Tutorías presenciales (T.P.)

Ruth Carballo Fidalgo (UC). 2024-2025.

Contents

1 Semana 10 de febrero 2

2 Semana 24 de febrero 4

3 Semana 3 de marzo 7

4 Semana 24 de marzo 9

5 Semana 28 de abril 11

6 Semana 5 de mayo 15

7 Semana 12 de mayo 18

1 Semana 10 de febrero

Sobre 8+5=13 puntos

- **Ejercicio 1. No está en los apuntes. El SL es muy similar a HVZ12 Ejercicio 1.1.4b.** Rellena la plantilla.

Considerado el sistema lineal: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

a) (1.4 pts) Escribe la matriz ampliada del SL en la forma escalonada reducida.	b) **(3.0 pts)** Escribe la solución general en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^4$ y α_i parámetros libres.
$A^*_{\text{red}} =$	$\vec{x} =$
c) **(2.0 pts)** Escribe dos soluciones del SL que sean linealmente independientes entre sí.	d) **(1.6 pts)** Escribe dos soluciones del correspondiente sistema homogéneo que sean linealmente independientes entre sí.
Ninguna de las cuatro soluciones puede tener componente/s con valor absoluto mayor o igual que 6.	
$\vec{x_1} =$ $\vec{x_2} =$	$\vec{x_1} =$ $\vec{x_2} =$

No se puntúan las respuestas inconsistentes entre sí.

Se pide la justificación.

Versión diferente:

Considerado el sistema lineal: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

- **Ejercicio 2. No está en los apuntes.** Obtén la forma escalonada reducida de la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -6 \\ 3 & 8 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ realizando 5 operaciones elementales. (**5 pts**)

Se pide la justificación.

Se pide escribir el resultado en el rectángulo.

$A_{\text{red}} =$

Versiones diferentes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & 13 & 7 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -1 & -9 \\ 2 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2 Semana 24 de febrero

MODELO 1. Sobre 1.35 puntos

1. **(0.20+0.20 pts)** Considera el sistema lineal cuya matriz ampliada es $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right]$

   a) Escribe una forma escalonada de la matriz ampliada.

   b) ¿Para que valores de a es el sistema incompatible?

   Escribe "todo a" o "ningún a" si ese fuera el caso.

   Presenta la justificación de los dos apartados.

Variaciones:

matriz ampliada $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right]$

b) ¿Para que valores de a es el sistema compatible?"

b) ¿Para que valores de a es el sistema compatible indeterminado?

2. **(0.30 pts)**. **No justificar**. Sea el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, con matriz A de tamaño 3×4. Sabiendo que las columnas de A verifican la relación
   $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{b}$, marca con una cruz a la izquierda la afirmación correcta:

	No se puede saber si el sistema tiene o no solución
	El sistema tiene solución y una de ellas es:

   Si marcas la segunda opción tienes que escribir una solución.

3. **(0.20+0.20 pts). Presenta la justificación sólo del primer apartado.** Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

a) Obtén un conjunto de vectores linealmente independiente máximo, tomado de sus columnas.

b) expresa los demás vectores como combinación lineal de los vectores del conjunto del apartado a)

4. **(0.25 pts)**. **No justificar**. Considera tres pruebas A,B,C con dos partes cada una con pesos 50%-50% (ejercicios 1 y 2 de prueba A), 75%-25% (ejercicios 3 y 4 de prueba B) y 80%-20% (ejercicios 5 y 6 de prueba C). Obtén la matriz A que multiplicada por las calificaciones $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ de los seis ejercicios, produce como resultado las calificaciones $\vec{\text{calif}}$=(calif$_A$, calif$_B$, calif$_C$) de las tres pruebas.

$A =$

MODELO 2. Sobre 1.35 puntos
Ejercicio 1: igual
Ejercicio 2: modificado de esta forma:

2. **(0.30 pts)**. **No justificar**. Sea el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, con matriz A de tamaño 3×4. Sabiendo que las columnas de A verifican la relación
$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{b}$, marca con una cruz a la izquierda la afirmación correcta:

	No se puede saber si el sistema tiene o no solución
	El sistema tiene solución única y la solución es: _____
	El sistema tiene infinitas soluciones y una de ellas es: _____

Si marcas la segunda o tercera opción tienes que escribir la solución o una solución.

