1 Vectores, matrices, sistemas de ecs. lineales e introducción a las aplicaciones lineales
1.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación gaussiana y reducción de Gauss-Jordan
1.1 Ejercicios
1.2 Operaciones con vectores, combinación lineal y dependencia lineal
1.2 Rango de una matriz
1.2 Estructura de las soluciones de un sistema
1.2 Ejercicios
1.3 Operaciones con matrices
1.3 Expresión matricial y vectorial de un SL
1.3 Ejercicios
1.4 Introducción a las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$
1.4 Ejercicios
1.5 Tratando múltiples valores de $\vec{b}$ en $A\vec{x} = \vec{b}$. La ecuación $AX = B$
1.6 Inversa de un endomorfismo e inversa de una matriz cuadrada
1.6 Ejercicios

1 Vectores, matrices, sistemas de ecs. lineales e introducción a las aplicaciones lineales
1.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación gaussiana y reducción de Gauss-Jordan

- **Ejercicio 1.1.1** (HVZ12 (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012, 'Algebra Lineal y Geometría. Pearson), ejemplo A, pg. 3). Sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 (2 ecuaciones y 2 incógnitas) con solución única. Se dice que es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

- Marco general: Sistema de m ecuaciones lineales (SL) con n incógnitas, con coeficientes reales a_{ij}, y con términos independientes b_i también reales.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

- Partiendo de un sistema lineal original, las siguientes transformaciones del mismo producen sistemas lineales que tienen las mismas soluciones:

  i) Multiplicar ecuación por real no nulo (escalamiento de una ecuación).

  ii) Intercambiar dos ecuaciones entre sí (es decir, cambiarlas de orden).

  iii) Sumar a una ecuación un múltiplo de otra (reemplazamiento).

  Estas transformaciones se denominan **operaciones elementales**.

- La solución debe ser expresada vectorialmente: Vector solución $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots . x_n)$.
  Vector = matriz columna, con elementos reales.

  Por ejemplo la solución del Ejercicio 1.1.1 es $\vec{x} = (1, 1)$, que matricialmente se expresa como $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

  $\vec{x} = (1, 1)$, con dos entradas, es un elemento del conjunto $\mathbb{R}^2$, o espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$.

  $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, con n entradas, es un elemento del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

- Comprobación de la solución.

- Matriz de coeficientes, vector de términos independientes y matriz ampliada de un SL.
  - Expresiones de los tamaños de las matrices: Matriz $m \times n$, o matriz de orden n, para rectangulares o cuadradas respectivamente.
  - Matriz de coeficientes A.
  - Matriz ampliada $[\, A \mid \vec{b}\,]$ o A^*.

- **Ejercicio 1.1.2** (HVZ12, ejemplo B, pgs. 3-5). SL 3 x 3 (3 ecuaciones y tres incógnitas)

  Obtener la solución del SL: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

  considerando sólo la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella. Aplica en primer lugar eliminación gaussiana, y a continuación reducción de Gauss-Jordan. Encontrarás que la solución es única.

- **Ejercicio 1.1.3** (HVZ12, ejemplo C, pgs. 5-6). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

  SL 3 x 4 (3 ecuaciones y 4 incógnitas). Resolución considerando la matriz ampliada y las operaciones elementales sobre ella (Gauss-Jordan). Encontrarás que el SL tiene infinitas soluciones, con un parámetro libre. Se dice que es compatible indeterminado, con un grado de indeterminación en este caso.

- Esquema:
  - Aplicando las operaciones elementales adecuadas a A^* llegamos a una forma escalonada de A^* cuando hayamos conseguido que el primer elemento distinto de cero de cada fila esté a la izda del primer elemento distinto de cero de la fila siguiente, y si además hay filas con todos los elementos cero éstas se encuentren en último lugar. El procedimiento de obtener la forma escalonada de una matriz mediante operaciones elementales se denomina Eliminación Gaussiana.
  - La Eliminación Gaussiana Simple es un algoritmo de eliminación gaussiana concreto en el que no se realizan escalamientos, las operaciones de reemplazamiento se realizan en un orden prefijado, y los intercambios sólo se realizan si son necesarios y en ese caso también en un orden prefijado.
  - En una matriz escalonada al primer elemento distinto cero de una fila se le denomina pivote, y a las columnas en las que existe un pivote las denominamos columnas pivotales. Además, llamamos filas pivotales a las filas no nulas de una matriz escalonada. El número de cualquiera de los tres en una matriz escalonada (pivotes, columnas pivotales y filas pivotales) es obviamente el mismo.
  - Matriz escalonada reducida: es una matriz escalonada con pivotes 1 y ceros por encima de los pivotes. Los pivotes 1 se consiguen mediante el escalamiento de las filas.
  - Reducción de Gauss-Jordan (G-J): transformación mediante operaciones elementales de la matriz ampliada de un SL o de una matriz en general, hasta llegar a su **forma escalonada reducida**. Con esta última matriz obtenemos el SL más sencillo posible que tiene las mismas soluciones que el original. La forma escalonada reducida de una matriz es única.

- Distinción entre incógnitas principales y parámetros libres en los SL indeterminados.
- Solución (conjunto de todas las soluciones) en forma vectorial, o en forma vectorial paramétrica si el sistema es indeterminado. Lugar geométrico del conjunto infinito de soluciones.
- Soluciones particulares en los sistemas indeterminados.

Resolución de SL mediante eliminación gaussiana: $A^* \to \ldots \to A^*_{\mathrm{esc.}}$

Resolución de SL mediante la reducción G-J: $A^* \to \ldots \to A^*_{\mathrm{esc.red.}}$ (o $A^*_{\mathrm{red.}}$)

Utilizaremos el símbolo $\sim$ para expresar que las matrices ampliadas sucesivas corresponden a haber aplicado las operaciones elementales antes mencionadas, y que por tanto los correspondientes sistemas lineales tienen las mismas soluciones.

