G282. Álgebra y Geometría. Prácticas MATLAB

Ruth Carballo Fidalgo, Valvanuz Fernández Quiruelas (UC)
Curso 25-26

Contents

Cómo usar MATLAB 2

Introducción a las prácticas con MATLAB 3

P.1 Semana 15 de septiembre 4

P.2 Semana 22 de septiembre 12

P.3 Semana 29 de septiembre 18

P.4 Semana 6 de octubre 25

P.5 Semana 13 de octubre 33

P.6 Semana 20 de octubre 37

P.7 Semana 27 de octubre 44

P.8 Semana 3 de noviembre 53

Cómo usar MATLAB

MATLAB desde Porticada

Porticada es un portal de aplicaciones de la UC. MATLAB es una de las aplicaciones disponibles y en este curso utilizaremos la versión 2024A. Accediendo a Porticada desde cualquier ordenador, podemos seleccionar la aplicación MATLAB 2024A y "lanzarla". De esta forma podemos ejecutar un MATLAB "virtualizado" desde nuestro equipo de trabajo. Este será el procedimiento de trabajo en las prácticas de la asignatura y en los exámenes con MATLAB.

MATLAB desde tu ordenador utilizando la Licencia de la UC

Para poder descargarte el software tienes que abrir previamente una cuenta en MathWorks www.mathworks.com con la dirección de correo de la universidad pero eligiendo una contraseña distinta de la de la Universidad. Una vez dispongas de esa cuenta, debes conectarte a este enlace del Servicio de Informática de la UC. En la nueva ventana, parte superior derecha, junto con el icono de MATLAB te aparece el enlace Portal Matlab de la UC que debes clicar a continuación. Desde la ventana emergente debes clicar en "Sign in to get started". A continuación te pedirá tu correo electrónico de la universidad. De ahí pasas al Sistema de Identificación Rediris en el que se te pide nombre de usuario y contraseña de la UC. El usuario se te pide en la forma usuario@alumnos.unican.es utilizando como usuario el usuario corto (Ej: usr123). Con esto habrás completado el proceso de acreditación.
En la ventana emergente pulsa en "Get started". Desde la siguiente ventana puedes acceder a la Instalación de MATLAB, icono Instalar MATLAB, arriba a la derecha, o puedes abrir MATLAB Online, icono a la izquierda, si quieres usar esta opción.

Descarga e instalación de MATLAB

Tras clicar en la instalación, te aparece una ventana en la que tienes que cubrir dos campos, con desplegables.
Select release: R2024A (la opción que debemos escoger)
I want to: Install Products
Seguidamente clica "Download" para descargar el fichero ejecutable (.exe) necesario para la instalación de MATLAB. A este fichero se le denomina "instalador". Te da tres opciones de sistemas operativos: Windows, macOS y Linux. El fichero para Windows tiene el nombre
`matlab_R2024a_Windows.exe`
Clicamos en el ejecutable descargado para proceder a la instalación/descarga de MATLAB. Emerge ahora la ventana del instalador "MathWorks Product Installer". Nos pide nuestro correo y de nuevo nuestros credenciales en la UC a través de Rediris. Aceptamos los términos de la licencia marcando "Sí" y pulsamos "Siguiente". "Siguiente" otra vez en "Seleccionar licencia". A continuación seleccionamos la carpeta de destino para el software de MATLAB. Podemos tomar la de defecto.
`C:\Program Files\MATLAB\R2024a`
La siguiente ventana se titula "Productos", y en ella debemos marcar aquellos que queremos descargar. Además de MATLAB, marcado por defecto, debemos marcar "Symbolic Math Toolbox". Lo encontrarás fácilmente porque la lista de productos sigue el orden alfabético a partir de la cuarta opción. Una vez marcada esa Toolbox clica en "Siguiente". En la ventana de Opciones marca las que quieras y en la siguiente ventana Confirma la instalación/descarga pulsando en "Begin Install". Te avisa que necesitas tener un espacio disponible en disco de 4.39 GB. Al finalizar envía el mensaje "Installation Complete" y debes pulsar "Close".

Uso de MATLAB Online

Es posible utilizar MATLAB desde tu ordenador sin necesidad de instalarlo. Basta con disponer de un navegador, de la cuenta en Mathworks y de las credenciales de la UC.
Clicando en MATLAB Online ya podemos acceder. Nos aparecerá una interfaz de MATLAB muy similar a la que aparece cuando lo instalamos en nuestros ordenadores y que nos permitirá trabajar igual que lo hacemos en éstos.
MATLAB online puede ser muy útil cuando tenemos un equipo en el que no está instalado MATLAB o cuando nuestro equipo es muy viejo y tarda mucho en ejecutar las órdenes. Al utilizar MATLAB online las órdenes se calculan en la nube, en vez de hacerlo en nuestro equipo.

Introducción a las prácticas con MATLAB

Introducción a MATLAB preparada por R. Carballo. Incluida como referencia. Las instrucciones requeridas como contenidos de la asignatura estarán especificadas para cada práctica en este documento.

P.1 Semana 15 de septiembre

Las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

Ejercicio 1.1.5 Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados[1], utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ producirá una solución válida del sistema). Obtén dos soluciones particulares $\vec{p_1}$ y $\vec{p_2}$ del SL I y dos soluciones particulares $\vec{p_3}$ y $\vec{p_4}$ (ninguna de ellas la solución trivial) del SL II.

$$I: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

```
% INTRODUCCIÓN DE LOS DATOS

A=[0 1 -2 2 0; 1 1 -4 5 2; -1 3 -4 3 0];  % A Matriz de coeficientes
b=[-7  -23  3]';  % vector de términos independientes (columna)

% CLASIFICACION DEL SISTEMA I

Am=[A b]          % Matriz ampliada concatenando A con b a la derecha
Am =
     0     1    -2     2     0    -7
     1     1    -4     5     2   -23
    -1     3    -4     3     0     3
% La existencia o no de solución se determina mediante el Teorema
% de Rouché-Frobenius
rank(A)  % rango = número de cols. pivotales
rank(Am)
ans =
       3
ans =
       3
Los rangos son iguales por tanto el sistema tiene solución.

n=size(A,2)
% n es el número de cols de A = número de incógnitas del SL
n =
       5
% Sería determinado si n=rango(A). Ya sabemos por adelantado que no puede
% suceder, pues n=5 y A solo tiene tres filas.
% El SL es indeterminado, siendo n - rango(A) el grado de la indeterminación.
%  5 - 3 = 2 parámetros libres
```

