G423. Álgebra y Geometría. Prácticas MATLAB

Ruth Carballo Fidalgo, Emma Merino Cue, Valvanuz Fernández Quiruelas (UC)
Curso 24-25

Contents

Introducción **2**

P.1 Semana 10 de febrero **4**

P.2 Semana 24 de febrero **10**

P.3 Semanas 3 y 10 de marzo **16**

P.4 Semanas 10 y 24 de marzo **23**

P.5 Semana 24 de marzo **28**

P.6 Semana 31 de marzo **32**

P.7 Semana 7 de abril **36**

P.8 Semana 28 de abril **44**

P.9 Semana 12 de mayo **48**

P.10 Semana 19 de mayo **52**

Introducción

Introducción a Matlab (Versión 2020) preparada por R. Carballo. Incluida como referencia. Las instrucciones requeridas como contenidos de la asignatura estarán especificadas para cada práctica en este documento.

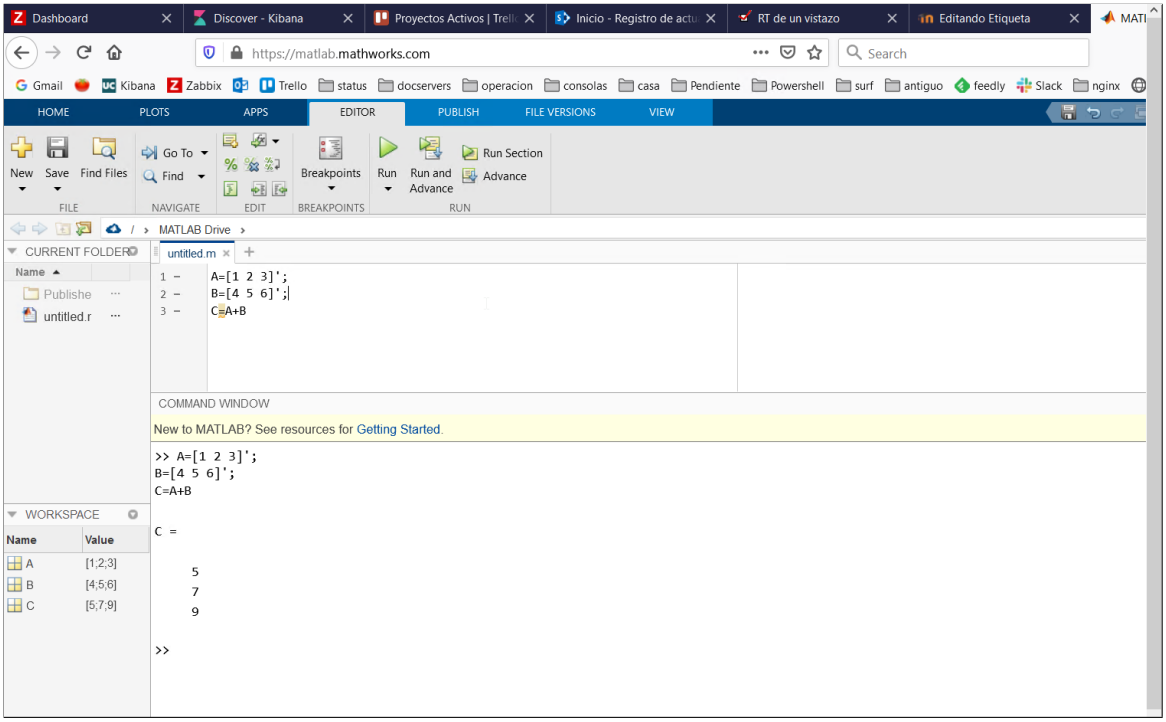
Para realizar las prácticas en las aulas de informática usaremos MATLAB a través de Porticada. MATLAB 2023A → Ejecutar.

Descarga de MATLAB en tu ordenador utilizando la Licencia de la UC

Para poder descargarte el software con la licencia MATLAB de la Universidad de Cantabria tienes que abrir previamente una cuenta en MathWorks www.mathworks.com con la dirección de correo de la universidad pero eligiendo una contraseña distinta de la de la Universidad. Una vez dispongas de esa cuenta, debes conectarte a este enlace del Servicio de Informática de la UC. En la nueva ventana, parte superior derecha, junto con el icono de MATLAB te aparece el enlace Portal Matlab de la UC que debes clicar a continuación. Desde la ventana emergente arrancas el proceso de acreditación, y de descarga/instalación de MATLAB y Simulink. Para ello fíjate en el cuadro negro y clica en el botón azul "Inicia sesión para empezar a utilizarlos". La ventana emergente nos pide la acreditación como miembros de la UC, y seguidamente se nos pide entrar a nuestra cuenta the Mathworks y a continuación nos lleva a la ventana de Descargas/Instalación. Nos quedamos con la versión R2023a, y clicamos en el botón azul "Descargar para Windows" (hay opciones de descarga para otros dos sistemas operativos). Clicamos en el ejecutable para proceder a la instalación. En uno de los pasos nos pide marcar los productos que queremos seleccionar y marcaremos dos: MATLAB y "Symbolic Math Toolbox".

Uso de MATLAB online (por Valvanuz Fernández Quiruelas, curso 21-22, GIM, UC)

Es posible utilizar MATLAB desde cualquier ordenador sin necesidad de instalarlo. Basta con disponer de un navegador y de las credenciales utilizadas para descargarse MATLAB de la página de Mathworks.
Para poder utilizarlo hay que acceder al portal MATLAB Online y validarse con las credenciales de Mathworks. Una vez dentro aparecerá una instancia de MATLAB muy similar a la que aparece cuando lo instalamos en nuestros ordenadores y que nos permitirá trabajar igual que lo hacemos en éstos.
MATLAB online puede ser muy útil cuando tenemos un equipo en el que no está instalado MATLAB o cuando nuestro equipo es muy viejo y tarda mucho en ejecutar las órdenes. Una de las principales ventajas de MATLAB online es que las órdenes se calculan en la nube, no en nuestro equipo.