$A^* \sim \ldots \sim A^*_{\mathrm{esc.}} \sim \ldots \sim A^*_{\mathrm{esc.red.}}$

Decimos de los sistemas lineales asociados a esta sucesión de matrices, y que por tanto tienen la misma solución, que son **sistemas lineales equivalentes**.

- Para cualquier matriz genérica M definimos su **rango**, rg$M$ o rg(M), como el número de columnas pivotales de cualquier forma escalonada de la matriz. En efecto todas las formas escalonadas de una matriz tienen el mismo número de columnas pivotales, cumpliéndose además que éstas ocupan la misma posición. Recordemos que las formas escalonadas se obtienen con las operaciones elementales sobre sus filas, que comprenden reemplazamiento, escalamiento (por factor distinto de cero) e intercambios.

  rg$(M_{m\times n})$ es como máximo el menor de los valores de m y n.

  - no puede haber más de n columnas pivotales
  - no puede hablar más de m filas pivotales

- **Ejercicio 1.1.4** (HVZ12, ejemplo D, pg. 7). SL 3 x 3 (3 ecuaciones y 3 incógnitas).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

No hace falta llegar hasta la forma escalonada reducida de la matriz ampliada, ya que a partir de la primera forma escalonada que obtengamos podremos inferir la ausencia de solución, al existir pivote en la última columna, o lo que es lo mismo, al existir en la forma escalonada una ec. del tipo $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \neq 0$.

- **Teorema 1.1.1** Teorema de Rouché-Frobenius.

$A_{m\times n}$ es la matriz de coeficientes.

A^* es la matriz ampliada.

Clasificación del SL respecto del tipo de solución.

• Sistema compatible determinado si y solo si $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A) = n$	una solución	SCD
• Sistema compatible indeterminado si y solo si $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A) < n$	infinitas soluciones	SCI
• Sistema incompatible si y solo si $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A) + 1$	ninguna solución	SI

Observación: Si rg(A)=m el SL es compatible.

- Aplicación del Teorema RF a los ejercicios 1.1.2, 1.1.3 y 1.1.4.
- Un SL se dice homogéneo, abreviado como SLH, si $\vec{b} = \vec{0}$.

Los SLH son siempre compatibles, ya que como mínimo tienen una solución que es $\vec{x} = \vec{0}$, denominada solución trivial.

Los sistemas no homogéneos no pueden, obviamente, tener el vector $\vec{0}$ como solución.

Observación: La eliminación gaussiana (sin llegar hasta la forma escalonada reducida), ya permite clasificar el SL como SCD, SCI o SI, puesto que los rangos ya quedan fijados. También permite obtener la solución, si bien de forma menos directa que cuando se ha llegado a la forma escalonada reducida. Si llegamos a la escalonada pero no a la reducida, necesitaremos efectuar sustitución hacia atrás para despejar las incógnitas (caso SCD) o las incógnitas principales (caso SCI).

- **1.1.5** Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados[1], utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ produce una solución válida del sistema).

$$I: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- **1.1.6** Igual al ejercicio 1.1.3 pero tomando como vector de términos independientes $\vec{b} = (0, 0, 0)$.

- **1.1.7** Obtén la solución del SL de HVZ12, ejemplo E, pg. 11. (Añadido: esboza su lugar geométrico).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- **1.1.8** Obtén la solución del SL con matriz ampliada $A^* = [\,1\,2\,0\,|\,7\,]$ (ec. del plano $x + 2y = 7$ en $\mathbb{R}^3$) y la de su correspondiente sistema homogéneo (ec. del plano $x + 2y = 0$ en $\mathbb{R}^3$).

- Cualquiera de los ejercicios desde el 1 hasta el 4, pgs. 12-13, de HVZ12.

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

1.2 Operaciones con vectores, combinación lineal y dependencia lineal

- Los vectores se expresan matricialmente como columnas.
- Toda matriz $m \times n$ se puede considerar concatenación de n vectores columna, cada uno con m entradas o componentes, o concatenación de m "vectores fila" de n componentes.

  $A = [\,\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_n]$

  Por ejemplo, para $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$ y $\vec{a}_2 = (4, 5, 6)$, vectores de $\mathbb{R}^3$,

  la matriz $A = [\,\vec{a}_1\ \vec{a}_2\,]$ es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
- Formalmente un vector fila es la matriz traspuesta de un vector columna.
  - $\vec{a}$ es una matriz columna
  - $\vec{a}^{\,t}$ es una matriz fila o vector fila

  Por ejemplo $\quad \vec{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{a_1}^{\,t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- Traspuesta de una matriz:

  Dada $A_{m\times n}$ se define matriz traspuesta de A, y se denota A^t, a aquella cuya fila i-ésima es la columna i-ésima de A.

  También se puede dar la definición en función de los elementos: A^t es la matriz tal que el valor de la posición (i, j) es el valor de la posición (j, i) en A. Podemos usar la notación siguiente: $a^t_{i\,j} = a_{j\,i}$.

  $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
- Una propiedad importante de los rangos es la siguiente: $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(M^t)$, para toda matriz M.

  Por tanto en el ejemplo anterior A tiene dos columnas pivotales, y A^t también tiene dos columnas pivotales.

- Son obvias las siguientes operaciones con vectores:
  - Establecer la igualdad de dos vectores.
  - Suma de vectores.
  - Multiplicación de un vector por un real (también llamado escalar).

  $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad , \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad ; \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

  $\vec{a} = \vec{b}$ si y solo si $a_i = b_i$ para todo i desde 1 hasta n

  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

  c $\vec{a} = (c\, a_1, c\, a_2, \ldots, c\, a_n) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$

- Dos de las operaciones elementales que describimos conllevan sumas de vectores fila y multiplicación de un vector fila por un real.