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

```
% SOLUCIÓN DEL SL I MEDIANTE EL MÉTODO GAUSS-JORDAN

% A continuación aplicamos Gauss-Jordan para obtener
% el sistema equivalente más sencillo posible.
[U j]=rref(Am)  % U proporciona la forma escalonada reducida de Am
                % U viene de "upper", porque la matriz al estar escalonada
                % tiene ceros debajo de la diagonal principal.
                % rref es acrónimo de  "reduced row echelon form"
                % j es un vector fila que da los índices de las cols pivotales
                % por lo que length(j), que es el número de entradas de j,
                % es el rango de la matriz que estamos estudiando, Am.
length(j)

U =
     1     0    -2     3     0   -24
     0     1    -2     2     0    -7
     0     0     0     0     1     4

j =
1    2     5

ans =
       3

% La matriz U muestra que el SL es indeterminado, con grado dos de indeterminación.
% Las columnas pivotales son la primera, la segunda y la quinta.
% Esas columnas corresponden a las incógnitas  x1, x2, x5,
% que adoptamos como variables básicas, o incógnitas principales.
% x3, x4 son las variables libres, también llamadas parámetros libres.

% A partir de U despejaremos las incógnitas principales, pero antes hemos de
% declarar los parámetros libres

syms x3 x4 real            % declaramos

x1 = -24 + 2*x3 - 3*x4  ;  % despejamos
x2 =  -7 + 2*x3 - 2*x4  ;  % despejamos
x3 = x3                 ;  % esta linea y la siguiente se incluyen por
x4 = x4                 ;  % completitud pero se puede prescindir de ellas
x5 = 4                  ;  % despejamos

sol=[x1 x2 x3 x4 x5]'  % solución en forma vectorial (traspuesta de fila)

pretty(sol)            % formato con mejor apariencia para datos simbólicos

sol =
 2*x3 - 3*x4 - 24
  2*x3 - 2*x4 - 7
               x3
               x4
                4
```

```
/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                   |
|  2 x3 - 2 x4 - 7  |
|                   |
|        x3         |
|                   |
|        x4         |
|                   |
\         4         /
```

```
% La solución en forma vectorial parémetrica, separando el vector constante
% y cada vector que queda multiplicado por un parámetro libre, es:

% sol = p + x3*v1 + x4*v2 siendo
p  = [-24 -7 0 0 4]' , v1 = [ 2  2 1 0 0]' , v2 = [-3 -2 0 1 0]'

p =
    -24
     -7
      0
      0
      4

v1 =
     2
     2
     1
     0
     0

v2 =
    -3
    -2
     0
     1
     0


% La solución totalmente desarrollada es:
% x = (-24,-7,0,0,4) + x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% Podemos verlo así:

sol = p + x3*v1 + x4* v2

sol =
2*x3 - 3*x4 - 24
 2*x3 - 2*x4 - 7
              x3
              x4
               4
```

```
pretty(sol)

/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                  |
|  2 x3 - 2 x4 - 7 |
|                  |
|        x3        |
|                  |
|        x4        |
|                  |
\         4        /

% Al tener dos parámetros libres la solución la forman las infinitas combinaciones
% lineales de dos direcciones independendientes, trasladadas mediante un vector p
% distinto de cero, también independiente de las dos direcciones anteriores.

[p v1 v2] , rank(ans)   % comprobamos que esos tres vectores son
                        % linealmente independientes,
                        % es decir, rango 3.
ans =
    -24     2    -3
     -7     2    -2
      0     1     0
      0     0     1
      4     0     0
ans =
       3

% SOLUCIÓN DEL CORRESPONDIENTE HOMOGÉNEO (SL II)

% Teniendo en cuenta que la solución del SLNH es
% sol = p + x3*v1 + x4*v2,
% la solución del correspondiente SLH será la misma, sustiyendo p por el vector 0.
% sol = x3*v1 + x4*v2,

% Para practicar el procedimiento puedes repetir el ejercicio cambiando b por el
% vector cero.

b=[0 0 0]';  Amh=[A b]   , rref(Amh)

Amh =
     0     1    -2     2     0     0
     1     1    -4     5     2     0
    -1     3    -4     3     0     0

ans =
     1     0    -2     3     0     0
     0     1    -2     2     0     0
     0     0     0     0     1     0

% Aquí tendríamos que despejar como antes x1, x2 y x5 en función
% de los parámetros, obteniendo
```

```
% x = x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% SOLUCIONES PARTICULARES

% Dos soluciones particulares del SL I
% ------------------------------------

% Las más sencillas corresponden a tomar los parámetros libres
% más simples: (0,0) y (1,0)

p1 = p + 0*v1 + 0*v2  ;  % es la p que ya conocemos
                         % p1 = p
p2 = p + 1*v1 + 0*v2     % p2 = p + v1
    -22
    -5
     1
     0
     4

% Dos soluciones particulares del SL II (no incluir la trivial)
% -------------------------------------------------------------

% Los parámetros libres más simples son (1,0) y (0,1)

p3 = 1*v1 + 0*v2  ;  % v1 que ya conocemos
p4 = 0*v1 + 1*v2  ;  % v2 que ya conocemos


% MÉTODO ALTERNATIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS con null()

% A = matriz de coeficientes
% La solución del SL [A | 0] se puede obtener así:
% B = null(A,'r')

% Hemos visto que la solución general del SLH no es más que el conjunto de
% todas las combinaciones lineales de dos soluciones independientes v1 y v2.

% La función null() nos dará directamente esas dos soluciones v1 y v2.
% Concretamente, las columnas de la salida B serán los vectores v1 y v2.
% Da dos en este caso porque los parámetros libres son dos.
% Si hubiera más parámetros libres daría más soluciones (columnas).

% En el caso de un SLH compatible determinado con n incógnitas la solución será
% el vector 0 de n entradas. null() no devolverá esa solución, sino este resultado:
% "n x 0 empty matrix".
% Por tanto null() informa al usuario de que no existe solución distinta de la
% trivial dando como resultado una matriz vacía.

% Obviamente el algoritmo null( ) ya sabe que resuelve un SLH, por eso el único
% argumento que necesita es la matriz de coeficientes A.
% Si por error añadiéramos la columna de ceros de los términos independientes,
% null() consideraría esa columna como una incógnita más.
```

```
sol = null(A,'r')

sol=
2  -3
2  -2
1   0
0   1
0   0


% La solución deducida así es
x=alpha*(2,2,1,0,0)+beta*(-3,2,0,1,0),
% que es la misma que la obtenida con rref, y que nos evita ahora tener que separar
% incógnitas principales de parámetros libres y despejar.
% La solución se obtiene de forma directa.

% El lugar geométrico de la solución es el formado por las combinaciones lineales de
% los vectores v1 y v2. La solución pasa por el origen (0,0,0,0,0).
```

¿Por qué `syms` lo acompañamos con la opción `real`?

```
syms x real % 'syms' crea la variable simbólica
            % añadir la opción 'real' obliga a que la variable sea real.
            %
            % Si no incluimos esta opción la variable se entenderá que es un número
            % complejo, a + b i,
            % siendo 'a' la parte real y 'b' la parte imaginaria
            %
            % Con la opción 'real' incluida, podemos entender la variable x como
            % un número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es 0.
            %
            % Nota: las funciones real(argumento) e imag(argumento) son las
            % instrucciones de MATLAB para obtener la parte real y la parte
            % imaginaria del escalar o matriz "argumento".

% Observa los siguientes resultados:
2*x-5*x
conj(x) % Al calcular el conjugado de x la respuesta es que conj(x) es x
        % porque el conjugado de un real es el mismo real
        % (no hay parte imaginaria que tenga que cambiar de signo).
-3*x
x


syms x  % Ahora creamos la variable simbólica x sin especificar tipo de número.
        % Al no indicarlo, MATLAB supone que x es un número complejo.

2*x-5*x % Aquí todo correcto

-3*x


conj(x) % Sin embargo aquí nos va a decir que conj(x) es conj(x).
        % No puede calcular el conjugado de x porque se trata como un complejo
        % y no se ha dado información de los valores de la parte real
        % y de la parte imaginaria.

 conj(x)
```

Esta diferencia entre variables simbólicas reales y complejas es importante para nosotros ya que con frecuencia "atajamos" la trasposición (traspose(Matriz)) con el símbolo ' (Matriz'), cuando en realidad ' significa para MATLAB traspuesta-conjugada.
Veámoslo en el siguiente ejemplo:

```
syms x y , [x y]' , transpose([x y])


 conj(x)
 conj(y)

 x
 y
```

```
syms x y real,  [x y]', transpose([x y])
```

```
 x
 y

 x
 y
```

Ejercicio 1.1.8 modificado Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del SL con matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$. (*Es el correspondiente homogéneo del SL del Ejercicio 1.1.8*).

```
A = [ 1 2 0 ]
B = null(A,'r')
```

```
B=
    -2     0
     1     0
     0     1
```

La solución en forma vectorial paramétrica es
$x = alpha * (-2, 1, 0) + beta * (0, 0, 1)$ con alpha y beta reales cualesquiera.

P.2 Semana 22 de septiembre

Continuamos con ejercicios del Tema 1

Guía:

- `format rat` si queremos usar formato racional
- definir la matriz de coeficientes `A = [ - ... - ; - ... - ; ... ]`
- definir el vector b como `b = [ - ... - ]'`
- definir matriz ampliada como `Am = [ A b]`
- `rref(Am)` para obtener la forma escalonada reducida.
- `null(A, 'r')` permite resolver SL homogéneo con matriz de coeficientes A
- Si el sistema es indeterminado no uses `syms` para declarar los parámetros libres. Despeja sobre el papel las incógnitas principales, a partir de la escalonada reducida, y usa las nombres que quieras (las del resto de incógnitas o letras griegas en orden) para los parámetros libres.
- Puedes obtener los rangos de cualquiera de estas tres formas:
  - Contando las columnas pivotales visualmente en la forma escalonada reducida.
  - Mediante la funcion `rank()`.
  - Determinando los índices de las columnas pivotales utilizando las dos salidas posibles de `rref()` (por ejemplo `[matriz_red j] = rref(matriz)`). El rango es el número de elementos de `j`, que puedes contar visualmente o que obtienes como `length(j)`.
- Las funciones `rref()`, `rank()` y `null()` no pueden utilizarse si la matriz contiene variables, pues dan resultados erróneos.
- Los sistemas de tipo compatible determinado pueden resolverse con la función `linsolve(A,b)`, siendo `A` la matriz de coeficientes y `b` el vector de términos independientes.

Ejercicio 1.2.11. Dado el SL $\begin{cases} x + 2y + 3z - 5t = 1 \\ \quad\; 3y + 3z + 3t = 3 \\ x + 3y + 4z - 4t = 2 \end{cases}$, halla:

a) La solución en forma vectorial paramétrica.

b) La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.

c) La solución en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

Solución:

Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.
En la presentación de la solución están precedidas con el símbolo '%' tanto los comentarios como los resultados que aparecen por pantalla.

```
Am = [1 2 3 -5 1; 0 3 3 3 3; 1 3 4 -4 2]   % Esta vez empezamos con la ampliada

A  = Am(:,1:4)                              % Aquí extraemos A  (filas: todas ,
                                            % cols: desde la 1 hasta la 4)

% Apartado c)   Resolvemos el SL    A x = 0
% ----------------------------------------

B  = null(A,'r')) % las cols de la salida son los vectores que acompañan
                  % a los parámetros en la solución del SLH
% -1   7
% -1  -1
%  1   0
%  0   1

% Respuesta a solución del homogéneo:
% x = alpha b1 + beta b2  con alpha y beta reales cualesquiera,
% siendo b1=(-1,-1,1,0), la primera columna que nos da la función null
% y b2=(7,-1,0,1) la segunda columna.

% También podemos presentar la respuesta usando como nombres de los parámetros
% libres las incógnitas que usamos como parámetros libres. Veámoslo:

rref(A)
%     1     0     1    -7
%     0     1     1     1
%     0     0     0     0

% Las columnas no pivotales de A son la 3 y 4, que corresponden a z y t, en ese orden.
% Las columnas de null(sym(A)) obedecen a ese mismo orden.
% Por tanto otra respuesta a la solución del homogéneo es:

%   x = z b1 + t b2

% A partir de aquí, si necesitáramos tener guardados b1 y b2 en MATLAB
% para algún otro cálculo, lo haríamos así, extrayendo
las cols de B:
```

```
b1=B(:,1)
% -1
% -1
%  1
%  0

b2=B(:,2)
%  7
% -1
%  0
%  1

% Apartado a)
% -----------

Amred = rref(Am)
%     1     0     1    -7    -1
%     0     1     1     1     1
%     0     0     0     0     0

% Vemos que el SL original (no homogéneo) es compatible, porque tanto A como Am
% tienen el mismo número de columnuas pivotales (2) y por tanto el mismo rango.

% las cols. piv. son 1 y 2, que corresponden a las incógnitas x e y.

% Despejando x, y en Amred deducimos la parte constante para x e y

% z, t son parametros libres, z=z   t=t. Su parte constante es cero.

p = [-1 1 0 0]'
%    -1
%     1
%     0
%     0

% Respuesta a la solución del original
%     x = p + alpha b1 + beta b2     con alpha, beta reales cualesquiera
%                                    y b1, b2 los vectores que ya conocemos

% O podríamos expresar también la solución así:
%     x = p +   z   b1 +  t   b2     con z,t reales cualesquiera

% Apartado b)
% -----------

xpar= p + 1*b1 + (-2)*b2   % solución particular pedida, del SL original
% -16
%  2
%  1
% -2
```

```
% Comprobaciones
% --------------

% Comprobación de la solución del homogéneo
%    A * b1 tiene que producir (0,0,0)
%    A * b2 tiene que producir (0,0,0)

% Comprobación de la solución del no homogéneo
%    Basta añadir a las dos anteriores, la siguiente:
%    A * p   tiene que producir el vector (1,3,2)
%            (p es la solu. particular con z=0, t=0)

% Comprobación de la solución particular.
%    Al tener comprobado que la solución es correcta sólo tenemos que
%    asegurarnos de haber sustituido bien los parametros libres
%     z como 1 y t como -2,
%    comprobando que la solución obtenida
%    xpar
%    toma esos valores en la posición de esas incógnitas.
%
%  Para mayor confirmación podemos añadir también la comprobación de que
%    A*xpar produzca (1,3,2)
```

Ejercicio 1.3.7. Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:
$\vec{v} = (\ 17\ \text{mg de vitamina C}\ ,\ 54\ \text{mg de calcio},\ 31\ \text{mg de magnesio})$

Solución:

Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.
En la presentación de la solución están precedidas con el símbolo '%' tanto los comentarios como los resultados que aparecen por pantalla.

```
Am=[1 5 3; 1 2 1; 17 54 31]'
rref(Am)   % aqui vemos que el sistema es incompatible.

%    1     0     0
%    0     1     0
%    0     0     1

% otro metodo
A=Am(:,1:2)
[rank(A) rank(Am)]

% 2 3

% =>  sist. incompatible
```

Ejercicio 1.4.4. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ que asigna a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

(Añadido) Aplicación de esta matriz para el estudio de casos PCR+ en Cantabria, en los períodos del 1 al 5 y del 8 al 12 de marzo de 2021.

Fecha	Nuevos PCR+
1-3-2021	40
2-3-2021	48
3-3-2021	37
4-3-2021	43
5-3-2021	26
8-3-2021	27
9-3-2021	48
10-3-2021	44
11-3-2021	39
12-3-2021	45

Primera semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	
Segunda semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	

Soluciones:

Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.
En la presentación de la solución están precedidas con el símbolo '%' tanto los comentarios como los resultados que aparecen por pantalla.

```
% Construimos la matriz de forma que:
%   y1 sea la media de los tres primeros días: coefs 1/3 en
%      las tres primeras variables y cero en el resto.
%   y2 es la media de los 5 días: todos los coefs 1/5
%   y3 es la suma de casos de los 5 días, todos los  coefs 1

A=[1/3 1/3 1/3 0 0; 1/5 1/5 1/5 1/5 1/5 ; 1 1 1 1 1]
%    0.3333    0.3333    0.3333         0         0
%    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000
%    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000


% Método para obtener la estadística de la semana 1
% -------------------------------------------------

PCRplus_s1 = [40 48 37 43 26]'
%    40
%    48
%    37
%    43
%    26

A * PCRplus_s1
```

```
%   41.6667
%   38.8000
%  194.0000

% Método para obtener los resultados de las dos semanas a la vez
% ---------------------------------------------------------------

% Preparamos la matriz de datos de forma que:
%   primera columna = datos de la primera semana
%   segunda columna = datos de la segunda semana

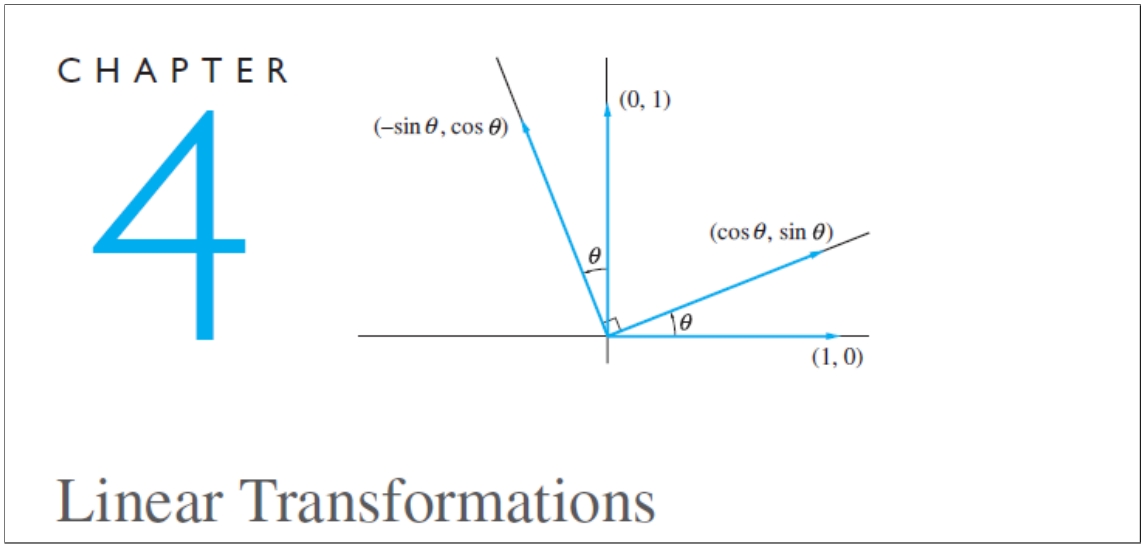
PCRplus = [40 48 37 43 26 ; 27 48 44 39 45]'
%    40    27
%    48    48
%    37    44
%    43    39
%    26    45

A * PCRplus
%   41.6667   39.6667
%   38.8000   40.6000
%  194.0000  203.0000
```

P.3 Semana 29 de septiembre

Aplicaciones lineales: Giro en $\mathbb{R}^2$ alrededor del origen

Matriz estándar del giro en $\mathbb{R}^2$ de centro en el origen y ángulo θ.
Ejercicio 1.4.12 (Tema 1, pag. 35 de las diapositivas)



S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9ª. Pearson. 2015.

La matriz estándar del endomorfismo, o matriz respecto de la base canónica, es:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

En efecto, siendo $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$,

$$A = [\, f(\vec{e_1})\ f(\vec{e_2})\,] \quad con \quad \begin{cases} f(\vec{e_1}) = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \text{sen}\theta\, \vec{e}_2 \\ f(\vec{e_2}) = -\text{sen}\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ en el sentido antihorario o positivo

$-\pi < \theta < 0$ en el sentido horario o negativo

Giro y simetría en $\mathbb{R}^2$ y composición de ambos: Ejercicio Adicional 1.4.15

a) En $\mathbb{R}^2$, escribe la matriz estándar correspondiente al giro de 50 grados en sentido antihorario de centro en el origen.	$A =$
b) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4,3)$	$\vec{v}_{\text{girado1}} =$
c) Comprueba que las normas de los dos vectores son iguales, utilizando la función `norm()`	$\| \vec{v} \| =$ $\| \vec{v}_{\text{girado1}} \| =$
d) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4,3)$ para un giro de 50 grados en sentido horario.	$\vec{v}_{\text{girado2}} =$
e) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4,3)$ para un giro de 180 grados	$\vec{v}_{\text{girado3}} =$
f) Escribe la matriz estándar S de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la simetría o reflexión respecto del eje X.	$S =$
g) Escribe la matriz estándar B de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la siguiente composición: giro de 50 grados en sentido antihorario alrededor del punto $(0,0)$, en primer lugar, y en segundo lugar simetría o reflexión respecto del eje X.	$B =$
h) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4,3)$ mediante la transformación anterior	$\vec{w} =$

Inversa de un endomorfismo e inversa de una matriz cuadrada. Determinantes.

Los siguientes resultados son equivalentes:

- A_n es invertible
- rgA_n=n
- det$A_n \neq 0$

La función `inv()` calcula la inversa de una matriz. Al igual que ocurre con las funciones `rank()`, `rref()` y `null()`, no debe usarse esta función si la matriz incluye variables simbólicas.

La funcion `det()` calcula el determinante de una matriz. Puede usar variables simbólicas.

Antes de calcular la inversa de una matriz debes asegurarte de que el valor de su determinante ni es cero ni compatible con cero dentro de la precision numérica de MATLAB.

HVZ12_EjemploE_pg44 (enunciado en pg. 42 de las diapositivas). Encuentra la inversa de la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2)$.

Ejercicio 2.9 (enunciado en pg. 62 de las diapositivas). Clasifica el sistema lineal en función del parámetro a, haciendo uso del determinante de la matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + a\,x_3 = a \\ 2x_1 - a\,x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: .....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: .....