Dashboard
Discover - Kibana
Proyectos Activos | Trell
Inicio - Registro de actu
RT de un vistazo
Editando Etiqueta
https://matlab.mathworks.com
Search
Gmail
Kibana
Zabbix
Trello
status
docservers
operacion
consolas
casa
Pendiente
Powershell
surf
antiguo
feedly
Slack
nginx
HOME
PLOTS
APPS
EDITOR
PUBLISH
FILE VERSIONS
VIEW
New
Save
Find Files
Go To
Find
Breakpoints
Run
Run and Advance
Run Section
Advance
FILE
NAVIGATE
EDIT
BREAKPOINTS
RUN
MATLAB Drive
CURRENT FOLDER
Name
Publishe
untitled.r
untitled.m
1 – A=[1 2 3]';
2 – B=[4 5 6]';
3 – C=A+B
COMMAND WINDOW
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
>> A=[1 2 3]';
B=[4 5 6]';
C=A+B
C =
5
7
9
>>
WORKSPACE
Name
Value
A
[1;2;3]
B
[4;5;6]
C
[5;7;9]

P.1 Semana 10 de febrero

Las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

Ejercicio 1.1.5 Obtén la solución $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de los sistemas dados[1], utilizando el método de Gauss-Jordan. Presenta la solución en forma vectorial paramétrica, es decir, como $\vec{x} = \vec{p} + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$, siendo $\vec{v}_i$ vectores numéricos específicos de $\mathbb{R}^5$ y α_i parámetros libres (cualquier elección de los reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ producirá una solución válida del sistema). Obtén dos soluciones particulares $\vec{p_1}$ y $\vec{p_2}$ del SL I y dos soluciones particulares $\vec{p_3}$ y $\vec{p_4}$ del SL II.

$$I: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -23 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

```
% CLASIFICACION Y SOLUCION DEL SISTEMA LINEAL

A=[0 1 -2 2 0; 1 1 -4 5 2; -1 3 -4 3 0];  % A Matriz de coeficientes
b=[-7  -23  3]';  % vector de términos independientes (columna)

% CLASIFICACION:

Am=[A b]          % Matriz ampliada concatenando A con b a la derecha
Am =
     0     1    -2     2     0    -7
     1     1    -4     5     2   -23
    -1     3    -4     3     0     3
% La existencia o no de solución se determina mediante el Teorema
% de Rouché-Frobenius
rank(A)  % rango = número de cols. pivotales
rank(Am)
ans =
       3
ans =
       3
Los rangos son iguales por tanto el sistema tiene solución.

n=size(A,2)
% n es el número de cols de A = número de incógnitas del SL
n =
       5
% Sería determinado si n=rango(A). Ya sabemos por adelantado que no puede
% suceder, pues n=5 y A solo tiene tres filas.
% El SL es indeterminado, siendo n - rango(A) el grado de la indeterminación.
%  5 - 3 = 2 parámetros libres
```