Ejercicio 3: el mismo ejercicio para esta matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4: igual

3 Semana 3 de marzo

MODELO 1

Ejercicio 1
0.30 puntos cada apartado

a) En $\mathbb{R}^2$, escribe la matriz estándar A para el giro de 30 grados en sentido antihorario de centro $(0,0)$.	$A =$
b) Obtén el vector $\vec{v}_{\text{g}}$ imagen del vector $\vec{v} = (4,1)$ con precisión de milésimas, mediante la aplicación anterior. Utiliza en este apartado la aproximación $\sqrt{3} = 1.73$.	$\vec{v}_{\text{g}} =$
c) Escribe la matriz estándar S para la simetría o reflexión en $\mathbb{R}^2$ respecto del eje X.	$S =$
d) Escribe la matriz estándar B de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la siguiente composición: simetría respecto del eje X en primer lugar, y en segundo lugar giro de 30 grados en sentido antihorario alrededor del punto $(0,0)$.	$B =$
e) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4,1)$ mediante la transformación anterior	$\vec{w} =$

CÁLCULOS Y JUSTIFICACIONES

Ejercicio 2

0.10 puntos cada apartado.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$, escribe el valor de los siguientes determinantes.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -2d & -2e & -2f \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} a & 2g & d \\ b & 2h & e \\ c & 2i & f \end{vmatrix} =$$

MODELO 2

Ejercicio 1 con los siguientes cambios

- En apartado a) ángulo de 60 grados
- En apartado c) simetría respecto del eje Y
- En apartado d) cambia el orden: primero giro y después simetría.

Ejercicio 2 igual.

4 Semana 24 de marzo

MODELO 1

Ejerc. 3.16 con apartado añadido. Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H.

Base: dim:
.....

b) A partir de la base obtenida, calcula la ecuación o ecuaciones implícitas de H (denota las variables como x_1, x_2, x_3 y x_4).

Ec.:
.....

c) Escribe un vector $\vec{w}$ que no pertenezca a H.

$\vec{w}$:
.....

d) Escribe las coordenadas estándar del vector $\vec{v}$, sabiendo que sus coordenadas respecto de la base B son (4,2,1), o lo que es lo mismo $[\vec{v}]_B = (4, 2, 1)$.

.....

e) A partir de la/s ecuación/es del apartado b), obtén una base B' de H distinta de la base anterior B y lo más sencilla posible.

B' :
.....

f) Obtén la/s relacion/es de dependencia lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, es decir las ecuaciones de la forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4 = \vec{0}$ donde no todos los reales c_i son cero, que se derivan del conjunto.

.....

Presenta todas las justificaciones y cálculos.

Varias versiones cambiando los vectores $\vec{v_i}$ y $[\vec{v}]_B$

MODELO 2

Ejerc. 3.13 Sean $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ base de $H =< \vec{b}_1, \vec{b}_2 >$.

a) Determina si $\vec{x} \in H$, y en caso afirmativo encuentra las coordenadas de $\vec{x}$ relativas a B.
b) Obtén la ec/ecs. implícita/s del subespacio vectorial H.
c) A partir del resultado anterior obtén una nueva base B' de H que sea lo más sencilla posible (es decir con el mayor número posible de ceros).

2+2+2 puntos. Presenta todas las justificaciones y cálculos.

Escribe aquí los siguientes resultados finales:

Coordenadas de $\vec{x}$ respecto de la base B: .....

Ec/s implícita/s de H: .....

Base B': .....

Ejerc. 3.14 Obtén la/s ec./ecs. implícita/s de $H =< (1,1,0,0), (1,2,-1,1) >$. (Denota las variables de $\mathbb{R}^4$ como x_1, x_2, x_3, x_4).

4 puntos. Presenta todas las justificaciones y cálculos.

Escribe aquí el resultado final:

Ec/s implícita/s de H: .....

5 Semana 28 de abril

MODELO 1

Ejerc. 4.3 Ampliado y con otros datos.

<table>
<tr><td colspan="2">Considerada la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$
tal que $f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,2)$ y $f(\vec{e}_3) = (1,1+c,6)$, se pide:</td></tr>
<tr><td>(0.20 pts) a) La matriz estándar asociada A</td><td>$A =$</td></tr>
<tr><td>(0.50 pts) b) La dimensión y una base de Nul$A$ (o Ker$f$) en función del parámetro c.