El sistema es incompatible si y sólo si: .....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí, es decir, que no hay valores de a repetidos entre los tres tipos. Y comprueba además que todos los posibles valores de a ($\in \mathbb{R}$) están considerados.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO ADICIONAL 1.4.15  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> a=50
        50

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]   % respuesta a)
    0.6428   -0.7660
    0.7660    0.6428

>> v=[4 3]'
     4
     3

>>vg1=A*v      % respuesta b)
    0.2730
    4.9925

>> norm(v)     % respuesta c)  esta instrucción y la siguiente
     5
>> norm(vg1)
    5.0000

>> A = [cosd(-a)   -sind(-a) ;   sind(-a)    cosd(-a)]
    0.6428    0.7660
   -0.7660    0.6428

vg2 = A*v      % respuesta d)
    4.8693
   -1.1358

>> norm(vg2)
     5

>> a = 180
   180

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    -1     0
     0    -1

>> vsimetrico_respecto_origen = A*v   % respuesta e)
 -4
 -3

>> % Con el giro de 180 grados se obtiene el vector opuesto.
>> % Esta transformación se conoce con dos nombres: giro de 180
>> % grados y simetría respecto del origen.
```

```
>> S=[1 0; 0 -1]    % respuesta f)
     1   0
     0  -1

>> B = S * A        % respuesta g)
    0.6428   -0.7660
   -0.7660   -0.6428

>> B*[4 3]'         % respuesta h)
    0.2730
   -4.9925
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución HVZ12_EjemploE_pg44  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>>  A = [3 2 ; 1 2]
>>  B=inv(A)

    0.5000   -0.5000
   -0.2500    0.7500

>> format rat
>> inv(A)

       1/2          -1/2
      -1/4           3/4

>> % g(x1,x2) = (1/2 x1 -1/2 x2, -1/4 x1 + 3/4 x2)



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución EJERCICIO 2.9  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> syms a real
>> A=[-1 -2 a; 2 -a 2; 1 2 4]
>> b=[-a -2 3]'

 [-1, -2, a]
 [ 2, -a, 2]
 [ 1,  2, 4]

-a
-2
 3

% 1)   CASO SCD
>> det(A)  % el SL, con tres ecuaciones y tres incognitas, es comp.
           % determinado si y solo si rgA=3
           % si y solo si det(A) distinto de cero.
           % No puedo usar rank() porque la matriz es simbólica,
           % y además el enunciado dice que haga uso del determinante.
           % Ya que no puede haber infinitas soluciones,  rg(A)
           % no puede ser menor que 3 (número de cols), por tanto ha de ser 3.
           % Con eso tengo garantizada además la  compatibilidad, pues
           % rg(A*) también será 3 ya que hay tres filas y no se puede aumentar más
           % el rango

 a^2 + 8*a + 16

% Da como resultado la "expresión desarrollada" del  polinomio en a
% de grado 2. Desarrollado significa expresado como sumas.
```

```
>> solve(ans)  % en vez de hacer solve(det(A))
               % o solve(det(A)==0)
               % hacemos solve(ans)  ans=última expresión calculada
 - 4
 - 4

% Las dos raíces del polinomio de grado 2 tienen el mismo valor, a=-4.
% Recordemos que todo polinomio en una variable, de grado n, y con coeficientes
% reales tiene n raíces, reales y/o complejas, simples o múltiples.


% Conclusion: el SL es comp. determ.  si y solo si a distinto de -4

% 2) Si a=-4 el sistema podrá ser en principio compatible indeterminado o incompatible.
% Veamos si es indeterminado o incompatible:

>> a = - 4;  A=[-1 -2 a; 2 -a 2; 1 2 4] ;  b=[-a -2 3]';
% Con las tres instrucciones de esta línea, A es matriz numérica con a=-4
% y b es vector numérico con a=-4

>> [rank(A) rank([A b])]

     2     3

% Incompatible para a=-4, pues los rangos no coinciden.

% Compatible indeterminado nunca
```

P.4 Semana 6 de octubre

Inversa y determinante de una matriz cuadrada.

Ejercicio 2.10 (enunciado en pg. 63 de las diapositivas). Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, y sabiendo que $D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 & 108 \\ 17 & 1 & 108 \\ 4 & 10 & 108 \end{bmatrix}$, calcula la matriz C. Si no existe, indícalo explícitamente.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución EJERCICIO 2.10  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> A=[2 -3 -5; -1 4 1; 1 -3 -4] , B=[2 1 -4; 0 1 4; 1 -2 -3],
>> D=[ 11 17 108  ; 17 1 108; 4 10 108]

     2    -3    -5
    -1     4     1
     1    -3    -4

     2     1    -4
     0     1     4
     1    -2    -3

    11    17   108
    17     1   108
     4    10   108

% El procedimiento más sencillo es el siguiente:
% Partiendo de A*B*C=D  analizamos si A*B es invertible

>> det(A*B)
-216

% obtenemos determinante distinto de cero, por tanto sí lo es

% inv(A*B)* A*B * C = inv(A*B)*D  es como queda la ec. premultiplicando
%                                 los dos miembros por esa inversa
%                                 =>  C = inv(A*B)*D

C=inv(A*B)*D
    2.0000    1.0000   -29
    2.0000    2.0000    11
    1.0000         0     4

% Comprobación:
% A*B*C-D tiene que dar como resultado una matriz de ceros del tamaño de D
>> A*B*C-D
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

Ejercicio 2.24 Leon 2015. Ejercicio 11 pg. 85. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $AX + B = C$ b) $XA + B = C$
c) $AX + B = X$ d) $XA + C = X$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución EJERCICIO 2.24  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> A=[5 3; 3 2], B=[6 2; 2 4], C=[4 -2 ; -6 3],

     5     3
     3     2

     6     2
     2     4

     4    -2
    -6     3

% apartado a)
% AX + B = C   =>   AX = C - B => X = inv(A)*(C-B)
>> X=inv(A)*(C-B)
   20.0000   -5.0000
  -34.0000    7.0000

>> A*X + B - C   % comprobación de que AX+B-C es la matriz cero
    1.0e-13 *
    0.1421         0
         0    0.0355

% apartado b)
% XA + B = C   =>   XA = C - B => X = (C-B)*inv(A)
>> X=(C-B)*inv(A)
    8.0000  -14.0000
  -13.0000   19.0000

>> X*A+B-C   % comprobación
   1.0e-13 *
    0.1421    0.0711
         0    0.0711

% apartado c)
% A X + B    =  X   =>   A X - X = -B  =>
% A X - I X  = -B   =>  (A-I) X = -B  => X = inv(A-I)*(-B)
>> X= inv(A-eye(2))*(-B)
    0.0000   -2.0000
   -2.0000    2.0000

>> A*X+B-X % comprobación
```

```
   1.0e-14 *
   -0.1110         0
    0.0444         0

% apartado d)
% X A + C = X      =>  X A - X   = - C  =>
% X A - X I = - C  =>  X (A - I) = - C  =>  X  = (- C)*inv(A - I)
>> X= (-C)*inv(A-eye(2))
    2.0000   -4.0000
   -3.0000    6.0000
>> X*A+C-X % comprobación
   1.0e-14 *
    0.1332    0.1776
    0.0888   -0.2665
```

Aplicaciones lineales e inversa.

Ejercicio 2.25. Lay 2016. Ejercicio 17 pg. 69. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que mapea $\vec{u} = (5, 2)$ en $(2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$ en $(-1, 3)$. Usa el hecho de que T sea aplicación lineal para encontrar la imagen dada por T de $3\vec{u}$, $2\vec{v}$ y $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
Añadido: Obtén la matriz estándar T de la transformación.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO  2.25 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u =[5 2]' ,  v=[ 1 3]'
fu=[2 1]' , fv=[-1 3]'  % llamamos así a sus imágenes o transformados

im1 = 3*fu        % f(3u)    = 3*f(u)      por ser aplicación lineal
im2 = 2*fv        % f(2v)    = 2*f(v)      por ser aplicación lineal
im3 = im1+im2     % f(3u+2v) = f(3u)+f(2v) por ser aplicación lineal

%     6
%     3

%    -2
%     6

%     4
%     9

% Apartado añadido, obtención de la matriz T  asociada:
%  T * [ u  v ]  = [ fu fv ]
%  Despejamos T multiplicando a la derecha por [u v]^-1

format rat ;  T = [fu fv] * inv([u v])
%   8/13          -7/13
%  -3/13          14/13

A*[u v] - [fu fv]     % Comprobación (en formato racional * significa 0)
       0              0
       *              0