[1] El SL II se dice que es el correspondiente homogéneo del SL I

```
% SOLUCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO GAUSS-JORDAN:

% A continuación aplicamos Gauss-Jordan para obtener
% el sistema equivalente más sencillo posible.
[U j]=rref(Am)  % U proporciona la forma escalonada reducida de Am
                % U viene de "upper", porque la matriz al estar escalonada
                % tiene ceros debajo de la diagonal principal.
                % rref es acrónimo de  "reduced row echelon form"
                % j es un vector fila que da los índices de las cols pivotales
                % por lo que length(j), que es el número de entradas de j,
                % es el rango de la matriz que estamos estudiando, Am.
length(j)
```

```
U =
     1     0    -2     3     0   -24
     0     1    -2     2     0    -7
     0     0     0     0     1     4

j =
1    2     5

ans =
       3
```

```
% La matriz U muestra que el SL es indeterminado, con grado dos de indeterminación.
% Las columnas pivotales son la primera, la segunda y la quinta.
% Esas columnas corresponden a las incógnitas  x1, x2, x5,
% que adoptamos como variables básicas, o incógnitas principales.
% x3, x4 son las variables libres, también llamadas parámetros libres.

% A partir de U despejaremos las incógnitas principales, pero antes hemos de
% declarar los parámetros libres

syms x3 x4 real            % declaramos

x1 = -24 + 2*x3 - 3*x4  ;  % despejamos
x2 =  -7 + 2*x3 - 2*x4  ;  % despejamos
x3 = x3                 ;  % esta linea y la siguiente se incluyen por
x4 = x4                 ;  % completitud pero se puede prescindir de ellas
x5 = 4                  ;  % despejamos

sol=[x1 x2 x3 x4 x5]'  % solución en forma vectorial (traspuesta de fila)

pretty(sol)            % formato con mejor apariencia para datos simbólicos
```

```
sol =
 2*x3 - 3*x4 - 24
  2*x3 - 2*x4 - 7
               x3
               x4
                4
```

```
/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                  |
|  2 x3 - 2 x4 - 7 |
|                  |
|        x3        |
|                  |
|        x4        |
|                  |
\         4        /
```

```
% La solución en forma vectorial parémetrica, separando el vector constante
% y cada vector que queda multiplicado por un parámetro libre, es:

% sol = p + x3*v1 + x4*v2 siendo
p  = [-24 -7 0 0 4]' , v1 = [ 2  2 1 0 0]' , v2 = [-3 -2 0 1 0]'

% La solución totalmente desarrollada es:
% x = (-24,-7,0,0,4) + x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)

% Podemos verlo así:

sol = p + x3*v1 + x4* v2

sol =
2*x3 - 3*x4 - 24
 2*x3 - 2*x4 - 7
              x3
              x4
               4

>> pretty(sol)

/ 2 x3 - 3 x4 - 24 \
|                  |
|  2 x3 - 2 x4 - 7 |
|                  |
|        x3        |
|                  |
|        x4        |
|                  |
\         4        /

% Al tener dos parámetros libres la solución la forman las infinitas combinaciones
% lineales de dos direcciones independendientes, trasladadas mediante un vector p
% distinto de cero, también independiente de las dos direcciones anteriores.

p =
    -24
     -7
      0
      0
      4
```

```
v1 =
     2
     2
     1
     0
     0

v2 =
    -3
    -2
     0
     1
     0
[p v1 v2] , rank(ans)   % comprobamos que esos tres vectores son
                        % linealmente independientes,
                        % es decir, rango 3.
ans =
    -24     2    -3
     -7     2    -2
      0     1     0
      0     0     1
      4     0     0
ans =
       3
% SOLUCIÓN DEL CORRESPONDIENTE HOMOGÉNEO:

% Teniendo en cuenta que la solución del SLNH es
% sol = p + x3*v1 + x4*v2,
% la solución del correspondiente SLH será la misma, sustiyendo p por el vector 0.
% sol = x3*v1 + x4*v2,

% Para practicar el procedimiento puedes repetir el ejercicio cambiando b por el
% vector cero.

b=[0 0 0]';  Amh=[A b]   , rref(Amh)


Amh =
     0     1    -2     2     0     0
     1     1    -4     5     2     0
    -1     3    -4     3     0     0

ans =
     1     0    -2     3     0     0
     0     1    -2     2     0     0
     0     0     0     0     1     0


% Aquí tendríamos que despejar como antes x1, x2 y x5 en función
% de los parámetros, obteniendo
% x = x3*(2,2,1,0,0) + x4*(-3,-2,0,1,0)
```

```
% MÉTODO ALTERNATIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS:

% A = matriz de coeficientes
% La solución del SL [A | 0] se puede obtener así:
% B = null(sym(A))   o   B = null(A,'r')

% Hemos visto que la solución general del SLH no es más que el conjunto de
% todas las combinaciones lineales de dos soluciones independientes v1 y v2.

% La función null() nos dará directamente esas dos soluciones v1 y v2.
% Concretamente, las columnas de la salida B serán los vectores v1 y v2.
% Da dos en este caso porque los parámetros libres son dos.
% Si hubiera más parámetros libres daría más soluciones (columnas).

% En el caso de un SLH compatible determinado con n incógnitas la solución será
% el vector 0 de n entradas. null() no devolverá esa solución, sino este resultado:
% "n x 0 empty matrix".
% Por tanto null() informa al usuario de que no existe solución distinta de la trivial
% dando como resultado una matriz vacía.

% Obviamente el algoritmo null( ) ya sabe que resuelve un SLH, por eso el único
% argumento que necesita es la matriz de coeficientes A.
% Si por error añadiéramos la columna de ceros de los términos independientes,
% null() consideraría esa columna como una incógnita más.

sol = null(sym(A))

sol=
[2, -3]
[2, -2]
[1,  0]
[0,  1]
[0,  0]


% La solución deducida así es
x=alpha*(2,2,1,0,0)+beta*(-3,2,0,1,0),
% que es la misma que la obtenida con rref, y que nos evita ahora tener que separar
% incógnitas principales de parámetros libres y despejar.
% La solución se obtiene de forma directa.

% El lugar geométrico de la solución es el formado por las combinaciones lineales de los
% vectores v1 y v2. La solución pasa por el origen (0,0,0,0,0).
```

¿Por qué `syms` lo acompañamos con `real`?

```
syms x real  % 'syms' crea la variable simbólica y obliga a que sea real.
             % O lo que es lo mismo, la parte real de x es x y la parte imaginaria de x
             % es 0
             % Nota: real(argumento) e imag(argumento) son las instrucciones de
             % MATLAB para obtener la parte real y la parte imaginaria de la
             % matriz "argumento".
```

```
% Observa los siguientes resultados:
2*x-5*x
conj(x)  % Al calcular el conjugado de x la respuesta es que conj(x) es x
         % porque el conjugado de un real es el mismo real
         % (no hay parte imaginaria que tenga que cambiar de signo).

-3*x
x

syms x   % Se crea la variable simbólica x sin especificar tipo de número.
         % Al no indicarlo, MATLAB supone que x es un número complejo.

2*x-5*x  % Aquí todo correcto

conj(x)  % Nos va a decir que conj(x) es conj(x). No puede calcular el conjugado de
         % x porque se trata como un complejo y no se ha dado información de los
         % valores de la parte real y de la parte imaginaria.

-3*x
conj(x)

% Esta diferencia entre variables simbólicas reales y complejas es importante para
% nosotros ya que con frecuencia "atajamos" la trasposición (traspose(Matriz))
% con el símbolo ', Matriz', cuando en realidad ' significa para MATLAB
% traspuesta-conjugada.

% Veamoslo en el siguiente ejemplo:

syms x y , [x y]' , transpose([x y])

 conj(x)
 conj(y)
 x
 y

syms x y real,  [x y]', transpose([x y])

 x
 y
 x
 y
```

Ejercicios propuestos:

Ejercicio 1.1.8. Obtén la solución en forma vectorial paramérica del SL con matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \end{array}\right]$ (ec. del plano $x+2y=7$ en $\mathbb{R}^3$) y la de su correspondiente sistema homogéneo (ec. del plano $x+2y=0$ en $\mathbb{R}^3$).

Ejercicio 1.1.9. Obtén la solución en forma vectorial paramérica del SL con matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$ a partir de la forma escalonada reducida de A^* (método de reducción Gauss-Jordan). Interpreta el lugar geométrico de cada ecuación y el lugar geométrico de la solución del SL.