- Propiedades de la suma de vectores, de la multiplicación de un vector por un escalar y distributivas.
  - Conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \forall\ \vec{a}, \vec{b}, \in \mathbb{R}^n$.
  - Asociativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$.
  - Existencia de elemento neutro: $\exists\ \ \vec{0} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \ \ \forall\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n$.
  - Existencia de elemento opuesto: $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad \exists\ -\vec{a} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$
    $-\vec{a}$ es el denominado opuesto de $\vec{a}$. $-\vec{a}$ tiene como elementos los opuestos de los elementos de $\vec{a}$.

  - $1\ \vec{a} = \vec{a} \quad \forall\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n$. 1 es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}$.
  - Pseudoasociativa: $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$

  - Distributiva respecto de la suma de vectores
    $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

  - Distributiva respecto de la suma de escalares:
    $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Obtención del opuesto de un vector con la multiplicación por -1 (-1) $\vec{a} = -\vec{a}$
- Diferencia de vectores. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

- Conjunto de vectores y combinación lineal (c.l.):

  $\vec{b}$ es combinación lineal (c.l.) del conjunto finito de vectores $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p\}$ si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$ tales que

  $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_p\vec{a}_p = \vec{b}$ [2]

  Los c_i reciben el nombre de coeficientes o pesos de la combinación lineal.

  $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_p)$ es el vector de los coeficientes o pesos de la combinación lineal.

  $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores (basta con tomar todos los escalares 0, y ya tenemos la combinación lineal $\vec{0}$).

- **Ejercicio 1.2.1** Considera $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$. ¿Es $\vec{b} = (1, 2, 0)$ c.l. de los vectores de S?. ¿Es $\vec{c} = (0, 0, 5)$ c.l. de los vectores de S?.

- Dependencia lineal:
  - Un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p\}$ es linealmente dependiente (l.d.) si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$, no todos cero, tales que $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_p\vec{a}_p = \vec{0}$ [3]

    Si el conjunto es dependiente, entonces una ecuación como la anterior, con c_i que no son todos cero, se denomina relación de dependencia lineal.
  - Un conjunto de vectores es linealmente independiente (l.i.) si no es linealmente dependiente.

- **Ejercicio 1.2.2** Determina si el conjunto S del ejercicio anterior es l.d. o l.i.

- **Teorema 1.2.1** Teorema fundamental de la dependencia lineal: Un conjunto es l.d. si y solo si al menos un vector es c.l. del resto. En efecto, a partir de la relación de dependencia lineal [2] siempre se puede despejar un vector como c.l. del resto.

- **Ejercicio 1.2.3** (HVZ12, ejemplo A, pg. 15). Estudia si los vectores $\vec{a}_1 = (2, 1)$ y $\vec{a}_2 = (1, 1)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes.
- **Ejercicio 1.2.4** Estudia si los vectores $\vec{a}_1 = (1, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 5)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes (HVZ12, ejemplo B, pg. 16). Extrae un subconjunto linealmente independiente máximo (con el máximo número de vectores l.i. posible) y expresa los restantes como combinación lineal de ese subconjunto.
- **Ejercicio 1.2.5** Considerado el conjunto $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0)\}$. ¿Es A l.d.?. En caso afirmativo obtén una relación de dependencia lineal.

- Conclusiones para un conjunto $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p\}$
  - El conjunto es l.i. si y solo si todas las columnas de la forma escalonada[2] de $[\,\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_p\,]$ son pivotales.
  - De un conjunto l.d. se puede obtener un subconjunto máximo de vectores l.i. entre sí eliminando los que correspondan a columnas no pivotales en la forma escalonada.
  - Cada vector eliminado se puede expresar como combinación lineal del subconjunto máximo l.i.

  - Dos vectores son l.i. si y solo si uno no es múltiplo del otro.

[2] Cualquier forma escalonada

- Rango de un conjunto de vectores y rango de una matriz:

  El rango de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores l.i. entre sí con los que cuenta el conjunto. Aunque existan distintas elecciones de estos vectores l.i. el número de ellos es siempre el mismo.

  $\mathrm{rg}\{\,\vec{a}_1\,,\ldots\,,\vec{a}_n\,\}$

  El rango de una matriz ya fue definido como el número de columnas pivotales de cualquier forma escalonada de la misma. Continuando con la definición que ahora damos del rango de un comjunto de vectores, el rango de una matriz también podría definirse como el rango de sus columnas.

  Dada $A = [\,\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n\,]\quad,\qquad \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\{\,\vec{a}_1\,,\ldots\,,\vec{a}_n\,\}$

  Las dos definiciones son válidas, porque son equivalentes, ya que el número de columnas pivotales de una matriz es el mismo que el número de columas linealmente independientes.

Observación:

- No hace falta completar la reducción de G-J para determinar el subconjunto l.i. máximo o el rango, pues basta con llegar a una forma escalonada de la matriz para reconocer las columnas pivotales. El rango es el número de ellas, y el subconjunto l.i. máximo que se escoge sistemáticamente es el formado por las columnas de A correspondientes a las columnas pivotales en la forma escalonada.

- **Ejercicio 1.2.6** (HVZ12, ejemplo C, pgs. 17-18). Rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

  Obtén además un conjunto de vectores linealmente independiente máximo, tomado de sus columnas.

- **Teorema 1.2.2** La estructura de las soluciones de un SLH indeterminado tiene la forma:

  $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k,$ [4]

  siendo $\vec{v}_i$ vectores linealmente independientes, y k el número de parámetros libres.

  $k = n - \mathrm{rg}A$, siendo A la matriz de coeficientes.

  Análisis con el correspondiente homogéneo del **Ejerc. 1.1.3.**

- **Teorema 1.2.3** Relación entre la solución de un SL no homogóneo compatible indeterminado y la de su correspondiente homogéneo.

  $\vec{x}_{\mathrm{NH}} = \vec{p} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k,$ [5]

  siendo $\vec{p}$ una solución particular del SLNH y $\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$ la solución del correspondiente homogéneo.

  $k = n - \mathrm{rg}A$, siendo A la matriz de coeficientes.

