %% B del enunciado, 2, que es la dimensión de H.

% 5/6  -1
%  1    0
%  0    1

%% B' = { (5/6,1,0) , (-1,0,1) }
%% Si queremos evitar fracciones podemos tomar esta otra: B' = {(5,6,0), (-1,0,1)}

%% Nótese que el segundo vector es el mismo que el que aparece en primer lugar
%% en la base B del enunciado.

%% Con rank([B Bprima]) podemos comprobar que los dos vectores
%% de Bprima están en H, ya que no aumenta el rango,
%% que sigue tomando el valor 2 de B.

rank([B Bprima])
%  2
```

Ejercicio 3.18 . Sean las bases $B = \{\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\}$ y $B' = \{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\}$

a) Obtén la matriz de cambio de base o coordenadas de la base B a la base B'.

b) Sabiendo que las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de la base B son $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, obtén sus coordenadas respecto de la base B'.

c) ¿Cuales son las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$?

```
%% a) Obtención de la matriz de cambio de base de B a Bprima
%% Escribimos la matriz de cada base de forma que los vectores
%% columna sean los vectores base en su orden

B  = [ 5 1;  2 3]'
Bp = [ 1 1; -1 1]'
%     5     2
%     1     3

%     1    -1
%     1     1

%% La matriz P de cambio de base de B a Bprima tiene por columnas
```

```
%% las coords. de los vectores de la base B respecto de la base Bprima.
%% Primera columna = coordenadas de [5 1]' respecto de la base B'
%% Segunda columna = coordenadas de [2 3]' respecto de la base B'.
%% Obtenemos esas coordenadas resolviendo el SL con matriz ampliada
%% [Bp | B]

%% Presentamos dos métodos:

%% a1)  Con la inversa de Bp:   P = Bp^-1*B

P = Bp^-1*B
%  3 5/2
% -2 1/2

%% a2) Resolviendo el SL [Bp | B] llevando la matriz ampliada a la
%% forma escalonada reducida, con rref()

[PBp PB]
%  1    -1     5     1
%  1     1     1     3

reducida = rref([Bp B])
%  1     0     3     5/2
%  0     1    -2     1/2

P = reducida( : , 3:4 )
%     3     5/2
%    -2     1/2
```

La matriz de cambio de base de la base B a la base B' es: $\boxed{P = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}}$

```
%% b) El dato son las coords. de v respecto de la base B: vB=[4 3]'
%% Se piden las coordenadas de v en la base B'.
%% P es la matriz que convierte coordenadas relativas a la base B
%% en coordenadas relativas a la base B'. Por tanto vB'=P*vB

vB = [4 3]'
%   4
%   3

vBprima = P*vB
%  39/2
% -13/2
```

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B' son: $\boxed{[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 39/2 \\ -13/2 \end{bmatrix}}$

```
%% c) Se piden las coordenadas estandar de v
%% La matriz B transforma de coordenadas relativas a base B a
%% coordenadas estandar.
```

```
v = B*vB
%    26
%    13
```

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica son: $\boxed{\vec{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix}}$

Ejercicio 3.21 . Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determina

a) Una base y la dimensión de Col$A$.

b) Una base y la dimensión de Nul$A$.

c) Nul$A$ te permite obtener las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de A. Si el núcleo no resulta ser el vector $(0, 0, 0, 0, 0)$ (lo que es obvio en este caso al tener menos ecuaciones que variables), escribe la/s relación/es de dependencia lineal entre dichas columnas, denotándolas como $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ y $\vec{a}_5$ (por ese orden en A).

```
SOLUCIÓN

Se usa:
%  para indicar los datos que salen por pantalla
%% para los comentarios en el script

%% APARTADO a

a1=[1 0 0 1]'; a2=[0 1 0 0]'; a3=[3 2 0 3]'; a4=[-1 -1 0 1]'; a5=[ 1 1 0 1]';
A=[a1 a2 a3 a4 a5]
%     1     0     3    -1     1
%     0     1     2    -1     1
%     0     0     0     0     0
%     1     0     3     1     1

[Ared j] = rref(A)   ; BCol=A(:,j)
%     1     0    -1
%     0     1    -1
%     0     0     0
%     1     0     1

j
%      1     2     4

%% una base es BCol={a1,a2,a4}, la dimensión es 3.

%% APARTADO b

BNul=null(A,'r')
%    -3    -1
%    -2    -1
%     1     0
%     0     0
%     0     1
```

```
%% una base es BNul la forman las dos columnas anteriores. La dimensión es 2.