P.2 Semana 24 de febrero

Ejercicios del Tema 1

Guía:

- `format rat` si queremos usar formato racional
- definir la matriz de coeficientes `A = [ - ... - ; - ... - ; ... ]`
- definir el vector b como `b = [ - ... - ]'`
- definir matriz ampliada como `Am = [ A b]`
- `rref(Am)` para obtener la forma escalonada reducida.
- `null(sym(A))` permite resolver SL homogéneo con matriz de coeficientes A
- Si el sistema es indeterminado no uses `syms` para declarar los parámetros libres. Despeja sobre el papel las incógnitas principales, a partir de la escalonada reducida, y usa las nombres que quieras (las del resto de incógnitas o letras griegas en orden) para los parámetros libres.
- Puedes obtener los rangos de cualquiera de estas tres formas:
  - Contando las columnas pivotales visualmente en la forma escalonada reducida.
  - Mediante la funcion `rank()`.
  - Determinando los índices de las columnas pivotales utilizando las dos salidas posibles de `rref()` (por ejemplo `[matriz_red j] = rref(matriz)`). El rango es el número de elementos de `j`, que puedes contar visualmente o que obtienes como `len(j)`.
- Las funciones `rref()`, `rank()` y `null()` no pueden utilizarse si la matriz contiene variables, pues dan resultados erróneos.
- Los sistemas de tipo compatible determinado pueden resolverse con la función `linsolve(A,b)`, siendo `A` la matriz de coeficientes y `b` el vector de términos independientes.

Ejercicio 1.2.11. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y + 3z - 5t = 1 \\ 3y + 3z + 3t = 3 \\ x + 3y + 4z - 4t = 2 \end{cases}$,

halla:

a) La solución en forma vectorial paramétrica.

b) La solución particular, en forma vectorial, con valores $z = 1$ y $t = -2$.

c) La solución en forma vectorial paramétrica del correspondiente sistema homogéneo.

Ejercicio 1.4.4. Escribe la matriz estándar A de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$ que asigna a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vector (y_1, y_2, y_3) tal que:

$$\begin{cases} y_1 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3 \\ y_2 \text{ es la media de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \\ y_3 \text{ es la suma de } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases}$$

(Añadido) Aplicación de esta matriz para el estudio de casos PCR+ en Cantabria, en los períodos del 1 al 5 y del 8 al 12 de marzo de 2021.

Fecha	Nuevos PCR+
1-3-2021	40
2-3-2021	48
3-3-2021	37
4-3-2021	43
5-3-2021	26
8-3-2021	27
9-3-2021	48
10-3-2021	44
11-3-2021	39
12-3-2021	45

Primera semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	
Segunda semana de marzo	media LMX	
	media LMXJV	
	casos totales LMXJV	

Soluciones:
Sólo se muestra parte de lo que sale por pantalla.
En la presentación de la solución están precedidas con el símbolo '%' tanto los comentarios como los resultados que aparecen por pantalla.

1.2.11

```
Am = [1 2 3 -5 1; 0 3 3 3 3; 1 3 4 -4 2]   % Esta vez empezamos con la ampliada

A  = Am(:,1:4)                              % Aquí extraemos A  (filas: todas ,
                                            % cols: desde la 1 hasta la 4)

% Apartado c)   Resolvemos el SL    A x = 0
% ---------------------------------------

B  = null(sym(A)) % las cols de la salida son los vectores que acompañan
                  % a los parámetros en la solución del SLH
% [-1,  7]
% [-1, -1]
% [ 1,  0]
% [ 0,  1]

% Extraemos de B dichas columnas

b1=B(:,1)
% -1
% -1
%  1
%  0

b2=B(:,2)
%  7
% -1
%  0
%  1

% Respuesta a solución del homogéneo:
% x = alpha b1 + beta b2  con alpha y beta reales cualesquiera
```

```
% También podemos presentar la respuesta usando como nombres de los parámetros
% libres las incógnitas que usamos como parámetros libres. Veámoslo:

rref(A)
%     1     0     1    -7
%     0     1     1     1
%     0     0     0     0

% Las columnas no pivotales de A son la 3 y 4, que corresponden a z y t, en ese orden.
% Las columnas de null(sym(A)) obedecen a ese mismo orden.
% Por tanto otra respuesta a la solución del homogéneo es:

%   x = z b1 + t b2


% Apartado a)
% -----------

Amred = rref(Am)
%     1     0     1    -7    -1
%     0     1     1     1     1
%     0     0     0     0     0

% Vemos que el SL original (no homogéneo) es compatible, porque tanto A como Am
% tienen el mismo número de columnuas pivotales (2) y por tanto el mismo rango.

% Despejando x, y en Amred deducimos la parte constante para x e y
% z, t son parametros libres, z=z   t=t. Su parte constante es cero.

p = [-1 1 0 0]'
%    -1
%     1
%     0
%     0

% Respuesta a la solución del original
%     x = p + alpha b1 + beta b2     con alpha, beta reales cualesquiera
% o   x = p +   z   b1 +  t   b2     con z,t reales cualesquiera

% Apartado b)
% -----------

xpar= p + 1*b1 + (-2)*b2   % solución particular pedida, del SL original
% -16
%  2
%  1
% -2
```

```
% Comprobaciones
% --------------

% Comprobación de la solución del homogéneo
%    A * b1 tiene que producir (0,0,0)
%    A * b2 tiene que producir (0,0,0)

% Comprobación de la solución del no homogéneo
%    Basta añadir a las dos anteriores, la siguiente:
%    A * p   tiene que producir el vector (1,3,2)
%            (p es la solu. particular con z=0, t=0)

% Comprobación de la solución particular.
%    Al tener comprobado que la solución es correcta sólo tenemos que
%    asegurarnos de haber sustituido bien los parametros libres
%     z como 1 y t como -2,
%    comprobando que la solución obtenida
%    xpar
%    toma esos valores en la posición de esas incógnitas.
%
%  Para mayor confirmación podemos añadir también la comprobación de que
%    A*xpar produzca (1,3,2)
```