  Análisis con **Ejerc. 1.1.3.**

- **1.2.7** Análisis de los teoremas 1.2.2 y 1.2.3 con el ejercicio 1.1.5.
- **1.2.8** Considera el conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \\ a \end{bmatrix}$, con a parámetro, y el vector $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ b \end{bmatrix}$, con b parámetro.

  a) Obtén el rango del conjunto S en función del parámetro a.

  b) Determina los valores de a y b para que $\vec{v}_4$ sea combinación lineal de los vectores de S. Justifica la respuesta.

  c) Escoge un par de valores (a, b) que verifiquen el apartado b) y obtén para ese caso los coeficientes de la combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ que producen $\vec{v}_4$.

- **1.2.9** Considera el sistema lineal de matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & a & 5 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right]$

a) Mediante eliminación gaussiana obtén la matriz ampliada B^* de un sistema lineal equivalente, de forma que B^* cumpla:
$b^*_{21} = 0$, $b^*_{31} = 0$, $b^*_{41} = 0$, $b^*_{32} = 0$, $b^*_{42} = 0$ y $b^*_{43} = 0$,

b) Determina, en función del parámetro a, el rango de la matriz de coeficientes A y el rango de la matriz ampliada A^*, basándote en el apartado anterior. Clasifica el sistema en base a esos rangos y rellena la tabla de resultados.

Usa una fila de la tabla para cada par de valores posible de los rangos (rg$A$, rgA^*). Asegúrate de que ningún valor de a esté en filas distintas de la tabla, y también de que entre todas las filas hayas considerado todos los valores de a. Si das más de una condición para el parámetro a utiliza los nexos adecuados "o" (la coma también significa "o") o "y".

Tabla de resultados

Valores de a	rango A	rango A^*	Tipo de sistema en cuanto a solución

- **1.2.10** Considera el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \left[\begin{array}{rrr|c} 2 & 5 & -3 & b_1 \\ 4 & 7 & -4 & b_2 \\ -6 & -3 & 1 & b_3 \end{array}\right]$$

a) ¿ Es el sistema lineal compatible para todo $\vec{b}$?. Razona la respuesta.

b) En caso de que la respuesta sea negativa, encuentra una ecuación que incluya a b_1, b_2 y b_3, y que permita que el sistema sea compatible.

- **1.2.11** Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y + 3z - 5t = 1 \\ 3y + 3z + 3t = 3 \\ x + 3y + 4z - 4t = 2 \end{cases}$, halla:

a) La solución general en forma vectorial paramétrica.

b) La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.

c) La solución general en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

- **1.2.12** Calcula a para que sea compatible el siguiente sistema y resuélvelo. $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 5 \\ 2x - y = 8 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

Los sistemas lineales con más ecuaciones que incógnitas se denominan sobredeterminados, y suelen ser incompatibles.

- **1.2.13** Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:

Punto	Masa
$\vec{v}_1 = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2$ g
$\vec{v}_2 = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5$ g
$\vec{v}_3 = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2$ g
$\vec{v}_4 = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1$ g

  - Calcula el centro geométrico del sistema. $\vec{v}_{\mathrm{c}} = \dfrac{\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k}{k}$
  - Calcula el centro de masa, $\vec{v}_{\mathrm{cdm}}$, del sistema, sabiendo que:

$$\vec{v}_{\mathrm{cdm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_k\vec{v}_k}{m_1 + \ldots + m_k}$$

    Comenta para cada apartado cual ha sido el conjunto de vectores empleado para la combinación lineal y cuales han sido los coeficientes o pesos utilizados.

    Enunciado tomado de LLM16 (Lay, Lay y McDonald, 2016. Linear Algebra and its Applications, Quinta edición/edición global), Ejercicio 29, pg. 49. (En Quinta edición en papel es Ejercicio 29 en pg. 33).

- Cualquiera de los ejercicios desde el 1 hasta el 5, pgs. 24-25, de HVZ12.

- Igualdad de matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$.
- Suma de matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$. Propiedades:
  - Conmutativa: $\forall\ A, B \in M_{m\times n},\ A + B = B + A$
  - Asociativa: $\forall\ A, B, C \in M_{m\times n},\ (A + B) + C = A + (B + C)$
    $M_{m\times n}$ es el conjunto de todas las matrices reales $m \times n$.
  - Elemento neutro: $\exists\ 0 \in M_{m\times n}\ /\ \forall\ A \in M_{m\times n}\ A + 0 = A$
    0 es la matriz cero. Todos sus elementos son cero.
  - Existencia de elemento opuesto:
    $$\forall A \in M_{m\times n} \quad \exists\ -A \in M_{m\times n}\ /\ A + (-A) = 0$$
    $-A$ es la denominada matriz opuesta. La matriz opuesta de A es la que tiene como elementos los opuestos de los elementos de A. El elemento opuesto de $a \in \mathbb{R}$ es $-a \in \mathbb{R}$
- Producto de una matriz por un real. Propiedades:
  - $1A = A\ \ \forall A \in M_{m\times n}$.
  - Pseudoasociativa: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)\quad \forall A \in M_{m\times n}\ \text{ y }\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  Observación: Se puede obtener la c.l. de matrices.
- Distributivas:
  - Distributiva respecto de la suma de matrices:
    $$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall A, B \in M_{m\times n}\ \text{ y }\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
  - Distributiva respecto de la suma de escalares:
    $$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall A \in M_{m\times n}\ \text{ y }\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
- Diferencia de matrices: $A - B = A + (-B)$

- Producto escalar[3] de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^{\,t}\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- Producto de matrices $A_{m\times n} B_{n\times p} = C_{m\times p}$. $\qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad [6]$

  La fórmula se conoce como regla fila-columna para el producto de matrices. O producto basado en productos escalares.