%% APARTADO c

%% Las relaciones de dependencia lineal se leen directamente de cada columna
%% que devuelve null() y son:
%%  -3 a1 - 2 a2 + a3 = 0
%% - a1 - a2 + a5     = 0
```

Ejerc. 3.23 Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, el vector $\vec{v}_1$ sobre la recta $\{(x, y) : y = 2x\}$ y el vector $\vec{v}_2$ sobre la recta $\{(x, y) : y = x/2\}$. (*Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90*).

SOLUCIÓN

```
%% Para la recta de ec. y=2x  tomo como base   { (1 ,  2 ) }
%%   llamaré a esta recta r1

%% Para la recta de ec. y=x/2 tomo como base   { (1 , 1/2) }
%%   llamaré a esta recta r2

format rat  %% Pues ya vemos desde el principio que tenemos fracciones

b1=[1 2]'; b2=[1 1/2]';  B=[b1 b2]

%% {b1,b2} es base de R2, por ser los dos vectores l.i. y generar R2.

%% Cualquier vector v de R2 se expresará de forma única como c.l. de {b1,b2}, es decir,
%% existirán alpha y beta únicos tales que  v = alpha*b1 + beta*b2

%% v queda así expresado como suma del
%% vector  alpha*b1 que se encuentra en la recta r1 y que denotamos como v1
%%  y el vector beta*b2, que es un vector de la recta r2 y que denotamos como v2.

%% Resolvamos el ejercicio con el caso concreto planteado:
v=[5 6]'
sol=linsolve(B,v)  %% función para obtener la solución de un SL compatible
                   %% determinado, con B matriz de coeficientes y v vector
                   %% de términos independientes
%       7/3
%       8/3

%% Podemos entender este resultado como las coordenadas de v
%% respecto de la base {b1,b2}.

v1=sol(1)*b1   %% sol(1) es la primera entrada de sol, alpha

%      7/3
%      14/3
```

```
v2=sol(2)*b2   %% sol(2) es la segunda entrada de sol, beta

%       8/3
%       4/3

% Comprobación:
v1 + v2 - v    %% el resultado tiene que ser (0,0)

% 0
% 0
```

La solución es entonces: $\boxed{\vec{v_1} = (7/3, 14/3) \qquad \vec{v_2} = (8/3, 4/3)}$

P.7 Semana 26 de octubre

Ejercicio 3.24, con los datos del vector $\vec{v}$ modificados.

Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
* el plano Π: $3x + 6y - z = 0$
* la recta r : $\{(1, 2, 3)\lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Obtén una base de Π.

b) Justifica si la suma de Π y r es o no suma directa.

c) Justifica si Π y r son o no complementarios.

d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (7, 11, 63)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano Π y un vector $\vec{v}_2$ de la recta r.

e) Si es posible la descomposición anterior:

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano Π.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta r.

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

Solución

```
% a) Obtenemos la base del plano resolviendo su ecuación  Ax=0  con null()

B_Pi = null([3 6 -1],'r')

 -2  1/3
  1   0
  0   1
```

Las dos columnas que proporciona null(), que son dos soluciones independientes de la ecuación $3x + 6y - z = 0$, nos dan una base del plano Π:

$\boxed{B_\Pi = \{(-2, 1, 0), (1/3, 0, 1)\}}$

```
% b) Escribimos como vector columna la base de la recta
B_r = [1 2 3]'  ;

% La dimensión del plano es el nº de vectores de cualquier base del plano,
% por tanto 2
% La dim. de la recta es el nº de vectores de cualquier base de la recta,
% por tanto 1
% La unión de las bases de plano y recta  genera el subespacio  plano+recta
% La dimensión de (plano+recta) es el rango de las dos bases unidas.
% La suma es directa si dim (plano+recta) = dim(plano) + dim(recta) =2+1=3

[ B_Pi B_r], rank([ ans ] )


%  -2  1/3  1
%   1   0   2
%   0   1   3
```

El rango es 3, por tanto la dimensión de la suma es 3, y la suma es directa. Visto de otra manera, al unir las bases de plano y recta queda conjunto l.i. (no hay que quitar ningún vector).
c) Π y r son complementarios porque se cumplen las dos condiciones: su suma es directa y la suma, al tener dimensión 3, es $\mathbb{R}^3$.

d y e) Es posible expresar cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ como suma de un vector de Π y un vector de r. Se ve fácilmente sin más que considerar una base con los dos primeros vectores en Π y el tercero en r y expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de esa base.