% Observa que para poder calcular T se necesita usar la inversa de [u v],
% dicho de otra forma, tenemos que conocer los transformados o imágenes de un
% conjunto {u,v} linealmente independiente.
```

Espacios vectoriales: dependencia lineal en conjunto de polinomios.

Ejercicio 3.4. Apartado d). Considera el espacio vectorial $P_2(x)$ y determina si el conjunto $D = \{p(x), q(x), r(x)\}$, con $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $q(x) = 2 - 2x + 3x^2$, $r(x) = 7 + 8x + ax^2$, es linealmente dependiente o linealmente independiente, en función del valor de a.
Para el caso en el que el conjunto sea linealmente dependiente, escribe una relación de dependencia lineal.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO 3.4D  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Escribimos los polinomios a través de sus coeficientes.
% Los polinomios tienen los coeficientes siguientes:
% p(x):  p0, p1, p2   (1 ,  2 , 3)
% q(x):  q0, q1, q2   (2 , -2 , 3)
% r(x):  r0, r1, r2   (7 ,  8 , a)

% Los dos primeros polinomios, p y q, son l.i. porque uno no es múltiplo de otro.

syms a real
p=[1  2 3]' ;
q=[2 -2 3]' ;
r=[7 8  a]' ;

% El conjunto es l.d. si y solo si r es c.l. de p y q.
% Obviamente el valor del coeficiente r0
% saldría de la c.l. de p0 y q0. Y lo mismo sucedería con
% r1 que sale de la misma c.l. para p1 y q1, y que
% r2 que sale de la misma c.l. de p2 y q2.

A=[p q r]        % A tiene como columnas los polinomios
% [1,  2, 7]
% [2, -2, 8]
% [3,  3, a]

det(A)
% 108 - 6*a
solve(ans)    % solve(expresión) da la solución de la ec. expresión=0
              % ans es la última cantidad calculada, que no tenga nombre de salida.
              % En este caso es 108 - 6*a
              % Por tanto solve resuelve la ec. 108-6*a=0
% 18
% El conjunto es l.d. si y solo si a=18

% Calculamos ahora la relación de dependencia lineal para a=18

a=18      ;  r =[7 8  a]' ; A=[p q r]
%  1     2     7
%  2    -2     8
%  3     3    18

% Para obtener los coeficientes c1,c2,c3 de la
```

```
relación de dependencia lineal
% tenemos que encontrar una solución (c1,c2,c3) del SLH

%  1     2     7  |  0
%  2    -2     8  |  0
%  3     3    18  |  0

null(A,'r')    % con null resolvemos el SLH
% -5
% -1
%  1

% La relación de dependencia lineal es:
% -5*p - q + r = 0

-5*p-1*q+r   % Comprobación:
%     0
%     0
%     0

% Esta ecuación permite escribir:
%   p como c.l. de q y r   o
%   q como c.l. de p y r   o
%   r como c.l. de p y q
```

Dado un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$, obtener subconjunto l.i. máximo, y la/s relación/es de dependencia lineal en el conjunto inicial.

Ejerc. 3.17. Modificado.

Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

i) Obtén un subconjunto linealmente independiente máximo B ($B \subset S$ con el máximo número de vectores linealmente independientes posible). Da los vectores con sus valores numéricos, no sus nombres.

ii) Obtén la/s relacion/es de dependencia lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es decir, ecuaciones de la forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4 + c_5\vec{v}_5 = \vec{0}$, donde no todos los reales c_i son cero, que permitan despejar el/los vector/es eliminado/s en el apartado i) como combinación lineal del resto.

```
Se usa:
%  para indicar los datos que salen por pantalla
%% para los comentarios en el script


APARTADO i)
-----------

v1=[1 0 -3 2]'; v2=[0 1 2 -3]'; v3=[-3 -4 1 6]'; v4=[1 -3 -8 7]'; v5=[ 2 1 -6 9]';
S=[v1 v2 v3 v4 v5]
%  1  0 -3  1  2
%  0  1 -4 -3  1
% -3  2  1 -8 -6
%  2 -3  6  7  9
rref(S)
%  1  0 -3  0  4
%  0  1 -4  0 -5
%  0  0  0  1 -2
%  0  0  0  0  0

%% Vemos que las columnas pivotales son 1,2 y 4.
%% Por tanto un subconjunto máximo de vectores l.i. es B={v1,v2,v4}

%% Los vectores son las siguientes columnas:

%   1     0     2
%   0     1     1
%  -3     2    -6
%   2    -3     9
```

```
APARTADO ii)
------------
%% Recordemos que la solución de un SL proporciona
%% el conjunto de coeficientes por los que hay que
%% multiplicar las columnas para que la combinación
%% lineal de éstas produzca el vector de términos independientes.

%% El apartado ii) nos pide calcular los coeficientes
%% que producen el vector 0.

%% Tenemos que resolver el SLH siguiente:

%%  1  0 -3  1  2  |  0
%%  0  1 -4 -3  1  |  0
%% -3  2  1 -8 -6  |  0
%%  2 -3  6  7  9  |  0

%% S es la matriz de coeficientes, y como tiene rango 3, el SL
%% tendrá dos parámetros libres.

5 incógnitas - rango 3 (en S)  = 2 parámetros libres.

null(S,'r')
%  3  -4
%  4   5
%  1   0
%  0   2
%  0   1

%% null(S,'r') nos dará dos soluciones independientes,
%% con las que se construyen todas.

%% Las relaciones de dependencia lineal son entonces:
%%    3 v1 + 4 v2 + v3              = 0
%%   -4 v1 + 5 v2       + 2 v4 + v5 = 0

%% De la primera podemos despejar el vector v3 como c.l. de v1 y v2.
%% De la segunda podemos despejar el vector v5 como c.l. de v1, v2 y v4.

%% v3 = - 3 v1 - 4 v2
%% v5 =   4 v1 - 5 v2 - 2 v4
```

P.5 Semana 13 de octubre

Espacios vectoriales

Ejercicio 3.5 Encuentra una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $\{(0,0,1,1),(1,1,0,0)\}$. (HVZ12, ejerc. 6, pg. 160).

SOLUCIÓN:

```
>> b1=[0 0 1 1]'; b2=[1 1 0 0]';

% En la siguiente instrucción vemos que {b1,b2} es conjunto l.i., porque
% su rango es 2
>> rank([b1 b2]
%  2

% Las columnas de la matriz identidad de orden 4 son base de R4, porque
% el conjunto de las 4 columnas tiene rango 4.
% I4=eye(4) ; e1=I4(:,1) ; e2=I4(:,2) ; e3=I4(:,3); e4=I4(:,4);

% Añadimos a B={b1,b2} en primer lugar el vector e1 para ver
% si nos quedan 3 vectores l.i.
>> B=[b1 b2 e1] ; rank(B)
%       3
% sí tenemos rango 3, porque e1 no es c.l. de los dos anteriores.

% Completamos el conjunto anterior con e2 para ver si nos quedan 4 vectores l.i.
>> B=[b1 b2 e1 e2] ; rank(B)
% 3
% El rango no aumenta, y eso significa que e2 es c.l. de las columnas anteriores.
% e2 no nos vale y probamos con e3

>> B=[b1 b2 e1 e3] ; rank(B)
% 4

% Una posible base de R4 que contenga los vectores b1 y b2 es B = {b1,b2,e1,e3}
```

Ejerc. 3.6 Determina para qué valores de a los vectores $\vec{b}_1 = (a,0,1)$, $\vec{b}_2 = (0,1,1)$ y $\vec{b}_3 = (2,-1,a)$ forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. (HVZ12, ej. 15, pg. 162).

SOLUCIÓN:

```
% Un conjunto de tres vectores de R^3, {b1,b2,b3}, es
% base de R^3 sii (si y sólo si) el conjunto tiene rango 3.

% En efecto {b1,b2,b3} es base sii [ b1 b2 b3 | v ] es compatible deter.
% para todo v sii rango{b1,b2,b3} = 3

% Los vectores incluyen una variable, a, por tanto no podemos utilizar
% la función rank() para estudiar el rango. Pero sí podemos usar det(),
% y aplicar la propiedad de que rango=3 sii det not=0

>> syms a real ;  b1=[a 0 1]' ;  b2=[0 1 1]'; b3=[2 -1 a]';
>> B=[b1 b2 b3] ;  solve(det(B))
```

```
% -2 1

% B={b1,b2,b3} es base de R^3 sii (a not= -2  y  a not= 1)
```

Ejerc. 3.7 En $\mathbb{R}^3$, obtén una base del subespacio generado por el conjunto $S = \{(1,0,1),(-1,1,0),(1,1,2)\}$. (HVZ12, pg. 163). *Añadido: Obtén una relación de dependencia lineal entre los vectores de S.*

SOLUCIÓN:

```
>> b1=[1 0 1]'; b2=[-1 1 0]'; b3=[1 1 2]'; S=[b1 b2 b3]
>> rank(S)
% 2
% Sólo hay 2 vectores l.i., por tanto el subespacio generado por S={b1,b2,b3},
que denotamos como <b1,b2,b3> o <S>, es un plano.

% Para obtener la base hay que quitar de {b1,b2,b3} un vector que sea c.l. del resto.
% La escalonada nos permitirá localizar qué vectores son l.d.

>> rref(S)
%       1          0          2
%       0          1          1
%       0          0          0

% El resultado que nos muestra la salida anterior es que b3 no produce
% columna pivotal, por tanto eliminaremos b3

% B={b1,b2} es base de <S>. Base={(1,0,1),(-1,1,0)}


% La relación de dependencia lineal nos la da directamente null()
>> null(S,'r')
%  -2
%  -1
%   1

% La relación de dependencia lineal es -2b1-b2+b3=0

% También la podríamos haber deducido de la forma escalonada reducida de S, fijándonos en
% cómo queda la columna 3 como c.l. de las columnas 1 y 2,
% pues la misma c.l. regiría en el SL original [b1 b2 | b3]

% La combinación lineal que vemos es:    b3 = 2*b1 + b2

% OTRO PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA BASE:
>> [Sred j] = rref(S)   % la segunda salida nos da los índices de las columnas pivotales
                        % de S, es decir, nos indica los números de orden de los
                        % vectores l.i. en la lista original.

 Base=S(:,j)            % Esta instrucción crea la matriz Base extrayendo de
                        % S los vectores que den lugar a columnas pivotales.
```

Ejerc. 3.8

a) Dado $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ obtén sus coordenadas respecto de la base $B = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$

b) Considerado el subespacio vectorial H de $\mathbb{R}^3$, con base $B = \{(1,1,1),(2,2,1)\}$, determina si el vector $\vec{x} = (5,5,6)$ pertenece o no a H, y en caso afirmativo obtén sus coordenadas relativas a la la base B.