1.4.4

```
% Construimos la matriz de forma que:
%   y1 sea la media de los tres primeros días: coefs 1/3 en
%      las tres primeras variables y cero en el resto.
%   y2 es la media de los 5 días: todos los coefs 1/5
%   y3 es la suma de casos de los 5 días, todos los  coefs 1

A=[1/3 1/3 1/3 0 0; 1/5 1/5 1/5 1/5 1/5 ; 1 1 1 1 1]
%    0.3333    0.3333    0.3333         0         0
%    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000    0.2000
%    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000


% Método para obtener la estadística de la semana 1
% ------------------------------------------------

PCRplus_s1 = [40 48 37 43 26]'
%    40
%    48
%    37
%    43
%    26

A * PCRplus_s1
%   41.6667
%   38.8000
%  194.0000
```

```
% Método para obtener los resultados de las dos semanas a la vez
% ---------------------------------------------------------------

% Preparamos la matriz de datos de forma que:
%   primera columna = datos de la primera semana
%   segunda columna = datos de la segunda semana

PCRplus = [40 48 37 43 26 ; 27 48 44 39 45]'
%    40    27
%    48    48
%    37    44
%    43    39
%    26    45

A * PCRplus
%   41.6667   39.6667
%   38.8000   40.6000
%  194.0000  203.0000
```

Ejercicio 1.2.13. Considera el siguiente sistema constituido por 4 masas puntuales:

Punto	Masa
$\vec{v}_1 = (5, -4, 3)$	$m_1 = 2$ g
$\vec{v}_2 = (4, 3, -2)$	$m_2 = 5$ g
$\vec{v}_3 = (-4, -3, -1)$	$m_3 = 2$ g
$\vec{v}_4 = (-9, 8, 6)$	$m_4 = 1$ g

- Calcula el centro geométrico del sistema. $\vec{v}_c = \dfrac{\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k}{k}$
- Calcula el centro de masa, $\vec{v}_{cdm}$, del sistema, sabiendo que:

$$\vec{v}_{cdm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_k\vec{v}_k}{m_1 + \ldots + m_k}$$

Solución 1.2.13

```
v1 = [ 5 -4  3 ]' ;
v2 = [ 4  3 -2 ]' ;
v3 = [-4 -3 -1 ]' ;
v4 = [-9  8  6 ]' ;

m=[2 5 2 1]' ;  % creamos vector m cuyas entradas son las masas
M=sum(m)     ;  % la función  sum()  devuelve la suma de las entradas de m
c=m/M        ;  % vector que da la fracción de masa

% Cada coeficiente o peso en la combinación lineal es c(i)
% con i=1,2,3,4


c  % aquí vemos sus valores:
```

```
% 0.2000
% 0.5000
% 0.2000
% 0.1000

cmasas      = c(1) * v1 + c(2) * v2 + c(3) * v3 + c(4) * v4

%   1.3
%   0.9
%   0

% Para el centro geométrico las cuatro masas cuentan igual,
% cada una un 25%, o fracción 1/4.

cgeometrico = 1/4*v1 + 1/4*v2 + 1/4*v3 + 1/4*v4

%   -1.0000
%    1.0000
%    1.5000


% Otro procedimiento consiste en escribir la combinación lineal como un
% producto matriz-vector. La matriz tiene por columnas los vectores de
% posición.

% Para el centro de masas el vector de los coeficientes es c
% Para el centro geométrico el vector de los coeficientes es  [1/4 1/4 1/4 1/4]'

% cmasas = [v1 v2 v3 v4] * c;

% cgeo   =  [v1 v2 v3 v4] * [1 1 1 1]' * 1/4;


cmasas'   % muestro solución como fila para que ocupe menos

%    1.3000     0.9000   0.0000

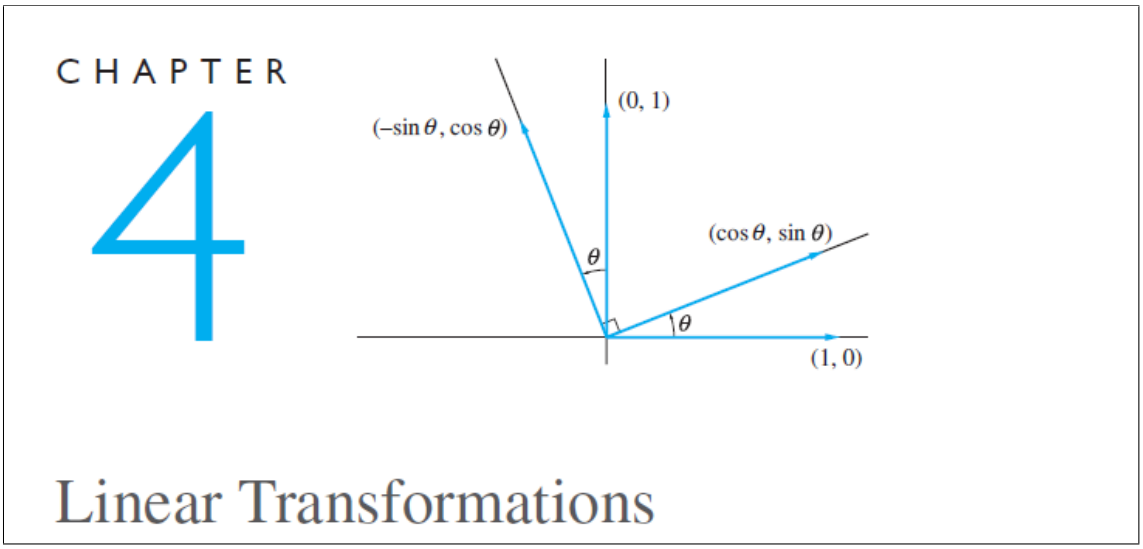

cgeo'     % muestro solución como fila para que ocupe menos

%    -1.0000    1.0000   1.5000
```

P.3 Semanas 3 y 10 de marzo

Aplicaciones lineales: Giro en $\mathbb{R}^2$ alrededor del origen

Matriz estándar del giro en $\mathbb{R}^2$ de centro en el origen y ángulo θ.
Ejercicio 1.4.12 (Tema 1, pag. 34 de las diapositivas)



S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9ª. Pearson. 2015.