  - **Ejercicio 1.3.1** HVZ12, ejemplo I, pg. 36. Estudiar si los productos AB y BA son posibles, y en caso afirmativo determinarlos. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
  - $A[\,\vec{b}_1 \ \dots \ \vec{b}_p\,] = [\,A\vec{b}_1 \ \dots \ A\vec{b}_p\,]$
  - Propiedades algebraicas:
    - Asociativa: $\forall A, B, C \in M \quad (A\ B)\ C = A\ (B\ C)$
      M es el conjunto de matrices, y A, B y C han de ser multiplicables en ese orden.
    - Distributiva respecto a la suma de matrices:
      $\forall A, B, C \in M \quad A\ (B + C) = A\ B + A\ C \qquad (A + B)\ C = A\ C + B\ C$
    - Pseudoasociativa: $\forall A, B \in M$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha A)\ B = A\ (\alpha B) = \alpha(A\ B)$
  - Matriz identidad: $\qquad A_{m\times n} I_n = A_{m\times n} \qquad\qquad I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$
  - El producto de matrices no es necesariamente conmutativo
  - $AB = AC$ no implica que $B = C$.
  - $AB = 0$ no implica que B o C sean matrices nulas.
  - El producto matriz-vector es un vector. $A\vec{v} = \vec{w}$.

[3] también llamado estándar, canónico o habitual

- Traspuesta del producto:
  $(AB)^t = B^t A^t$, siempre que se pueda realizar el producto AB. Se extiende al producto de cualquier número de matrices: por ejemplo $(ABC)^t = C^t B^t A^t$

- Otras propiedades en relación con la trasposición de matrices y otras operaciones:
  $(A^t)^t = A \qquad (\alpha A)^t = \alpha A^t \qquad (A+B)^t = A^t + B^t$

- Producto matriz-vector calculado como c.l.:

$$A\vec{v} = [\,\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_p\,] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\vec{a}_1 + \ldots + v_p\vec{a}_p \qquad [7]$$

En $A\vec{v} = \vec{w}$, $\vec{w}$ resulta ser la c.l. de las columnas de A tomando como coeficientes las entradas de $\vec{v}$. El coeficiente que acompaña a la columna i de A es la entrada i de $\vec{v}$.

Ejercicio 1.3.2
$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{w}}{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times -1 \\ 0\times 1 + 0\times 2 + 6\times -1 \\ 1\times 1 + 1\times 2 + 3\times -1 \\ 0\times 1 + 1\times 2 + 1\times -1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↑ Desarrollamos el producto con la regla [6]

↑ Descomponemos en sumandos y sacamos factor común

Queda demostrada la interpretación del producto matriz-vector como c.l.

- Dada una matriz A_n y un número natural k, entonces A^k, leído como A a la potencia k, es el producto de A por sí misma k veces.

  Se define $A^0 = I$

- Otras propiedades del producto de matrices:

  Definimos primero:

  A_n se dice que es triangular superior (inferior) si los elementos situados debajo (encima) de la diagonal principal son cero.

  A_n se dice que es diagonal si es triangular superior y triangular inferior a la vez.

  - El producto de matrices triangulares superiores (inferiores) es triangular superior (inferior).
  - El producto de matrices diagonales es diagonal.

- Otras matrices con características especiales:

  A_n se dice que es simétrica si $A = A^t$.

Representación del SL mediante la ec. matricial $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Desarrollando el producto, y teniendo en cuenta ec. [1].

$\vec{x}_{n\times 1}$ es solución del SL [1] $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_{n\times 1}$ es solución de la ecuación matricial $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ [8].

Representación del SL mediante una ec. vectorial

Partimos de la igualdad: $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

descomponiendo el vector de la izquierda en n sumandos, y sacando como factor común las x_1, x_2, . . ., x_n, obtenemos:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ por tanto}$$

$$\boxed{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}}, \quad [2] \qquad \text{siendo } \vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n \text{ las columnas de } A.$$

$\vec{x}$ es solución del SL $\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ es solución de la ecuación vectorial $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$.

Expresado de otra forma, la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si $\vec{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A. Cada conjunto de coeficientes de la combinación lineal es una solución posible del SL.
La ecuación se ha designado como [2] porque ya había sido utilizada, expresando en ella que $\vec{b}$ es combinación lineal de los vectores $\{\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n\}$ si existen coeficientes $(c_1, \ldots, c_n)$, aquí denotados como $(x_1 \ldots x_n)$, para los que se cumple la igualdad.

Es obvio el paso de la ec. [8] a la [2] y viceversa, teniendo en cuenta el desarrollo del producto matriz-vector como combinación lineal (pg. 20 de las diapositivas).

Repaso del producto matriz-vector

Sea $A_{m\times n}$ con columnas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, y sea $\vec{x}$ un vector de n entradas, $\vec{x}_{n\times 1} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces el producto $A\vec{x}$, es la suma de las columnas de A, pesando cada una de ellas ordenadamente con cada entrada de $\vec{x}$.

$$A\,\vec{x} = [\ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \ldots \vec{a}_n\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

Expresado de otra forma, el producto $A\vec{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes o pesos las entradas de $\vec{x}$.

- **Ejercicio 1.3.3** Dado el SL de ecuaciones: $\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$, obtén la correspondiente ecuación matricial y la correspondiente ecuación vectorial.

- **Teorema 1.3.1** En un SL homogéneo (SLH) indeterminado, se cumple:
  - la suma de soluciones es solución
  - el producto de una solución por un escalar es solución
  - como consecuencia de los dos resultados anteriores, la combinación lineal de soluciones es solución

- **1.3.4** Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$. a) Encuentra a simple vista una solución particular de $A\vec{x} = \vec{0}$ que no sea la solución $\vec{0}$, teniendo en cuenta que solución es el par de coeficientes (α, β) tal que la combinación $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ es igual a $(0, 0, 0)$, siendo $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ las columnas de A.

  b) Encuentra la solución general basándote en el resultado anterior y justifica la respuesta.

- **1.3.5** a) Considera el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & -2 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = (3, 5, 8, 12)$.

  a) Escribe la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^4$ y α_i parámetros libres.

  b) Obtén la solución en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo (la misma A y $\vec{b} = \vec{0}$).