```
B = [ B_Pi B_r ] ; v = [7 11 63]'   ;
% Resolvemos el SL compatible determinado con linsolve(B,v), llamando c a la solución.
c = linsolve(B,v)    % matriz ampliada [ B | v ]
```

```
   7
  57
   2
```

```
% La solución es (7,57,2), por tanto  v = 7b1  + 57 b2 + 2 b3
% con v1 = 7 b1 + 57 b2   (en el plano)  y  v2 = 2 b3 (en la recta)

v1 = c(1)*B(:,1) + c(2)*B(:,2)
v2 = c(3)*B(:,3)
```

```
 v1=
  5
  7
 57

v2=
  2
  4
  6
```

$\boxed{\vec{v}_1 = (5,7,57) \qquad \vec{v}_2 = (2,4,6)}$

Comprobaciones:

```
[3 6 -1]*v1      % resultado cero si v1 se encuentra en el plano
rank([B_r v2])   % resultado 1 si v2 se encuentra en la recta r
v1 + v2 - v      % resultado el vector 0 si la descomp. está bien hecha
```

```
ans =
0
ans =
     1
ans =
 0
 0
 0
```

Ejerc. 4.6 modificado. Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:
a) simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$
b) proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

Considerada la figura con los vértices P, M, Q, R y T dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simétrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$M = (6, 7)$		
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

• **Ampliación del ejercicio:** Obtén las siguientes tranformaciones lineales adicionales de la figura original:
c) Dilatación de un factor 2.
d) La siguiente composición de aplicaciones: dilatación de un factor 2 y a continuación simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$.
e) Giro centrado en el origen, de ángulo 20 grados en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

• **Notación:** Denota las matrices obtenidas para las transformaciones a), b), c), d) y e) como As ('s' por simetría), Apr ('pr' por proyección), Ad ('d' por dilatación), Acom ('com' por composición) y Ar ('r' por rotación/giro), respectivamente.

• **Representación gráfica:** (de los resultados obtenidos en las cinco transformaciones)

Las funciones de MATLAB de representación gráfica se usan para comprender mejor los contenidos, pero no son materia exigida en la asignatura.

Solución :

```
% datos = [ 6 6 ; 6 7; 7 7 ; 8 6 ; 7 5 ; 6 6]'  % que están en estándar.
           % se repite el último punto para cerrar la figura
           % en la representación gráfica.
           % Antes de trasponer cada fila eran las coordenadas (x,y) de un punto.
           % Después de trasponer las coords (x,y) de cada punto están en una columna.
           % 6 puntos => 6 columnas.

%  S  = [ 1 0 ; 0 -1 ]  % matriz de la simetría referida a su base natural
%  Pr = [ 1 0 ; 0  0 ]  % matriz de la proyección referida a su base natural

%  B = [ 3 1 ; -1 3 ]'  % base natural para la simetría y la proyección:
                        %  vector de la recta de simetría o de proy. en col 1
                        %  vector perpendicular                       en col 2


% Marco teórico del cambio de base de la AL:
% ------------------------------------------
% A = B*F*inv(B)  % Cambio de base: de matriz F referida a base natural
                  % a matriz A referida a base estándar

                  % Copia de deducción A = B*F*inv(B) de los apuntes:

                  %   Ecuaciones de partida:
                  %     B xB = x  => xB = inv(B)*x
                  %     B yB = y  => yB = inv(B)*y
                  %
                  %     F xB = yB  ,  A x = y
                  %
                  %   A partir de ellas, sustituyendo xB e yB
                  %     F inv(B) x = inv(B) y
                  %
                  %   premultiplicando por B los dos miembros de la igualdad
                  %                  B F inv(B) x =  y
                  %
                  %   Y teniendo en cuenta que A x =  y
                  %
                  %     A = B F inv(B)

% Ejecución:
% ----------
 datos = [ 6 6 ; 6 7 ; 7 7 ; 8 6 ; 7 5; 6 6 ]'
 B  = [ 3 1 ; -1  3 ]'
 S  = [ 1 0 ;  0 -1 ]    ,  Pr = [1 0; 0  0]
 As  = B*S*inv(B)       % es la matriz estándar pedida (simetría)
 Apr = B*Pr*inv(B)      % es la matriz estándar pedida (proyección)

 datos_s  =  As*datos    % los vectores simétricos (las imágenes pedidas)
 datos_pr = Apr*datos    % los vectores proyectados (las imágenes pedidas)
```

```
% Visualización (gráfica):
% ------------------------
figure(1)
plot([ -9  24] , [ -3  8] ,'k-')  % recta desde -3*(3,1) hasta 8*(3,1)
                                  % de (-9,-3) a (24,8)
                                  % el primer argumento de plot lleva las coordenadas x
                                  % y el segundo argumento las coordenadas y
hold on

axis equal  % incrementos de x y de y iguales son también
            % iguales en tamaño en la figura.
plot([0], [0] , '+k')               % cruz negra en el origen (0,0)