Para cada valor de la dimensión de Nul$A$ da la contestación en un rectángulo, usando los que necesites.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">(0.15 pts) c) Define aplicación lineal sobreyectiva:</td></tr>
<tr><td>(0.15 pts) d) Escribe el/los valores de c para los que la aplicación es sobreyectiva.</td><td></td></tr>
</table>

Razona todas las respuestas y presenta todos los cálculos.

Otras versiones para f:

- $f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,2)$ y $f(\vec{e}_3) = (1,1+c,8)$
- $f(\vec{e}_1) = (1,0,0)$, $f(\vec{e}_2) = (1,1,2)$ y $f(\vec{e}_3) = (1,1+c,4)$

Similar al Ejerc. 4.5, pero con otras rectas.

(1.0 pts) Obtén la matriz estándar de la siguiente transformación lineal en $\mathbb{R}^2$:
simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{4}\,x$

Otras versiones:

- proyección sobre la recta $y = 2\,x$
- simetría respecto de la recta $y = 4\,x$
- proyección sobre la recta $y = \frac{1}{2}\,x$

MODELO 2

Considerada la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, se pide:

(0.60 pts) a) Sus valores propios o autovalores y una base de cada subespacio propio asociado.

Cada rectángulo corresponde a un autovalor distinto. Usa tantos rectángulos como autovalores distintos obtengas.

$\lambda =$	Base =
$\lambda =$	Base =
$\lambda =$	Base =

(0.40) b1) Razona en las justificaciones si se puede obtener una base B de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de f.

b2) En caso de que b1) sea afirmativo escribe aquí una matriz B que tenga por columnas dicha base.

$B =$

b3) En caso de que b1) sea afirmativo escribe aquí la matriz asociada a f respecto de la B del apartado b2).

(0.30) c1) Razona en las justificaciones si la transformación deja vectores fijos (aparte del vector $\vec{0}$).

c2) En caso de que c1) sea afirmativo escribe aquí la/s ecuaciones implícitas del subespacio formado por dichos vectores

(0.30) d1) Define aplicación lineal **inyectiva**:

d2) Marca la respuesta correcta y razónalo en las justificaciones

☐ f es inyectiva ☐ f no es inyectiva

Presenta todos los cálculos y justificaciones.

Otra versión: Matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

6 Semana 5 de mayo

Autovalores, autovectores y diagonalización

Los ejercicios utilizados en esta tutoría fueron nuevos, no están en los apuntes.

MODELO 1

Ejercicio 1

(0.5 puntos). Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{bmatrix}$, se piden los valores de a y b para que A no sea diagonalizable.	

Justificaciones y cálculos:

Otra versión: $A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2

Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:
$\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{b} = (0, 1, 2)$ se transforman en 3 veces ellos mismos
$\vec{c} = (1, 1, 1)$ se transforma en su opuesto.
Se pide:

(0.5 puntos) a) Matrices B y D, con D diagonal, tales que $A = BDB^{-1}$, siendo A la matriz estándar de la aplicación lineal.	$B =$ $D =$
(0.5 puntos) b) $f(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$	
(0.5 puntos) c) Código de MATLAB completo para obtener A	
(0.5 puntos) d) Determinante de A sin calcular A.	$\lvert A \rvert =$

Justificaciones y cálculos sólo de los apartados b) y d)

Otras versiones:

- En el enunciado los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se transforman en 4 veces ellos mismos.
- En el enunciado los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se transforman en 5 veces ellos mismos.
- Apartado d) Traza de A sin calcular A. $\quad \text{traza}(A) =$
- Apartado d) Rango de A sin calcular A. $\quad \text{rango}(A) =$

MODELO 2

Ejercicio 1

Considera la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Se pide:

(0.5 puntos) a) Los autovalores de A.	
(0.5) b) Una base B de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de A.	$B =$
(0.5) c) La matriz asociada a f respecto de la base B del apartado anterior.	
(0.5) d) Justificar (en las JUSTIFICACIONES) que existe una recta de vectores que permanecen fijos, es decir, un recta tal que $f(\vec{v}) = \vec{v}$ para todos los vectores de la recta y obtener la ecuación implícita de esa recta.	Ec. implícita:

Presenta todas las justificaciones y cálculos.