- **1.3.6** Considera el sistema lineal cuya matriz ampliada tiene la forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$

  a) ¿ Para que valores de a y b tiene el sistema lineal infinitas soluciones ?

  b) ¿ Para qué valores de a y b es el sistema lineal incompatible?

  Enunciado tomado de Leon, 2015, Linear Algebra with Applications. Novena edición. Pearson. pag. 41, ejercicio 10.

- **1.3.7** Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

  Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto:
  $\vec{v} =$ (17 mg de vitamina C , 54 mg de calcio, 31 mg de magnesio)

- Ejercicios de HVZ12: 14 y 15 (pg. 39).

1.4 Introducción a las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Aplicaciones o transformaciones

- Definición de aplicación f de un conjunto S en un conjunto T como una regla que asigna a cada elemento de S un elemento, y solo uno, de T.

  Ejemplos:
  Aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ $\quad y = 3x$
  Aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ $\quad y = n^2$
  (son los ejemplos A.1 y A.2 de HVZ12, pgs. 25-26)

- En $f(v) = w$, se dice de w que es la imagen de v, y se dice de v que es el original o antecedente de w.
- Imagen de f, $\mathrm{Im}f = \{f(v) \ / \ v \in S\}$. $\mathrm{Im}f \subseteq T$

- Aplicación sobreyectiva o suprayectiva: $\mathrm{Im}f = T$
- Aplicación inyectiva: Cada elemento de $\mathrm{Im}f$ tiene como máximo un antecedente. Otra forma de expresarlo es que si dos elementos son distintos sus imágenes también son distintas.
- Aplicación biyectiva: sobreyectiva e inyectiva a la vez.

- **Ejercicio 1.4.1** Rellena la tabla con V o F (verdadero o falso).

	sobreyectiva	inyectiva	biyectiva
$\mathbb{R} \overset{3x}{\longmapsto} \mathbb{R}$			
$\mathbb{N} \overset{n^2}{\longmapsto} \mathbb{N}$			
$\mathbb{R} \overset{x^2}{\longmapsto} \mathbb{R}$			
$\mathbb{R} \overset{x^2}{\longmapsto} \mathbb{R}^+$			

- Dadas f de S en T y g de T en U se define la composición de f y g, cómo:

$$\boxed{(g \circ f)(v) = g(f(v))}$$

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ S & \longmapsto & T & \longmapsto & U \\ v & & f(v) & & g(f(v)) \end{array}$$

  - La composición de aplicaciones es asociativa.
  - La composición de aplicaciones no necesariamente es conmutativa.

Ejercicio 1.4.2 Composición de dos aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. (HVZ12, Ejemplo B, pg. 27).

Aplicaciones Lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

- Por ser $\mathbb{R}^n$ el conjunto inicial y $\mathbb{R}^m$ el conjunto final, f asigna a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. $\vec{y} = f(\vec{x})$
- Definición 1 de aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$:

  f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es aplicación lineal si existe $A_{m\times n}$ tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

  A se denomina matriz estándar asociada a la aplicación lineal.

  La imagen de un vector mediante una aplicación lineal (a.l.) se obtiene de forma muy sencilla, simplemente se premultiplica el vector por la matriz asociada.

- **Ejercicio 1.4.3** Considera la aplicación lineal f con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

  a) Calcula la imagen de $\vec{x} = (1, 5)$.

  b) Calcula el antecedente de $\vec{y} = (-1, 18)$, si existe.

  Veamos como opera A sobre un vector genérico (x_1, x_2). Sabemos que producirá un vector imagen (y_1, y_2).

  $$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

  Otra forma de expresar f es esta: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$

- Ecuaciones de una aplicación lineal.

  En el ejemplo anterior son: $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$

- Si $m = n$ la aplicación lineal recibe el nombre de endomorfismo.

- **Ejercicio 1.4.4** Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ que asigne a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

Ejercicios que introducen **matriz de simetría** y **matriz de proyección**:

- **Ejercicio 1.4.5**. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que asigne a un vector $\vec{x}$ su reflejado o simétrico respecto del eje X.

- **Ejercicio 1.4.6**. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que asigne a un vector $\vec{x}$ su proyección sobre el eje X.

- **Ejercicio 1.4.7**. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que asigne a un vector $\vec{x}$ su simétrico respecto del plano XY.

- **Ejercicio 1.4.8**. En $\mathbb{R}^3$, determina la matriz estándar A de la aplicación lineal que asigne a cada vector $\vec{x}$ su proyección ortogonal sobre el plano XY.

- Definición 2 de aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es a. l. si cumple:

  $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
  $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Las definiciones 1 y 2 son equivalentes: o f cumple las dos definiciones o no cumple ninguna.
- Comprueba gráficamente con el Ejercicio 1.4.5 utilizando $\vec{a} = (2, 0)$ y $\vec{b} = (1, 2)$, que el reflejado de la suma es igual a la suma de los reflejados.

- Propiedades de las aplicaciones lineales:
  - $f(\vec{0}) = \vec{0}$
  - $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

- Definición/construcción de la matriz estándar A de la aplicación lineal f. Ejemplo con conjunto de partida $\mathbb{R}^3$, extensible a $\mathbb{R}^n$.

  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, siendo $\vec{e}_i$ el vector que tiene todas las entradas 0 excepto la de la posición i que vale 1.

  $$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

  $$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3)$$

  $\uparrow$
  Por ser f a.l.

$$\vec{y} = x_1 f(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) + x_2 f(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) + x_3 f(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$$

En este paso convertimos la c.l. en producto matriz-vector

$$\vec{y} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)\,]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

$$A = [\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ f(\vec{e}_3)\,]$$

Para una a.l. de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$:

$$\vec{y}_{m\times 1} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \ldots\ f(\vec{e}_n)\,]}_{A_{m\times n}} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

- Análisis de A para los cuatro últimos ejercicios.
- Se denomina rango de una a.l. de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ al rango de su matriz estándar asociada.
- El endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se denomina endomorfismo identidad y se denota id.