% datos(1,:)       % en fila 1    coordenadas x de los vectores
% datos(2,:)       % en fila 2    coordenadas y de los vectores

plot(datos(1,:)    , datos(2,:)    , 'ok-')     % original en negro 'k'
plot(datos_s(1,:)  , datos_s(2,:)  , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
plot(datos_pr(1,:) , datos_pr(2,:) , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
saveas(figure(1),'figura_ejerc_4_6_ab.jpg')


% Resultados:
% -----------


datos =
     6     6     7     8     7     6
     6     7     7     6     5     6

B=
     3    -1
     1     3

S =
     1     0
     0    -1

Pr =
     1     0
     0     0

As =
    0.8000    0.6000
    0.6000   -0.8000

Apr =
    0.9000    0.3000
    0.3000    0.1000
```

```
datos_s =
    8.4000    9.0000    9.8000   10.0000    8.6000    8.4000
   -1.2000   -2.0000   -1.4000    0.0000    0.2000   -1.2000

datos_pr =
    7.2000    7.5000    8.4000    9.0000    7.8000    7.2000
    2.4000    2.5000    2.8000    3.0000    2.6000    2.4000


% datos_s'  y datos_pr' nos darán  las coordenadas (x,y) de cada punto
% para cubrir, respectivamente, las columnas 2 y 3 de la tabla del enunciado.

datos_s'

    8.4000   -1.2000
    9.0000   -2.0000
    9.8000   -1.4000
   10.0000    0.0000
    8.6000    0.2000
    8.4000   -1.2000

datos_pr'

    7.2000    2.4000
    7.5000    2.5000
    8.4000    2.8000
    9.0000    3.0000
    7.8000    2.6000
    7.2000    2.4000
```

Ampliación del ejercicio con las transformaciones lineales c), d) y e)

```
% Ad = 2*eye(2)   % Matriz estándar de la dilatación de factor 2
                  % eye(2) es la matriz identidad de orden 2
                  % Ad es la matriz asociada respecto de cualquier base
                  % Demostración: Supuesto que en cierta base F=2*eye(2)
                  % A = B * F * inv(B) = B * 2*eye(2) * inv(B) =
                  % 2 * B*inv(B) = 2 * eye(2)


% Acom = As * Ad  % Matriz estándar: primero dilatación y después simetría
                  % Nótese que en este caso el orden es indiferente, ya que la matriz
                  % 2*eye(2) conmuta con cualquier matriz.


% a = 20          % ángulo de 20 grados (degrees)

% Matriz estándar de rotación/giro 20 grados en sentido positivo,
% es decir, contrario al de las agujas del reloj o antihorario

% R = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]  % sufijo 'd' para unidades de grados
```

```
                                        % en el argumento ángulo a

                % Se aplicaría la misma fórmula, con a=-20, si el giro pedido
                % fuera en el sentido de las agujas del reloj
% Ejecución:
% ----------

Ad   = 2*eye(2)
Acom = As * Ad

a = 20 , Ag = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]

datos_d   = Ad*datos    % dilatación aplicada a figura original

datos_com = Acom*datos  % dilat. y después simetría aplicada a fig. original

datos_R   =  R*datos    % Rotación aplicada a figura original

% Visualización:
% --------------

plot(datos_d(1,:)  , datos_d(2,:)  ,'ob-')  % dilatación           color azul
plot(datos_com(1,:), datos_com(2,:),'og-')  % 1º) dil. 2º) simetr. color verde
plot(datos_R(1,:)  , datos_R(2,:)  ,'om-')  % giro                 color magenta
saveas(figure(1),'figura_ejerc_4_6_abcde.jpg')