La matriz estándar del endomorfismo, o matriz respecto de la base canónica, es:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

En efecto, siendo $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$,

$$A = [\, f(\vec{e_1}) \; f(\vec{e_2}) \,] \quad con \quad \begin{cases} f(\vec{e_1}) = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \text{sen}\theta\, \vec{e}_2 \\ f(\vec{e_2}) = -\text{sen}\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ en el sentido antihorario o positivo

$-\pi < \theta < 0$ en el sentido horario o negativo

Giro y simetría en $\mathbb{R}^2$ y composición de ambos: Ejercicio Adicional 1.4.14

a) En $\mathbb{R}^2$, escribe la matriz estándar correspondiente al giro de 50 grados en sentido antihorario de centro en el origen.	$A =$
b) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$	$\vec{v}_{\text{girado1}}=$
c) Comprueba que las normas de los dos vectores son iguales, utilizando la función `norm()`	$\| \vec{v} \| =$ $\| \vec{v}_{\text{girado1}} \| =$
d) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 50 grados en sentido horario.	$\vec{v}_{\text{girado2}}=$
e) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ para un giro de 180 grados	$\vec{v}_{\text{girado3}}=$
f) Escribe la matriz estándar S de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la simetría o reflexión respecto del eje X.	$S =$
g) Escribe la matriz estándar B de la aplicación lineal en $\mathbb{R}^2$ correspondiente a la siguiente composición: giro de 50 grados en sentido antihorario alrededor del punto $(0, 0)$, en primer lugar, y en segundo lugar simetría o reflexión respecto del eje X.	$B =$
h) Obtén el transformado del vector $\vec{v} = (4, 3)$ mediante la transformación anterior	$\vec{w} =$

Inversa de un endomorfismo e inversa de una matriz cuadrada. Determinantes.

Los siguientes resultados son equivalentes:

- A_n es invertible
- rg$A$=n
- det$A \neq 0$

La función `inv()` calcula la inversa de una matriz. Al igual que ocurre con las funciones `rank()`, `rref()` y `null()`, no debe usarse esta función si la matriz incluye variables simbólicas.

La funcion `det()` calcula el determinante de una matriz.

Antes de calcular la inversa de una matriz debes asegurarte de que el valor de su determinante ni es cero ni compatible con cero dentro de la precision numérica de MATLAB.

HVZ12_EjemploE_pg44 (enunciado en pg. 40 de las diapositivas). Encuentra la inversa de la aplicación lineal dada por $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2)$.

Ejercicio 2.9 (enunciado en pg. 60 de las diapositivas). Clasifica el sistema lineal en función del parámetro a, haciendo uso del determinante de la matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + a\,x_3 = a \\ 2x_1 - a\,x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si y sólo si: .....

El sistema es compatible indeterminado si y sólo si: .....

El sistema es incompatible si y sólo si: .....

Indica "siempre" o "nunca" si procediese. Si das más de una condición utiliza los nexos adecuados "o" o "y".

Comprueba que las respuestas presentadas son consistentes entre sí, es decir, que no hay valores de a repetidos entre los tres tipos. Y comprueba además que todos los posibles valores de a ($\in \mathbb{R}$) están considerados.

Ejercicio 2.10 (enunciado en pg. 61 de las diapositivas). Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, y sabiendo que $D = ABC = \begin{bmatrix} 11 & 17 & 108 \\ 17 & 1 & 108 \\ 4 & 10 & 108 \end{bmatrix}$, calcula la matriz C.
Si no existe, indícalo explícitamente.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO ADICIONAL 1.4.14  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> a=50
        50

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]   % respuesta a)
    0.6428   -0.7660
    0.7660    0.6428

>> v=[4 3]'
     4
     3

>>vg1=A*v      % respuesta b)
    0.2730
    4.9925

>> norm(v)     % respuesta c)  esta instrucción y la siguiente
     5
>> norm(vg1)
    5.0000

>> A = [cosd(-a)   -sind(-a) ;   sind(-a)    cosd(-a)]
    0.6428    0.7660
   -0.7660    0.6428

vg2 = A*v      % respuesta d)
    4.8693
   -1.1358

>> norm(vg2)
     5

>> a = 180
   180

>> A= [cosd(a)   -sind(a) ;   sind(a)    cosd(a)]
    -1     0
     0    -1

>> vsimetrico_respecto_origen = A*v   % respuesta e)
 -4
 -3

>> % Con el giro de 180 grados se obtiene el vector opuesto.
>> % Esta transformación se conoce con dos nombres: giro de 180
>> % grados y simetría respecto del origen.
```

```
>> S=[1 0; 0 -1]    % respuesta f)
     1   0
     0  -1

>> B = S * A        % respuesta g)
    0.6428   -0.7660
   -0.7660   -0.6428

>> B*[4 3]'         % respuesta h)
    0.2730
   -4.9925

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución HVZ12_EjemploE_pg44  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>>  A = [3 2 ; 1 2]
>>  B=inv(A)

    0.5000   -0.5000
   -0.2500    0.7500

>> format rat
>> inv(A)

       1/2           -1/2
      -1/4            3/4

>> % g(x1,x2) = (1/2 x1 -1/2 x2, -1/4 x1 + 3/4 x2)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución EJERCICIO 2.9  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

>> syms a real
>> A=[-1 -2 a; 2 -a 2; 1 2 4]
>> b=[-a -2 3]'

 [-1, -2, a]
 [ 2, -a, 2]
 [ 1,  2, 4]

-a
-2
 3

% 1)   CASO SCD
>> det(A)  % el SL, con tres ecuaciones y tres incognitas, es comp.
           % determinado si y solo si rgA=3
           % si y solo si det(A) distinto de cero.
```

```
           % No puedo usar rank() porque la matriz es simbóloca,
           % y además el enunciado dice que haga uso del determinante.
           % Ya que no puede haber infinitas soluciones,  rg(A)
           % no puede ser menor que 3, por tanto ha de ser 3.
           % Con eso ya tengo garantizada la compatibilidad, pues
           % rg(A*) también es 3 ya que hay tres filas.

 a^2 + 8*a + 16

% Da como resultado la "expresión desarrollada", un polinomio en a
% de grado 2, desarrollado. Desarrollado significa expresado como sumas.