  $id(\vec{x}) = \vec{x}$

  La matriz estándar asociada al endomorfismo $id(\vec{x})$ en $\mathbb{R}^n$ es la matriz identidad de orden n, I_n.

- Matriz estándar asociada a la composición de aplicaciones lineales f y g

$$\begin{array}{ccccc} & A & & B & \\ & f & & g & \\ \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^m & \longmapsto & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) & \longmapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \longmapsto & A\,\vec{x} & \longmapsto & B\,A\,\vec{x} \end{array}$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p$$

$$g(f(\vec{x})) = B_{p\times m}\, A_{m\times n}\, \vec{x}$$

la matriz asociada a $g \circ f$ es $(B\ A)_{p\times n}$

Nótese como la aplicación o matriz que aparece más a la izquierda es la segunda en actuar ("la última que se aplica es la primera que se escribe en la multiplicación").

- Justificación de que la imagen de una recta mediante una aplicación lineal es una recta o un punto

Para simplificar tomamos la recta en $\mathbb{R}^2$. La forma vectorial paramétrica de sus puntos es $\vec{x} = \vec{p} + \alpha\vec{v}$, siendo $\vec{v} \neq \vec{0}$ el vector director, α parámetro libre, y $\vec{p}$ un vector distinto de cero si la recta no pasa por el origen.

$A\vec{x} = A(\vec{p} + \alpha\vec{v}) = A\vec{p} + A\alpha\vec{v} = A\vec{p} + \alpha A\vec{v}$

Denotando $\vec{q} = A\vec{p}$ y $\vec{w} = A\vec{v}$, la expresión de la imagen de la recta es $\vec{x} = \vec{q} + \alpha\vec{w}$
Si $\vec{w} \neq \vec{0}$ la imagen es la recta de vector director $\vec{w} = A\vec{v}$, con desplazamiento respecto del origen (0, 0) dado por el vector $\vec{q} = A\vec{p}$. Si por el contrario $\vec{w} = \vec{0}$ la imagen es el punto $\vec{q} = A\vec{p}$.

- **Ejercicio 1.4.9**. (HVZ12, ejemplo E, pg. 31). Obtén la imagen del contorno del cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (0,1), (1,1), mediante la aplicación lineal f de matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- **1.4.10**. Considera tres pruebas A,B,C con dos partes cada una con pesos 50%-50% (ejercicios 1 y 2) 75%-25% (ejercicios 3 y 4) y 80%-20% (ejercicios 5 y 6). Obtén la matriz que multiplicada por las calificaciones $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ de los seis ejercicios produce como resultado las calificaciones (calif_A, calif_B, calif_C) de las tres pruebas.
- **1.4.11**. Halla la matriz de la simetría respecto del plano x=y en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio que introduce la **matriz de rotación**:

- **1.4.12**. En $\mathbb{R}^2$ halla la matriz de un giro alrededor del origen de ángulo ϕ en sentido positivo.

- HVZ12. Algún/os apartado/s del Ejercicio 5 (pg. 38). Por ejemplo, a) Escribe la matriz de la siguiente aplicación: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3)$
- HVZ12. Uno de los apartados del Ejercicio 6 (pg. 38)

- Ejercicios Leon15, pag.75.
  Ejerc. 22. Se dice que A_n es **involutiva** si $A^2 = I$. Muestra que toda matriz de la forma $A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}$ es involutiva.
  Ejerc. 24. Se dice que A_n es **idempotente** si $A^2 = A$. Muestra que las siguientes matrices son idempotentes
  (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

- **1.4.13**. En la siguiente aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$, razona qué componentes de la imagen hacen que la aplicación no sea aplicación lineal. $f(x_1, x_2) = (cos(x_1) + sin(x_2), x_1 - x_2, x_1^3, 6)$. Aunque basta con que una componente incumpla el criterio, responde respecto a todas las que lo incumplen.

1.5. Tratando múltiples valores de $\vec{b}$ en $A\vec{x} = \vec{b}$. La ecuación $AX = B$.

Ejercicio 1.5.1. Si queremos estudiar/resolver un SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para dos valores $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$, es decir $A\vec{x} = \vec{b}_1$ es un SL y

$A\vec{x} = \vec{b}_2$ es el otro SL, podemos aplicar la eliminación gaussiana sobre una matriz ampliada con dos columnas a la derecha.

Al llegar a la forma escalonada de esta matriz, usamos la primera y segunda columna de la derecha para completar el estudio/resolución del primer y segundo sistema, respectivamente.

Lo aplicamos para el siguiente SL, que tiene tres ecuaciones, tres incógnitas, y que es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la eliminación de Gauss-Jordan, llegando hasta la forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 1 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}\right)$$

A $\quad$ $\vec{b}_1$ $\quad$ $\vec{b}_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Hemos completado G-J. $\quad$ rg(A)=número de filas, por tanto compatible para cualquier $\vec{b}$.
Además el rango es igual al número de incóg., por tanto SCD.

Podemos leer las soluciones a la derecha.

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_1$ la solución es $\vec{x_1} = (11, -5, 4)$, $\quad$ por tanto $A\vec{x_1} = \vec{b}_1$

Para el SL $A\vec{x} = \vec{b}_2$ la solución es $\vec{x_2} = (7, -2, 2)$, $\quad$ por tanto $A\vec{x_2} = \vec{b}_2$

Por otra parte sabemos que $A\,[\,\vec{x_1}\ \vec{x_2}\,] = [\,A\vec{x_1}\ A\vec{x_2}\,]$, como propiedad del producto de matrices.

y la última matriz es igual a $[\,\vec{b_1}\ \ \vec{b_2}\,]$

Por tanto podemos escribir la ecuación: $A\underbrace{[\,\vec{x_1}\ \vec{x_2}\,]}_{X} = \underbrace{[\,\vec{b_1}\ \vec{b_2}\,]}_{B}$

Si tuviéramos que obtener la solución X de una ecuación de la forma anterior, $\boxed{AX = B}$, siendo B una matriz, aplicaríamos este mismo procedimiento de reducción de Gauss-Jordan, pero en la "matriz ampliada múltiple" $[\,A \mid B\,]$.