% Resultados:
% -----------

Ad =
     2     0
     0     2

Acom =
    1.6000    1.2000
    1.2000   -1.6000

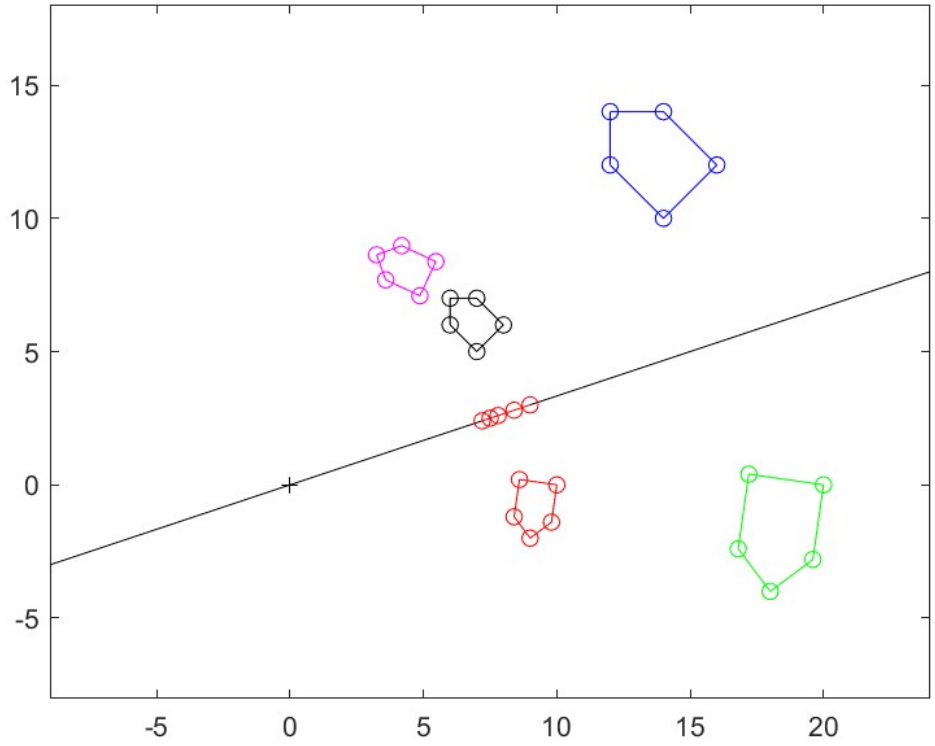
a =
   20

R =
    0.9397   -0.3420
    0.3420    0.9397

datos_d =
    12    12    14    16    14    12
    12    14    14    12    10    12

datos_com =
   16.8000   18.0000   19.6000   20.0000   17.2000   16.8000
   -2.4000   -4.0000   -2.8000    0.0000    0.4000   -2.4000
```

```
datos_R =
    3.5860    3.2440    4.1837    5.4654    4.8677    3.5860
    7.6903    8.6300    8.9720    8.3743    7.0926    7.6903
```



Matrices As, Apr, Acom en formato racional:

```
format rat
As
Apr
Acom


% As =
%       4/5             3/5
%       3/5            -4/5

% Apr
%       9/10            3/10
%       3/10            1/10

% Acom =
%       8/5             6/5
%       6/5            -8/5
```

Comprobación de invariantes:

```
% Las dos filas siguientes tienen que tomar el mismo valor, porque
```

```
% S y As son las matrices de la misma transformación, relativas a distinta base.

format short
[trace(S ) det(S ) rank(S )]
[trace(As) det(As) rank(As)]
```

```
        0    -1         2
        0   -1.0000    2.0000
```

```
% Las dos filas siguientes tienen que tomar el mismo valor, porque
% Pr y Apr son las matrices de la misma transformación, relativas a distinta base.

[trace(Pr ) det(Pr ) rank(Pr )]
[trace(Apr) det(Apr) rank(Apr)]
```

```
     1         0         1
    1.0000   -0.0000    1.0000
```

P.8 Semana 2 de noviembre

Ejerc. 4.7 Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x + y + z = 0$.

a) Determina una base B respecto de la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible. Escribe también dicha matriz.

b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

Ejerc. 4.8 Resuelve el ejercicio anterior tomando f correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$.

```
%% SOLUCIÓN 4.7

a  = [ 1 -1  0]'    %% Bpi={a,b}  base del plano obtenida a mano
b  = [ 1  0 -1]'

c  = [ 1 1 1]'      %% A partir de la ec. del plano obtenemos el vector
                    %% c perpendicular.

%%  a)
%%    B={a,b,c} es una base respecto de la cual la matriz asociada es lo
%%    más sencilla posible.
B=[a b c]  %% La base B la forman las cols. de esta matriz.
%%    La matriz asociada respecto de esta base B es:
S = diag([1 1 -1])



%%  b) La matriz respecto de la base estándar es
A=B*S*inv(B)

%  0.3333 -0.6667  -0.6667
% -0.6667  0.3333  -0.6667
% -0.6667 -0.6667  0.3333

%% Cambiamos a formato racional para tener los resultados exactos:

format rat
A
%       1/3          -2/3          -2/3
%      -2/3           1/3          -2/3
%      -2/3          -2/3           1/3

%% Podemos comprobar los tres invariantes entre las matrices asociadas S y A, que son la

[trace(A) det(A) rank(A)]
[trace(S) det(S) rank(S)]

%      1             -1             3
%      1             -1             3
```

```
%% También podemos hacer las siguientes comprobaciones:
%%  A*a = a    el vector a se queda donde está porque su simétrico es el mismo.
%%  A*b = b    lo mismo sucede con b
%%  A*c =-c    el simétrico de c es su opuesto.