>> solve(ans)  % en vez de hacer solve(det(A))
               % hacemos solve(ans)  ans=última expresión calculada
 - 4
 - 4

% Las dos raíces del polinomio de grado 2 tienen el mismo valor, a=-4.
% Recordemos que todo polinomio en una variable de grado n y coeficientes
% reales tiene n raíces, reales y/o complejas, simples o múltiples.

>> factor(det(A))  % Da la expresión del determinante factorizada, concretamente
% los factores. En este caso (a+4) (a+4), de forma que det(A) = (a+4)^2

[a + 4, a + 4]

% Conclusion: el SL es comp. determ.  si y solo si a distinto de -4

% 2) Si a=-4 el sistema será compatible indeterminado o incompatible.

A1 = subs(A,a,-4)  % analizamos este caso usando la función
                % subs()  substitute(expresión o matriz, variable, valor)
% [-1, -2, -4]
% [ 2,  4,  2]
% [ 1,  2,  4]

b1 = subs(b,a,-4)

[rank(A1) rank([A1 b1])]

     2     3
% Compatible indeterminado nunca
% Incompatible para a=-4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Solución EJERCICIO 2.10  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


>> A=[2 -3 -5; -1 4 1; 1 -3 -4] , B=[2 1 -4; 0 1 4; 1 -2 -3],
>> D=[ 11 17 108  ; 17 1 108; 4 10 108]
```

```
     2    -3    -5
    -1     4     1
     1    -3    -4

     2     1    -4
     0     1     4
     1    -2    -3

    11   17   108
    17    1   108
     4   10   108

% El procedimiento más sencillo es el siguiente:
% Partiendo de A*B*C=D  analizamos si A*B es invertible

>> det(A*B)
-216

% obtenemos determinante distinto de cero, por tanto sí lo es

% inv(A*B)* A*B * C = inv(A*B)*D  es como queda la ec. premultiplicando
%                                 los dos miembros por esa inversa
%                                 =>  C = inv(A*B)*D

C=inv(A*B)*D
    2.0000    1.0000   -29
    2.0000    2.0000    11
    1.0000         0     4

% Comprobación:
% A*B*C-D tiene que dar como resultado una matriz de ceros del tamaño de D
>> A*B*C-D
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

P.4 Semanas 10 y 24 de marzo

1. Leon 2015. Ejercicio 4 pg. 116. Encuentra todos los valores de c que hacen la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ singular.

2. Leon 2015. Ejercicio 11 pg. 85. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales.

   a) $AX + B = C$ b) $XA + B = C$

   c) $AX + B = X$ d $XA + C = X$

3. Lay 2016. Ejercicio 17 pg. 69. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que mapea $\vec{u} = (5, 2)$ en $(2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$ en $(-1, 3)$. Usa el hecho de que T sea aplicación lineal para encontrar la imagen dada por T de $3\vec{u}$, $2\vec{v}$ y $3\vec{u} + 2\vec{v}$. *Añadido: Obtén la matriz estándar T de la transformación.*

4. Una academia de idiomas ofrece cursos en 3 idiomas: inglés, francés y alemán. Los cursos están divididos en 4 niveles (Básico, Intermedio, Avanzado y Experto) y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales.

   La Tabla 1 muestra el número de estudiantes agrupados por nivel e idioma. Almacena estos datos como matriz $M1$.

Nivel/Idioma	Inglés	Francés	Alemán
Básico	120	80	60
Intermedio	100	60	40
Avanzado	80	50	20
Experto	60	30	10

   La Tabla 2 muestra el porcentaje de alumnos que asisten a grupos reducidos en función del nivel (el porcentaje es igual para los 3 idiomas). Almacena como $M2$ una matriz cuya primera columna sean los porcentajes en grupos reducido para cada nivel y cuya segunda columna sean los porcentajes en grupos normales por cada nivel.

Nivel/Porcentaje	Porcentaje de alumnos en grupos reducidos
Básico	20%
Intermedio	10%
Avanzado	10%
Experto	20%

   Rellena la Tabla 3 siguiente, que da para cada idioma el número total de estudiantes en grupos reducidos y el número total en grupos normales. ¿Qúe producto de matrices te ha permitido obtener el resultado?. Almacena los datos de esta tabla como $M3$.

Idioma	Número estudiantes en grupo reducido	Número estudiantes en grupo normal
Inglés		
Francés		
Alemán		

Sabiendo que la academia cobra 20 euros por persona en grupos reducidos y 15 euros en grupos normales, determina la matriz $M5$ (en concreto como un vector columna) que tiene por entradas la recaudación por clases de inglés, la recaudación por clases de francés y la recaudación por clases de alemán. Usa para ello una matriz columna $M4$ con los dos precios, y escribe qué producto de matrices has tenido que realizar.

La matriz $M5$ da el contenido de la Tabla 4, siguiente:

Idioma	Recaudación
Inglés Francés Alemán	

5. Ejercicio 3.4 de los apuntes, apartado d). Considera el espacio vectorial $P_2(x)$ y determina, en función del parámetro a, si el siguiente conjunto de polinomios es linealmente dependiente o linealmente independiente. Para el caso en el que el conjunto es linealmente dependiente, escribe una relación de dependencia lineal.
   $D = \{p(x), q(x), r(x)\}$, con $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $q(x) = 2 - 2x + 3x^2$, $r(x) = 7 + 8x + ax^2$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO  1  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A=[1 1 1; 1 9 c; 1 c 3]
% [1, 1, 1]
% [1, 9, c]
% [1, c, 3]

det(A)
% - c^2 + 2*c + 15
factor(ans)
% [-1, c + 3, c - 5]
% El determinante es  -1*(c+3)*(c-5)
% Por tanto A es singular si y solo si c=-3 o c=5

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO  2  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A=[5 3; 3 2], B=[6 2; 2 4], C=[4 -2 ; -6 3],