Otra versión: $\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2. (1 pto.) En este ejercicio A es la matriz estándar de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Escribe a la derecha verdadero (V) o falso (F).
Hay cinco afirmaciones verdaderas y cinco falsas. No puedes escribir más de cinco verdaderas ni más de cinco falsas.

El núcleo de una aplicación lineal en $\mathbb{R}^n$ es subespacio propio de la aplicación lineal solo si la aplicación lineal es diagonalizable.	
Si una matriz tiene determinante 0, entonces tiene el autovalor 0.	
Toda matriz diagonalizable es invertible.	
Los subespacios propios de A en $\mathbb{R}^3$ pueden tener como intersección únicamente el vector $\vec{0}$, o su intersección puede ser una recta.	
Si se da la factorización $A = BDB^{-1}$, con D diagonal, entonces la traza de A y la traza de D son iguales.	
Si se da la factorización $A = BDB^{-1}$, con D diagonal, entonces el determinante de A es igual al producto de los autovalores de A.	
La suma de subespacios propios es suma directa.	
La suma de los subespacios propios de A de orden n es siempre $\mathbb{R}^n$.	
Una matriz es diagonalizable si y solo si su polinomio característico carece de raíces complejas.	
Para las aplicaciones lineales en $\mathbb{R}^n$, la dimensión de la imagen es n menos la dimensión del núcleo.	

No justifiques

7 Semana 12 de mayo

Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

MODELO 1

Ejercicio 1:

Considerado en E_3 el triángulo de vértices $Q = (-2, 3, 1)$, $P = (1, 2, 1)$ y $R = (1, 0, 4)$, se pide:	
(0.30 pts) a) El área del triángulo (el valor simbólico, es decir no numérico, más simplificado posible).	
(0.30) b) El coseno el ángulo interior en el vértice P (el valor simbólico, es decir no numérico, más simplificado posible).	
(0.30) c) Las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo con vértices consecutivos QPR (da el valor numérico).	
(0.30) d) La ecuación implícita del plano que contiene los puntos Q, P y R (en la forma más simplificada posible).	
(0.30) e) El punto medio de P y Q (da el valor numérico).	
(0.30) f) La ecuación implícita del plano que pasa por el punto medio de P y Q y es perpendicular al segmento PQ (en la forma más simplificada posible).	

Es obligatorio copiar la respuesta a la plantilla.
Es obligatorio presentar todos los cálculos y justificaciones.

MODELO 2

En los dos ejercicios:

- Es obligatorio copiar la respuesta a la plantilla.
- Es obligatorio presentar todos los cálculos y justificaciones.

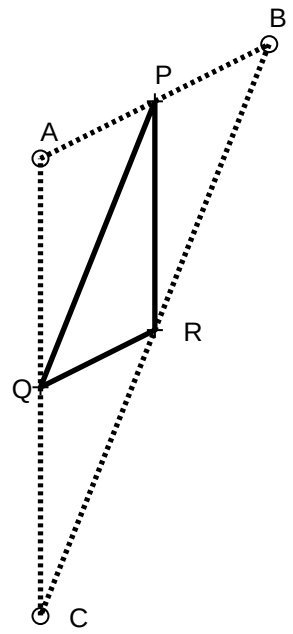
Ejercicio 1: En el espacio E_3 considera las siguientes rectas:

$$r: \quad x = \frac{y-1}{2} = z+3 \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$

Se pide:

Pregunta	Resultado	Puntuación
a) Vector director de la recta s		1.0
b) Ecuación implícita del plano Π que contiene la recta s y es paralelo a la recta r		2.0

Ejercicio 2: En el plano E_2 considera los puntos $P = (4, 7)$, $Q = (2, 2)$ y $R = (4, 3)$ dados, y los puntos A, B y C indicados en la figura.



Pregunta	Resultado	Puntuación
a) Área del triángulo PQR		1.5
b) Coordenadas del centro geométrico del triángulo PQR		1
c) Perímetro del triángulo PQR		1
d) Coordenadas de A		1
e) Coseno del ángulo interior en A		1.5

Otra versión:
Coordenadas de B y coseno del ángulo interior en B