A*a
%    1
%   -1
%    0

A*b     %% la segunda entrada es 0. No da el cero exacto por efecto de la
        %% precisión finita de MATLAB.
%    1
%    1/9007199254740992
%   -1

A*c
%   -1
%   -1
%   -1

%% Efectuamos A*b en forma numérica, usando el formato short
format short
A*b  %% con cuatro decimales no vemos que la segunda componente difiera de cero.
%  1.0000
%  0.0000
% -1.0000


%% SOLUCIÓN 4.8

format rat

%% a)
%%  El plano es el mismo que el del ejercicio anterior, por tanto la
%%  base B es la misma.
%%  La matriz asociada respecto de esta base es:
Pr = diag([1 1 0])

%%  b) La matriz respecto de la base estándar es
A=B*Pr*inv(B)

%       2/3          -1/3          -1/3
%      -1/3           2/3          -1/3
%      -1/3          -1/3           2/3

[trace(A)  det(A)  rank(A)]
[trace(Pr) det(Pr) rank(Pr)]
```

```
%  2              0              2
%  2              0              2

%% También podemos hacer las siguientes comprobaciones:
%%  A*a = a    el vector a se queda donde está porque su proyectado es el mismo.
%%  A*b = b    lo mismo sucede con b
%%  A*c =-c    el simétrico de c es el vector 0.

A*a
A*b
A*c

%       1
%      -1
%       0

%       1
%       1/18014398509481984
%      -1

%      -1/18014398509481984
%       1/6004799503160661
%      -1/9007199254740992

% Lo vemos mejor en formato decimal
format short , A*a, A*b  , A*c

%      1
%     -1
%      0

%      1.0000
%      0.0000
%     -1.0000

% 1.0e+-15      %%10^-15 por esos números es cero, para la precisión de MATLAB.
%     -0.0555
%      0.1665
%     -0.1110
```

Ejerc. 4.15 En $\mathbb{R}^3$ considera el giro de 30 grados en sentido antihorario respecto del eje orientado definido por $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

i) Obtén una base B respecto de la cual la matriz de la transformación sea lo más sencilla posible.

ii) Obtén la matriz asociada a la transformación, respecto de la base B anterior.

iii) Obtén la matriz estándar asociada a la transformación, o lo que es lo mismo, la matriz referida a la base canónica.

```
format rat
%%  i)
%% ----
%% La base que da la matriz más sencilla posible
%% es una base ortonormal B={a,b,n} con n = a x b (producto vectorial)
%% y n con la dirección y sentido de v.
%% {a,b} es por tanto base ortonormal del plano perpendicular
%% al eje de giro.

%% 1º) Vector n:

n=[1 1 1]'/sqrt(3)   %% para hacerlo unitario
                     %% o podríamos haber utilizado n=[1 1 1]'/norm([1 1 1])

%% 2º) Buscamos ahora una base ortonormal del plano perpendicular
%% al eje de giro.
%% La ecuación de este plano es x+y+z = 0

%% La base más sencilla del plano es B={(1,-1,0), (1,0,-1)}
%% pero vemos que no son ortogonales (su producto escalar no es cero).
%% Nos quedamos con el primero:
a1  = [ 1 -1  0]'  %% (posteriormente lo "normalizaremos")
%% , y buscamos uno que sea ortogonal a éste y que esté dentro del plano.

%% Un vector (x,y,z) es ortogonal a (1,-1,0) sii su producto escalar es cero,
%% es decir sii   x-y=0   sii x=y

%% Si un vector cumple x=y  y además está en el plano, entonces cumple la ec.
%% adicional al final de esta línea:  x+y+z=0 =>  2x+z=0

%% Reescribimos las ecuaciones x=y y -2x=z como y=x y z=-2x, dándonos cuenta
%% de que estamos usando x como parámetro libre:
%% un vector perpendicular a (1,-1,0) y dentro del plano tendrá la forma
%% (x,x,-2x), y es por tanto múltiplo de (1,1,-2).
%% Por tanto el vector del plano que nos interesa para completar la base
%% ortonormal del plano es:

b1=[1 1 -2]'

%% Ahora normalizamos los dos, para tener {a,b} ortogonales y unitarios.

a = a1/norm(a1)
b = b1/norm(b1)
```

```
%% Comprobamos ahora si la base tiene orientación positiva (determinante positivo)
%% o no.
%% Si el determinante es positivo la base que adoptamos es B={a,b,n}.
%% Si fuera negativo cambiaríamos la base a B={b,a,n}.

det([a b n])
% 1
%% Determinante positivo, por tanto mantenemos el orden de a y b en la base.

%% Respuesta i)   B={a,b,n}
B=[a b n]     %% O podemos decir que la base la forman las cols. de esta matriz.

%     985/1393       881/2158       780/1351
%    -985/1393       881/2158       780/1351
%       0           -881/1079       780/1351

%%  ii)
%% ----
ang=30; G=[cosd(ang) -sind(ang) 0;  sind(ang) cosd(ang) 0 ; 0 0 1]

%    1170/1351        -1/2            0
%       1/2         1170/1351         0
%       0              0              1

%% La respuesta a este apartado es la matriz G.