Datos de este ejercicio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

Procedimiento: $[\,A \mid B\,] \sim \ldots \sim [\,A_{\mathrm{red}} \mid X\,]$

Solución de $AX = B$: $X = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Cada columna de X es la solución correspondiente a la misma columna en B.

En este caso A es cuadrada y las tres columnas son pivotales, por tanto $A_{\mathrm{red}} = I$ (es la identidad).

Por ser el rango de A igual al número de filas e igual al número de columnas los dos sistemas lineales analizados $A\vec{x} = \vec{b}$ son del tipo SCD (compatible determinado) para cualquier vector $\vec{b}$.

Leon, Linear Algebra with Applications, 2015. Ejercicio 11, pag. 41. Es un ejercicio similar a este pero más sencillo, por ser A una matriz 2×2

- Un endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ se dice que es invertible si existe un endomorfismo g en $\mathbb{R}^n$ tal que:

  $g \circ f = f \circ g = id$, y en tal caso se dice del endomorfismo g que es el inverso de f, y se le denota como f^{-1}. Además f^{-1} si existe, es único.

  Por tanto si f es invertible, $f^{-1}(f(\vec{x})) = f(f^{-1}(\vec{x})) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- Una matriz A de orden n se dice que es invertible si existe una matriz B de orden n tal que: $AB = BA = I_n$

  Si B existe es única, se denomina inversa de A y se denota como A^{-1}.

- Si f es un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ y A su matriz estándar asociada, entonces f es invertible $\Leftrightarrow$ A es invertible. En caso de que sean invertibles la matriz asociada a f^{-1} es A^{-1}, es decir, $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$$
$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

- Ejercicio 1.6.1 (HVZ12, ejemplo C, pgs. 42-43). Obtención de la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, si es que existe, mediante el método de Gauss-Jordan.

Justificación para una matriz A de orden n

En la ec. matricial $A\,B = I$, B es la matriz incógnita, inversa de A, que queremos calcular

$$A\,[\,\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\,] = [\,\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n\,]$$

Tenemos n sistemas $A\,\vec{b}_i = \vec{e}_i$, de forma que en cada sistema $[\,A \mid \vec{e}_i\,]$ el vector solución es $\vec{b}_i$. La matriz de coeficientes es la misma, por tanto las operaciones elementales que hay que realizar en los n sistemas son las mismas.

Escribimos la matriz ampliada del SL múltiple así: $\left[\ A \quad | \quad \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \ldots\ \vec{e}_n\ \right] =$

$$\left[\ A \quad | \quad I\ \right] \sim \ldots \underset{\text{G-J}}{\sim} \left[\ A_{\text{red}} \quad | \quad M\ \right]$$

Si $A_{\text{red}} = I$, entonces la ec. $AB = I$ tiene solución única B, quedando la expresión anterior cómo:

$[A \quad | \quad I] \sim \ldots \sim [I \quad | \quad B]$, y ya tenemos calculada A^{-1}, que es B.

Si $A_{\text{red}} \neq I$, entonces A no tiene inversa porque la ec. $AB = I$ es incompatible (falla para al menos una columna $\vec{e}_i$).

Observación: Si se verifica $[A \quad | \quad I] \sim \ldots \sim [I \quad | \quad B]$, entonces se cumple que $[B \quad I] \sim \ldots \sim [I \quad A]$, sin más que efectuar las operaciones elementales inversas y en el orden inverso[1].
El último resultado ($[B \quad I] \sim \ldots \sim [I \quad A]$), nos dice que $BA = I$, que es la segunda ecuación que requiere la definición de inversa ($A^{-1} = B$ requiere AB=I y $BA = I$)

[1] Dada una operación elemental, su inversa es la que deshace el efecto de la operación elemental. La inversa de multiplicar una fila por un escalar distinto de cero es dividirla por ese escalar distinto de cero. La inversa de un intercambio es el mismo intercambio. La inversa de sumar a una fila un múltiplo de otra es sumar a la fila el múltiplo de la otra pero cambiado de signo.

- Se dice que una matriz cuadrada es singular si no es invertible. Si es invertible se dice que no es singular.

- **Condiciones equivalentes a la no singularidad** Dada A_n las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - A tiene inversa, es decir que no es singular.
  - La forma escalonada reducida de A es la identidad.
  - A tiene rango n.
  - $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier $\vec{b}$.

- Otra forma de resolución de $A_n\vec{x} = \vec{b}$ si rg$A$=n es $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

- Dadas A y B invertibles y del mismo orden, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Esta propiedad se extiende a cualquier número de matrices.

- Dada A invertible $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

- Dada A invertible, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Ejercicio 1.6.2. Resuelve el SL $A\vec{x} = \vec{b}$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = (4, 6)$, utilizando la inversa de la matriz A.

- Ejercicio 1.6.3 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices. Para la primera usa `inv()` de MATLAB y para la segunda el método de Gauss-Jordan manualmente.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ejercicio 1.6.4 Resuelve el SL $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ utilizando la inversa de la matriz de coeficientes determinada en el ejercicio anterior.

- Ejercicio 1.6.5 Mediante eliminación gaussiana determina el rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$ en función del parámetro k. ¿Para que valores de k es A invertible?.

  Aplica sólo tres operaciones elementales, de forma que entre la original y la escalonada sólo tengas dos matrices intermedias: $A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_{\text{esc}}$

- Ejemplos y ejercicios de HVZ12:
  - Ejemplo D, pg. 44. Obtén la inversa de la matriz mediante el método de Gauss-Jordan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$
  - Ejemplo E, pg. 44. Encuentra la inversa de la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2)$. *Pista: Utiliza la matriz estándar asociada*.
  - Ejemplo G, pg. 47. Resuelve el SL $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - Ejercicios 5, 6 y 7. Algún/os apartado/s, pg. 48.