SOLUCIÓN:

```
APARTADO a)

>> x =[2 3 4 5]' ;
>> b1=[1 1 1 1]' ;
>> b2=[0 1 1 1]' ;
>> b3=[0 0 1 1]' ;
>> b4=[0 0 0 1]' ;
>> B=[b1 b2 b3 b4]; rank(B)   % Comprobamos que rango 4 y que por tanto
                              % el conjunto es base de R4
% 4

% Las coordenadas de x relativas a la base B, que expresamos como x_B
% son los coefs. de la expresión de x como c.l. de los vectores de B.

% Los coefs se obtienen como solución de un SL compatible determinado,
% por tanto usamos linsolve(A,b), en nuestro caso:
>> xB=linsolve(B,x)
%  2
%  1
%  1
%  1

% Respuesta: Las coords. de x relativas a la base B son (2,1,1,1)

% Comprobación:

B*xB - x   % tenemos que obtener (0,0,0,0)
%  0
%  0
%  0
%  0

APARTADO b)

>> b1=[1 1 1]' ; b2=[2 2 1]'; x=[5 5 6]';

% H = < b1 b2 >
% x pertenece a H  sii   [b1 b2 | x ] es compatible
%%                 sii   rango([b1 b2 x]) = rango([b1 b2])   (Teorema R-F)
```

```
>> [ rank([b1 b2])  rank([b1 b2 x])]
%% 2  2

% El rango es el mismo, por tanto x pertenece a H

% Si nos hubieran pedido la dimensión de H podríamos decir que es 2, porque ese es el
% rango de [b1 b2].
```

P.6 Semana 20 de octubre

Espacios vectoriales

Ejerc. 3.17 Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H. Razona la respuesta.

b) A partir de la base B, obtén la/s ec/ecs. implícita/s de H, denotando a las variables de $\mathbb{R}^4$ como x_1, x_2, x_3, x_4.

c1) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

c2) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 8, -10, 10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

d) Obtén las relaciones de dependencia lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es decir, ecuaciones de la forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4 + c_5\vec{v}_5 = \vec{0}$, donde no todos los reales c_i son cero, que permitan despejar los vectores eliminados en el apartado a) como combinación lineal del resto.

SOLUCIÓN

```
Se usa:
%  para indicar los datos que salen por pantalla
%% para los comentarios en el script

%% APARTADO a
%% ----------

v1=[1 0 -3 2]'; v2=[0 1 2 -3]'; v3=[-3 -4 1 6]'; v4=[1 -3 -8 7]'; v5=[ 2 1 -6 9]';
S=[v1 v2 v3 v4 v5]
%  1  0 -3  1  2
%  0  1 -4 -3  1
% -3  2  1 -8 -6
%  2 -3  6  7  9

[Sred j] = rref(S)   %% en Sred se guarda la escalonada reducida
                     %% en j los índices de las columnas pivotales
%     1     0    -3     0     4
%     0     1    -4     0    -5
%     0     0     0     1    -2
%     0     0     0     0     0

%      1     2     4

 B        = S(:,j)   %% La base la forman los vectores de S
                     %% que aparecen como cols. pivotales en Sred.
```

```
%% Para la dimensión del subespacio H podemos utilizar
rank(S)
% 3
%% También podríamos usar length(j) pues j es un array que almacena los índices
%% de las cols pivotales, y length(j) es el número de elementos del array.

%% APARTADO b
%% ----------

syms x1 x2 x3 x4 real; x=[x1 x2 x3 x4]' ;
Bx=[B x]  %% La parte izda. es la base y a la derecha escribimos x simbólico.

% [  1,  0,  1,  x1]
% [  0,  1, -3,  x2]
% [ -3,  2, -8,  x3]
% [  2, -3,  7,  x4]

%% El formato de salida de Bx, con corchetes a los lados y comas
%% separando los elementos, es debido a que Bx es matriz simbólica,
%% al construirse con variables simbólicas.

%% Las tres primeras columnas proporcionan rango 3, pues son base.

%% (x1,x2,x3,x4) pertenece a H si y solo si
%% Bx (con el vector genérico añadido a la derecha) no aumenta el rango,
%% es decir, rg(Bx)=3, no pasa a ser 4.

%% Al ser Bx cuadrada podemos usar directamente la condición
%% de que el determinante sea 0 (para que el rango no sea 4).

det(Bx) %% la expresión resultante igualada a cero es la ec. implícita de H.

% 10*x1 - 5*x2 + 4*x3 + x4

%% Por tanto la ec implícita es:   10x1 - 5x2 + 4x3 + x4 = 0

%% A=[10 -5 4 1], por tanto la ec. implícita tb la podemos escribir
%% como A x = 0 , con la A dada  (x  vector y 0 también vector)
%% Dicho de otra forma, A es la matriz de coeficientes
%% de la ecuación implícita de H

%% Se cumple   dim Esp. total = nº de ecs del subesp. + dimensión del subesp
%%                     4       =       1               +  3

%% Comprobación de que la ec. es correcta: A * solución tiene que ser igual a cero
%% y las soluciones que tenemos que comprobar son los tres vectores v1 v2 y v4
%% que forman la base

A*B
% 0     0     0
```

```
%% Otra forma de obtener la ecuación implícita (método 2, pg. 81 de las diapositivas).
%% Más  desarrollado en los apuntes titulados "Material suplementario:
%% Formas paramétrica e implícita de los subespacios de Rn"
%% con enlace desde la web de la asignatura y desde Moodle
%% https://personales.unican.es/carballor/25_26_G282/todo.html


A = null( B', 'r') '
% 10 -5 4 1
%% Por tanto 10x1 - 5x2 + 4x3 + x4 = 0 es la ec. implícita

%% APARTADO c
%% ----------

syms a real , v=[a 4 -5 -10]'
A*v  %% v pertenece a H si y solo si cumple la ecuación implicita A * v = 0
     %% por tanto A*v ha de ser 0
% 10*a - 50
solve(ans)
% 5              %% a=5

%% PARA OTRO MODELO DE EJERCICIO
% v = [a 8 -10 10]'
% A*v
%% 10*a - 70
% solve(ans)
%% 7               %% a = 7


%% APARTADO c con otro método:
%% ---------------------------
%% Por ser H hiperplano, es decir, subespacio de dimensión n-1,
%% podemos hacer uso del determinante de
%% [v1 v2 v4 v] para determinar si v pertenece.
%% Obviamente v pertenece si y solo si el determinante es 0
%% (equivalente al rango 3).

%% solve(  det([B v])  )   dará como salida el valor de a.

%% APARTADO d (ESTE APARTADO ESTÁ TAMBIÉN PRESENTADO EN LA PRÁCTICA 4)
%% ------------------------------------------------------------------

%% Recordemos que la solución de un SL Ax = b proporciona el conjunto
%% de coeficientes tales que la combinación lineal de las columnas de A,
%% usando estos coeficientes, produzca el vector de términos independientes.
%% El apartado d) nos pide calcular los coeficientes que producen
%% el vector 0.

%% null(S,'r') nos dará las dos soluciones independientes.
```

```
%% Y esas soluciones son precisamente los coeficientes a usar en las dos
%% relaciones de dependencia lineal, independientes entre sí.

%% En efecto sabemos de antemano que tenemos dos soluciones independientes
%% porque en la escalonada reducida de S teníamos dos columnas no pivotales,
%% que obviamente dan lugar a dos parámetros libres.

null(S,'r')
% 3 -4
% 4  5
% 1  0
% 0  2
% 0  1

%% Las relaciones de dependencia lineal son entonces:
%%  3 v1 + 4 v2 + v3 = 0
%% -4 v1 + 5 v2 + 2 v4 + v5 = 0

%% De la primera y segunda podemos despejar, respectivamente, los vectores
%% dependientes v3 y v5 como combinación lineal de los vectores de B

%% v3 = - 3 v1 - 4 v2
%% v5 =   4 v1 - 5 v2 - 2 v4
```

Ejerc. 3.23 Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y) \,/\, y = 2x\}$ y otro sobre la recta $\{(x, y) \,/\, y = x/2\}$ (*Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90*).

SOLUCIÓN

```
% Para la recta de ec. y=2x  tomo como base   { (1 ,  2 ) }
%   llamaré a esta recta r1

% Para la recta de ec. y=x/2 tomo como base   { (1 , 1/2) }
%   llamaré a esta recta r2

format rat  % Pues ya vemos desde el principio que tenemos fracciones

b1=[1 2]'; b2=[1 1/2]';  B=[b1 b2]

% {b1,b2} es base de R2, por ser los dos vectores l.i. y generar R2.

% Cualquier vector v de R2 se expresará de forma única como c.l. de {b1,b2}, es decir,
% existirán alpha y beta únicos tales que
% v = alpha*b1 + beta*b2

% alpha*b1 es un vector de la recta r1 que llamaré v1
%  beta*b2 es un vector de la recta r2 que llamaré v2

% por tanto v se podrá escribir como la suma v1+v2
```

```
v=[5 6]'
sol=linsolve(B,v)  % función para obtener la solución de un SL compatible
                   % determinado, con B matriz de coeficientes y v vector
                   % de términos independientes
%       7/3
%       8/3

v1=sol(1)*b1   % sol(1) es la primera entrada de sol, o sea alpha

%      7/3
%      14/3

v2=sol(2)*b2   % sol(2) es la segunda entrada de sol, o sea beta

%       8/3
%       4/3

% Comprobación:
v1 + v2 - v    % el resultado tiene que ser (0,0)

% 0
% 0
```

La solución es entonces: $\boxed{\vec{v_1} = (7/3, 14/3) \qquad \vec{v_2} = (8/3, 4/3)}$

Ejercicio 3.24, con los datos del vector $\vec{v}$ modificados.

Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
* el plano Π: $3x + 6y - z = 0$
* la recta $r : \{(1, 2, 3)\lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Obtén una base de Π.

b) Justifica si la suma de Π y r es o no suma directa.

c) Justifica si Π y r son o no complementarios.

d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (7, 11, 63)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano Π y un vector $\vec{v}_2$ de la recta r.

e) Si es posible la descomposición anterior:

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano Π.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta r.

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

Solución

```
% a) Obtenemos la base del plano resolviendo su ecuación  Ax=0  con null()

B_Pi = null([3 6 -1],'r')
```

```
 -2  1/3
  1   0
  0   1
```

Las dos columnas que proporciona null(), que son dos soluciones independientes de la ecuación $3x + 6y - z = 0$, nos dan una base del plano Π:

$\boxed{B_\Pi = \{(-2, 1, 0), (1/3, 0, 1)\}}$

```
% b) Escribimos como vector columna la base de la recta
B_r = [1 2 3]'  ;

% La dimensión del plano es el nº de vectores de cualquier base del plano,
% por tanto 2
% La dim. de la recta es el nº de vectores de cualquier base de la recta,
% por tanto 1
% La unión de las bases de plano y recta  genera el subespacio  plano+recta
% La dimensión de (plano+recta) es el rango de las dos bases unidas.
% La suma es directa si dim (plano+recta) = dim(plano) + dim(recta) =2+1=3

[ B_Pi B_r], rank([ ans ] )
```

```
%  -2  1/3  1
%   1   0   2
%   0   1   3
```

El rango es 3, por tanto la dimensión de la suma es 3, y la suma es directa. Visto de otra manera, al unir las bases de plano y recta queda conjunto l.i. (no hay que quitar ningún vector).

c) Π y r son complementarios porque se cumplen las dos condiciones: su suma es directa y la suma, al tener dimensión 3, es $\mathbb{R}^3$.

d y e) Es posible expresar cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ como suma de un vector de Π y un vector de r. Se ve fácilmente sin más que considerar una base con los dos primeros vectores en Π y el tercero en r y expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de esa base.

```
B = [ B_Pi B_r ] ; v = [7 11 63]'   ;
% Resolvemos el SL compatible determinado con linsolve(B,v), llamando c a la solución.
c = linsolve(B,v)    % matriz ampliada [ B | v ]
```

```
   7
  57
   2
```

```
% La solución es (7,57,2), por tanto  v = 7b1  + 57 b2 + 2 b3
% con v1 = 7 b1 + 57 b2   (en el plano)  y  v2 = 2 b3 (en la recta)

v1 = c(1)*B(:,1) + c(2)*B(:,2)
v2 = c(3)*B(:,3)
```

```
 v1=
  5
  7
 57

v2=
  2
  4
  6
```

$$\boxed{\vec{v}_1 = (5,7,57) \qquad \vec{v}_2 = (2,4,6)}$$

Comprobaciones:

```
[3 6 -1]*v1      % resultado cero si v1 se encuentra en el plano
rank([B_r v2])   % resultado 1 si v2 se encuentra en la recta r
v1 + v2 - v      % resultado el vector 0 si la descomp. está bien hecha
```

```
ans =
0
ans =
     1
ans =
 0
 0
 0
```

P.7 Semana 27 de octubre

Aplicaciones lineales

Imagen de un subespacio

Ejerc. 4.4 apartado c) y pregunta añadida. Dada la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, obtén una base de $f(V)$ y una base de $f(W)$ siendo V y W los siguientes subespacios:
$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x1 = x4, x3 = 0\}$
$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x4 = 0\}$

```
A=[1 0 3 -1; 0 1 2 -1; 0 0 0 0; 1 0 3 1]
%     1     0     3    -1
%     0     1     2    -1
%     0     0     0     0
%     1     0     3     1

%% f(V)
%% ====

ecV = [1 0 0 -1 ; 0 0 1 0] ; % matriz de coeficientes de las ec de V

BV = null(ecV,'r')
%     0     1
%     1     0
%     0     0
%     0     1

genfV = A*BV     % el resultado es conjunto  generador de f(V)
%     0     0
%     1    -1
%     0     0
%     0     2

%% Los vectores son l.i. (uno no es múltiplo de otro), por tanto el
%% conjunto es base: Base de f(V)= {(0,1,0,0), (0,-1,0,2)}

%% f(W)
%% ====

ecW = [0 0 0 1] ; % matriz de coeficientes de la ec de W

BW = null(ecW,'r')
%     1     0     0
%     0     1     0
%     0     0     1
%     0     0     0
```

```
genfW = A*BW     % el resultado es conjunto  generador de f(W)
%     1     0     3
%     0     1     2
%     0     0     0
%     1     0     3

rank(genfW)
% 2

%% Los vectores son l.d., pues el rango es menor que el número de ellos.

%% Base de f(W)= {(1,0,0,1), (0,1,0,0)} sin más que tomar
%% las dos primeras columnas, que no son una multiplo de la otra, y que
%% forman por tanto un subconjunto l.i. máximo.
```

Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla

Ejerc. 4.5 modificado. Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:
a) simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$
b) proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

Considerada la figura con los vértices P, M, Q, R y T dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simétrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$M = (6, 7)$		
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

• **Ampliación del ejercicio:** Obtén las siguientes tranformaciones lineales adicionales de la figura original:
c) Dilatación de un factor 2.
d) La siguiente composición de aplicaciones: dilatación de un factor 2 y a continuación simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$.
e) Giro centrado en el origen, de ángulo 20 grados en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

• **Notación:** Denota las matrices obtenidas para las transformaciones a), b), c), d) y e) como As ('s' por simetría), Apr ('pr' por proyección), Ad ('d' por dilatación), Acom ('com' por composición) y Ar ('r' por rotación/giro), respectivamente.

• **Representación gráfica:** (de los resultados obtenidos en las cinco transformaciones)

Las funciones de MATLAB de representación gráfica se usan para la mejor comprensión de los contenidos, pero no son materia exigida en la asignatura.

Solución Ejercicio 4.5 modificado:

```
% datos = [ 6 6 ; 6 7; 7 7 ; 8 6 ; 7 5 ; 6 6]'  % que están en estándar.
                  % se repite el último punto para cerrar la figura
                  % en la representación gráfica.
            % Antes de trasponer cada fila eran las coordenadas (x,y) de un punto.
            % Después de trasponer las coords (x,y) de cada punto están en una columna.

%  S  = [ 1 0 ; 0 -1 ]  % matriz de la simetría referida a su base natural
%  Pr = [ 1 0 ; 0  0 ]  % matriz de la proyección referida a su base natural

%  B = [ 3 1 ; -1 3 ]'  % base natural para la simetría y la proyección:
                        %  vector de la recta de simetría o de proy. en col 1
                        %  vector perpendicular                      en col 2


% Marco teórico del cambio de base de la AL:
% ------------------------------------------
% A = B*F*inv(B)  % Cambio de base: de matriz F referida a base natural
                  % a matriz A referida a base estándar

                  % Copia de deducción A = B*F*inv(B) de los apuntes:

                  %   Ecuaciones de partida:
                  %     B xB = x  => xB = inv(B)*x
                  %     B yB = y  => yB = inv(B)*y
                  %
                  %     F xB = yB  ,  A x = y
                  %
                  %   A partir de ellas, sustituyendo xB e yB
                  %     F inv(B) x = inv(B) y
                  %
                  %   premultiplicando por B los dos miembros de la igualdad
                  %                  B F inv(B) x =  y
                  %
                  %   Y teniendo en cuenta que A x =  y
                  %
                  %     A = B F inv(B)

% Ejecución:
% ----------
 datos = [ 6 6 ; 6 7 ; 7 7 ; 8 6 ; 7 5; 6 6 ]'
 B  = [ 3 1 ; -1  3 ]'
 S  = [ 1 0 ;  0 -1 ]    ,  Pr = [1 0; 0  0]
 As  = B*S*inv(B)       % es la matriz estándar pedida (simetría)
 Apr = B*Pr*inv(B)      % es la matriz estándar pedida (proyección)

 datos_s  =  As*datos    % los vectores simétricos (las imágenes pedidas)
 datos_pr = Apr*datos    % los vectores proyectados (las imágenes pedidas)
```

```
% Visualización (gráfica):
% ------------------------
figure(1)
plot([ -9  24] , [ -3  8] , 'k-' )   % recta desde -3*(3,1) hasta 8*(3,1)
                                     % de (-9,-3) a (24,8)
hold on

axis equal  % incrementos de x   y  de y son iguales
plot([0], [0] , '+k')                % cruz negra en el origen (0,0)


% datos(1,:)       % en fila 1    coordenadas x de los vectores
% datos(2,:)       % en fila 2    coordenadas y de los vectores

plot(datos(1,:)    , datos(2,:)    , 'ok-')     % original en negro 'k'
plot(datos_s(1,:)  , datos_s(2,:)  , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
plot(datos_pr(1,:) , datos_pr(2,:) , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
saveas(figure(1),'figura_ejerc_4_5_ab.jpg')


% Resultados:
% -----------


datos =
     6     6     7     8     7     6
     6     7     7     6     5     6

B=
     3    -1
     1     3

S =
     1     0
     0    -1

Pr =
     1     0
     0     0

As =
    0.8000    0.6000
    0.6000   -0.8000

Apr =
    0.9000    0.3000
    0.3000    0.1000

datos_s =
    8.4000    9.0000    9.8000   10.0000    8.6000    8.4000
   -1.2000   -2.0000   -1.4000    0.0000    0.2000   -1.2000
```

```
datos_pr =
    7.2000    7.5000    8.4000    9.0000    7.8000    7.2000
    2.4000    2.5000    2.8000    3.0000    2.6000    2.4000


% datos_s'  y datos_pr' nos darán  las coordenadas (x,y) de cada punto
% para cubrir, respectivamente, las columnas 2 y 3 de la tabla.

datos_s'

    8.4000   -1.2000
    9.0000   -2.0000
    9.8000   -1.4000
   10.0000    0.0000
    8.6000    0.2000
    8.4000   -1.2000

datos_pr'

    7.2000    2.4000
    7.5000    2.5000
    8.4000    2.8000
    9.0000    3.0000
    7.8000    2.6000
    7.2000    2.4000
```