%% El determinante de G es cos^2+sin^2=1, puedes comprobar que vale 1.

det(G)
% 1

%% iii)
%% ---

A=B*G*inv(B)     %% La matriz A es la respuesta del apartado iii)

%     520/571       -520/2131         1/3
%       1/3          520/571       -520/2131
%    -520/2131         1/3          520/571

%% Comprobación de los invariantes:

[trace(G) trace(A)]
%  2131/780       2131/780

[det(G) det(A)]
%      1              1

[rank(G) rank(A)]
%       3              3
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% UNA COMPROBACIÓN SENCILLA:

%% Por ejemplo, que [1 1 1]' se queda donde está, por encontrarse en el eje de giro.
%% Es decir A*[1 1 1]' tiene que ser [1 1 1]'.
%% Hay que usar A porque [1 1 1]' está en coordenadas estándar.

A*[ 1 1 1]'
%       1
%       1
%       1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% OBTENCIÓN DE BASE ORTONORMAL DEL PLANO CON null()

%% Si resolvemos la ec   x+y+z=0 con null() de MATLAB, y no
%% usamos la opción 'r', entonces la base obtenida es directamente
%% base ortonormal.

Bpiorton=null([1 1 1] )
%    -780/1351      -780/1351
%     780/989       -780/3691
%    -780/3691       780/989

%% Podemos entonces construir la base B del ejercicio así:
B1=[Bpiorton [1 1 1]'/sqrt(3)]

%% La llamamos B1 para distinguirla de la anterior.

det(B1)
% 1
%% Comprobamos que tiene orientación positiva y que por tanto nos vale.

A1=B1*G*inv(B1)
%   520/571         -520/2131         1/3
%       1/3          520/571       -520/2131
%  -520/2131         1/3            520/571

%% Puedes ver que la matriz estándar que obtenemos por este método es la
%% misma que la anterior, A, aunque hayamos usado una base ortonormal distinta.
```

Ejerc. 4.11 En $\mathbb{R}^3$, obtén la matriz estándar A correspondiente al giro de 90 grados en sentido antihorario respecto del eje dirigido según el vector $(0, 0, 1)$. b) Obtén la matriz estándar de la siguiente composición de transformaciones: en primer lugar el giro anterior, y a continuación dilatación de factor 4 según el eje Z.

```
%% apartado a)
ang=90 ; A=[cosd(ang) -sind(ang) 0;  sind(ang) cosd(ang) 0 ; 0 0 1]
%     0    -1     0
%     1     0     0
%     0     0     1

%% apartado b)
D=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 4]
%    1     0     0
%    0     1     0
%    0     0     4

D*G        %% el resultado de este producto es la respuesta del apartado b)
%     0    -1     0
%     1     0     0
%     0     0     4
```

P.9 Semana 9 de noviembre

Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejercicio 5.4. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ usa una factorización $A = BDB^{-1}$, con D diagonal, para obtener A^6.

```
%%%
```

```
%% Base del subespacio V(2)

B_dos = null(A-2*eye(3),'r')   %% las cols de la salida nos dan la base e V(2)

%       1/3
%       2/3
%       1

B = [B_cero B_dos] %% las cols de B son la base de R3 formada por autovectores de A.
D = diag([0 0 2])

%      -2              1              1/3
%       1              0              2/3
%       0              1              1

%       0              0              0
%       0              0              0
%       0              0              2

%% Comprobación:

A*B-B*D

%       0              0              *
%       0              0              *
%       0              0              *

%% * en formato racional es un cero

Asuper6=B*D^6*inv(B)

%      32             64            -32
%      64            128            -64
%      96            192            -96
```

Ejercicio 5.6. Considerado el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ tal que:
$\vec{a} = (1, 2)$ es autovector con autovalor asociado 3.
$\vec{b} = (-1, 1)$ es autovector con autovalor asociado 4.
a) Obtén la matriz estándar A de f. b) Obtén $f(1, 7)$.

```
%% B={a,b} es base de R2 formada por autovectores de f.
%% Sus autovalores correspondientes son 3 y 4 respectivamente.

%% Al existir base de R2 formada por autovectores, o
%% simplemente partiendo de que tenemos dos autovalores simples en R2,
%% se concluye que f es diagonalizable.

format rat
a = [1 2]' ; b = [-1 1]'; B = [a b] ; D=diag([3 4]);

A=B*D*inv(A)  %% a)
%      11/3           -1/3
%      -2/3           10/3

A*[1 7]'      %% b)
%   4/3
%  68/3

%% Otro procedimiento para apartado b) que no exige conocer A:

   %% escribimos (1,7) en coordenadas relativas a la base {a,b}

   x=[1 7]'; xB=linsolve(B,x)
   %  8/3
   %  5/3

   %% x = 8/3 * a + 5/3 * b

      %% comprobación:
         8/3*a +5/3 * b
         % 1
         % 7

   %% f(x) = 8/3*f(a)+ 5/3*f(b) = 8/3*3*a + 5/3*4*b

   fx =  8/3*3*a + 5/3*4*b

   %   4/3
   %  68/3

%% Otro procedimiento para apartado a), ya usado en el Tema 1:
    fa=3*a, fb=4*b   %% =>  A * [a b] = [fa fb]
    %% y por ser [a b] invertible podemos despejar A como
    A = [fa fb] * [a b]^-1
    %      11/3           -1/3
    %      -2/3           10/3
```

Añadido c) Interpretación geométrica de la transformación.

Se trata de una expansión/dilatación no uniforme, de factor 3 según la dirección $(1, 2)$ y de factor 4 según la dirección $(-1, 1)$.

Ejercicio 5.14. Estudia si el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ es una simetría respecto de un plano. En caso afirmativo, calcula dicho plano y su recta normal.

```
format rat
A=[2 -2 -1; -2 -1 -2; -1 -2 2]*1/3
syms s real, solve(det(A-s*eye(3)))

%      -1
%       1
%       1

%% Encontramos que los autovalores son los requeridos para que sea simetría:
%% 1 doble y -1 simple.

%% Veamos ahora si V1 es un plano (dim=2) o una recta (dim 1).
%% Para que sea simetría respecto de un plano V1 tiene que ser un plano.

rank( A-(1)*eye(3))  %% Este rango nos da el número de ecuaciones de V1.
% 1
%% dim V1= 3 - rango anterior, por tanto 3-1=2   es un plano

%% La última condición es que V1 y Vmenos1 sean subespacios ortogonales.
%% Para estudiarlo obtenemos en primer lugar las base de los dos subespacios,
%% y seguidamente determinamos si el vector base de Bmenos1
%%  es ortogonal o no a los dos vectores base de B1.

B1      = null( A- (1)*eye(3),'r')   %% Base de V1
%      -2             -1
%       1              0
%       0              1

Bmenos1 = null( A-(-1)*eye(3),'r')   %% Base de Vmenos1
%       1
%       2
%       1

Bmenos1'*B1(:,1)  %% producto escalar por el primer vector del plano
% 0
Bmenos1'*B1(:,2)  %% producto escalar por el segundo vector del plano
% 0

%% V1 y Vmenos1 son ortogonales entre sí, por  tanto la transformación
%% es una simetría respecto de un plano.

%% El plano es el subespacio generado por B1.
%%  Pi = < (-2,1,0), (-1,0,1) >

%% La recta normal es el subespacio generado por Bmenos1.
%% r = < (1,2,1) >
```

Ejemplo 11. (Sólo la matriz A) Estudia si es diagonalizable la siguiente matriz. En caso afirmativo obtén B invertible y D diagonal tales que $A = BDB^{-1}$, y presenta la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

```
%% Pide determinar si la transformación es diagonalizable.

%% Lo será si todas las raíces del polinomio característico son reales y
%% ninguno de los autovalores es defectivo.
%% Esta segunda condición significa que cada autovalor cumple que su multiplicidad
%% algebraica coincide con la dimensión de su subespacio propio.

%% Si A es diagonalizable existirá base de R3 formada por autovectores.
%% Esos vectores son las columnas de la matriz B que se pide, y D tendrá
%% en la diagonal principal los autovalores correspondientes en el mismo orden.

A=[2 0 0; 0 4 0; 1 0 2]
syms s real, solve(det(A-s*eye(3)))

%     2     0     0
%     0     4     0
%     1     0     2

%  2
%  2
%  4

%% Se podía haber ahorrado este paso teniendo en cuenta que A es triangular, y que
%% por tanto los elementos de su diagonal principal son sus autovalores.

%% Las tres raíces son reales, y por tanto autovalores,
%% por lo que se cumple la primera condición de la diagonalización.
%% Los autovalores son lambda=2 doble y lambda=4 simple.

%% La segunda condición es que para los autovalores múltiples
%% dim Vlambda = multiplicidad de lambda.
%% Tenemos lambda=2 doble, por tanto dim V(2) ha de ser 2.

s=2; B1=null(    sym( A-s*eye(3) ) );
%     0
%     0
%     1

%% El subespacio propio no aporta dos vectores l.i., es decir dim Vlambda no es igual a 2
%% => no existe base de R3 formada por autovectores de A, o lo que es lo mismo,
%% A no es diagonalizable.
```