Ampliación del ejercicio con las transformaciones lineales c), d) y e)

```
% Ad = 2*eye(2)   % Matriz estándar de la dilatación de factor 2
                  % eye(2) es la matriz identidad de orden 2
                  % Ad es la matriz asociada respecto de cualquier base
                  % Demostración: Supuesto que en cierta base F=2*eye(2)
                  % A = B * F * inv(B) = B * 2*eye(2) * inv(B) =
                  % 2 * B*inv(B) = 2 * eye(2)


% Acom = As * Ad  % Matriz estándar: primero dilatación y después simetría
                  % Nótese que en este caso el orden es indiferente, ya que la matriz
                  % 2*eye(2) conmuta con cualquier matriz.


% a = 20          % ángulo de 20 grados (degrees)

% Matriz estándar de rotación/giro 20 grados en sentido positivo,
% es decir, contrario al de las agujas del reloj o antihorario

% R = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]  % sufijo 'd' para unidades de grados
                                           % en el argumento ángulo a

                  % Se aplicaría la misma fórmula, con a=-20, si el giro pedido
                  % fuera en el sentido de las agujas del reloj
```

```
% Ejecución:
% ----------

Ad   = 2*eye(2)
Acom = As * Ad

a = 20 , Ag = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]

datos_d   = Ad*datos    % dilatación aplicada a figura original

datos_com = Acom*datos  % dilat. y después simetría aplicada a fig. original

datos_R   =  R*datos    % Rotación aplicada a figura original

% Visualización:
% --------------

plot(datos_d(1,:)  , datos_d(2,:)  ,'ob-')  % dilatación           color azul
plot(datos_com(1,:), datos_com(2,:),'og-')  % 1º) dil. 2º) simetr. color verde
plot(datos_R(1,:)  , datos_R(2,:)  ,'om-')  % giro                 color magenta
saveas(figure(1),'figura_ejerc_4_5_abcde.jpg')

% Resultados:
% -----------

Ad =
     2     0
     0     2

Acom =
    1.6000    1.2000
    1.2000   -1.6000

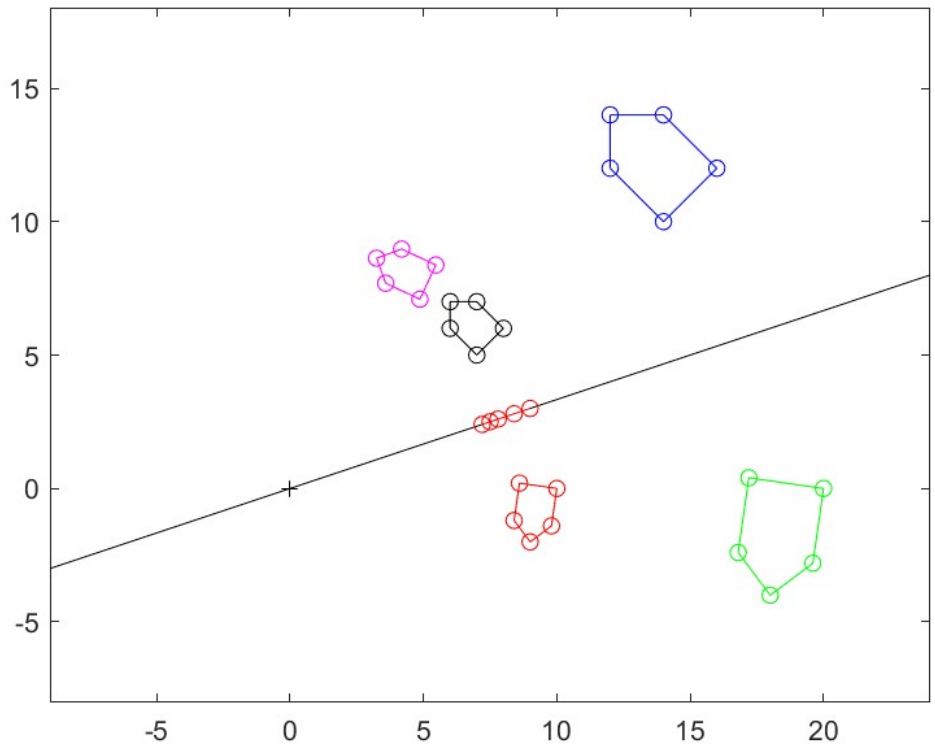
a =
   20

R =
    0.9397   -0.3420
    0.3420    0.9397

datos_d =
    12    12    14    16    14    12
    12    14    14    12    10    12

datos_com =
   16.8000   18.0000   19.6000   20.0000   17.2000   16.8000
   -2.4000   -4.0000   -2.8000    0.0000    0.4000   -2.4000

datos_R =
    3.5860    3.2440    4.1837    5.4654    4.8677    3.5860
    7.6903    8.6300    8.9720    8.3743    7.0926    7.6903
```



Matrices As, Apr, Acom en formato racional:

```
format rat
As
Apr
Acom


% As =
%       4/5            3/5
%       3/5           -4/5

% Apr
%       9/10           3/10
%       3/10           1/10

% Acom =
%       8/5            6/5
%       6/5           -8/5
```

Comprobación de invariantes:

```
% Las dos filas siguientes tienen que tomar el mismo valor, porque
% S y As son las matrices de la misma transformación, relativas a distinta base.

format short
[trace(S ) det(S ) rank(S )]
[trace(As) det(As) rank(As)]
```

```
        0    -1         2
        0   -1.0000    2.0000
```

```
% Las dos filas siguientes tienen que tomar el mismo valor, porque
% Pr y Apr son las matrices de la misma transformación, relativas a distinta base.

[trace(Pr ) det(Pr ) rank(Pr )]
[trace(Apr) det(Apr) rank(Apr)]
```

```
     1         0         1
    1.0000   -0.0000    1.0000
```

P.8 Semana 3 de noviembre

Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejercicio 5.4. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ usa una factorización $A = BDB^{-1}$, con D diagonal, para obtener A^6.

```
%%%
```

```
% Base del subespacio V(2)

B_dos = null(A-2*eye(3),'r')    % las cols de la salida nos dan la base e V(2)

%       1/3
%       2/3
%       1

B = [B_cero B_dos] % las cols de B son la base de autovectores.
D = diag([0 0 2])

%      -2              1              1/3
%       1              0              2/3
%       0              1              1

%       0              0              0
%       0              0              0
%       0              0              2

% Comprobación:

A*B-B*D

%       0              0              *
%       0              0              *
%       0              0              *

Asuper6=B*D^6*inv(B)

%      32             64            -32
%      64            128            -64
%      96            192            -96
```

Ejercicio 5.6. Considerado el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ tal que:
$\vec{a} = (1, 2)$ es autovector con autovalor asociado 3.
$\vec{b} = (-1, 1)$ es autovector con autovalor asociado 4.
a) Obtén la matriz estándar A de f.
b) Obtén $f(1, 7)$.

```
% El enunciado nos dice:
%  f(a) = 3*a, para un a distinto de 0.
%  f(b) = 4*b, para un b distinto de 0.

% Por tanto sabemos que f tiene dos autovalores distintos, 3 y 4.
% Dos autovalores simples en R2 => f diagonalizable.
% Una base respecto de la cual la matriz es diagonal es
% la formada por las cols de la matriz B=[a b]
%

format rat
a = [1 2]' ; b = [-1 1]'; B = [a b] ; D=diag([3 4]);

% a)
A=B*D*inv(A)

%      11/3           -1/3
%      -2/3           10/3
```

```
% b)
A*[1 7]'

%   4/3
%  68/3

% Otro procedimiento para apartado b) que no exige conocer A:

% escribimos (1,7) en coordenadas relativas a la base {a,b}

x=[1 7]'; xB=linsolve(B,v)
%  8/3
%  5/3

% x = 8/3*a +5/3 * b
% comprobación:
 8/3*a +5/3 * b

% 1
% 7

% f(x) = 8/3*f(a)+ 5/3*f(b) = 8/3*3*a + 5/3*4*b

fx =  8/3*3*a + 5/3*4*b

%   4/3
%  68/3

% Otro procedimiento para apartado a) usando solo contenidos de los temas 1 y 2.
fa=3*a, fb=4*b ,    % A * [a b] = [fa fb]    con [a b] invertible =>

A = [fa fb] * [a b]^-1
%      11/3           -1/3
%      -2/3           10/3
```

Añadido c) Interpretación geométrica de la transformación.

Se trata de una expansión/dilatación no uniforme, de factor 3 según la dirección $(1, 2)$ y de factor 4 según la dirección $(-1, 1)$.