%     5     3
%     3     2

%     6     2
%     2     4

%     4    -2
%    -6     3
```

```
X=inv(A)*(C-B)
%   20.0000   -5.0000
%  -34.0000    7.0000

A*X + B - C   % comprobación
%    1.0e-13 *
%    0.1421         0
%         0    0.0355

X=(C-B)*inv(A)
%   8.0000  -14.0000
%  -13.0000   19.0000

X*A+B-C   % comprobación
%   1.0e-13 *
%    0.1421    0.0711
%         0    0.0711

X= inv(A-eye(2))*(-B)   % (A-eye(3)) * X  = -B
%    0.0000   -2.0000
%   -2.0000    2.0000

A*X+B-X % comprobación
%   1.0e-14 *
%   -0.1110         0
%    0.0444         0

X = (-C)*inv(A-I)       % X(A-I)=-C   =>  X = (-C)*inv(A-I)
%   2.0000   -4.0000
%  -3.0000    6.0000

X*A + C - X   % comprobación
%  1.0e-14 *
%    0.1332    0.1776
%    0.0888   -0.2665

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO  3  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u =[5 2]' ,  v=[ 1 3]'
fu=[2 1]' , fv=[-1 3]'  % llamamos así a sus imágenes o transformados

im1 = 3*fu        % f(3u) = 3*f(u) por ser aplicación lineal
im2 = 2*fv        % f(2v) = 2*f(v) por ser aplicación lineal
im3 = im1+im2     % f(3u+2v) = f(3u)+f(2v) por ser aplicación lineal.

%     6
%     3

%    -2
%     6
```

```
%     4
%     9

% Apartado añadido, obtención de la matriz T  asociada:
%  T * [ u  v ]  = [ fu fv ]
%  Despejamos T multiplicando a la derecha por [u v]^-1

format rat ;  T = [fu fv] * inv([u v])
%   8/13          -7/13
%  -3/13          14/13

A*[u v] - [fu fv]     % Comprobación
       0              0
       *              0

% Observa que para poder calcular T se necesita usar la inversa de [u v],
% dicho de otra forma, tenemos que conocer los transformados o imágenes de un
% conjunto {u,v} linealmente independiente.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO  4  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

M1=[120  80  60 ; 100  60  40 ; 80  50  20 ;   60  30  10 ]
%   120    80    60
%   100    60    40
%    80    50    20
%    60    30    10

M1'
%   120   100    80    60
%    80    60    50    30
%    60    40    20    10

v1=[0.2 0.1 0.1 0.2]' ; v2=ones(4,1)-v1 ; M2=[v1 v2]
%    0.2000    0.8000
%    0.1000    0.9000
%    0.1000    0.9000
%    0.2000    0.8000

M3=M1'*M2
%    54   306
%    33   187
%    20   110

M4=[20 15]'
%    20
%    15

M5 = M3*M4
```

```
%        5670
%        3465
%        2050

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  SOLUCION DEL EJERCICIO  5  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Escribimos los polinomios a través de sus coeficientes.
% Los polinomios tienen coeficientes:
% p0, p1, p2
% q0, q1, q2
% r0, r1, r2

% Los dos primeros polinomios, p y q, son l.i. porque uno no es múltiplo de otro.

syms a real
p=[1  2 3]' ;
q=[2 -2 3]' ;
r=[7 8  a]' ;

% El conjunt es l.d. si y solo si r es c.l. de p y q.
% Obviamente el valor del coeficiente r0
% saldría de la c.l. de p0 y q0. Y lo mismo sucedería con
% r1 que sale de la misma c.l. para p1 y q1, y que
% r2 que sale de la misma c.l. de p2 y q2.

A=[p q r]
% [1,  2, 7]
% [2, -2, 8]
% [3,  3, a]

det(A)
% 108 - 6*a
solve(ans)
% 18
% El conjunto es l.d. si y solo si a=18

% Calculamos ahora la relación de dependencia lineal para a=18

a=18      ;  r =[7 8  a]' ; A=[p q r] ; null(A,'r')
% -5
% -1
%  1

% La relación de dependencia lineal es:
% -5*p - q + r = 0

-5*p-1*q+r   % Comprobación:
%     0
%     0
%     0
```

P.5 Semana 24 de marzo

Dado un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$, obtención de una base de su subespacio generado H, obtención de las ec/s implícitas de H, y obtención de la/s relación/es de dependencia lineal en el conjunto inicial.

Ejerc. 3.17 modificado

Considera el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\} \subset \mathbb{R}^4$, siendo los $\vec{v}_i$ los vectores siguientes en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encuentra una base B del subespacio H generado por el conjunto y la dimensión de H. Razona la respuesta.

b) A partir de la base B, obtén la/s ec/ecs. implícita/s de H, denotando a las variables de $\mathbb{R}^4$ como x_1, x_2, x_3, x_4.

c1) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 4, -5, -10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

c2) Obtén el o los valores de a tales que $(a, 8, -10, 10)$ pertenezca a H. Escribe "ninguno" o "para todo a" si ese es el caso.

d) Añadido: Obtén las relaciones de dependencia lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es decir, ecuaciones de la forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4 + c_5\vec{v}_5 = \vec{0}$, donde no todos los reales c_i son cero, que permitan despejar los vectores eliminados en el apartado a) como combinación lineal del resto.

Solución 3.17

```
Se usa:
%  para indicar los datos que salen por pantalla
%% para los comentarios en el script


APARTADO a
----------

v1=[1 0 -3 2]'; v2=[0 1 2 -3]'; v3=[-3 -4 1 6]'; v4=[1 -3 -8 7]'; v5=[ 2 1 -6 9]';
S=[v1 v2 v3 v4 v5]
%  1  0 -3  1  2
%  0  1 -4 -3  1
% -3  2  1 -8 -6
%  2 -3  6  7  9
rref(S)
%  1  0 -3  0  4
%  0  1 -4  0 -5
%  0  0  0  1 -2
%  0  0  0  0  0
```

```
%% Vemos que las columnas pivotales son 1,2 y 4.
%% Por tanto la base B de H es  B={v1,v2,v4}
%% La dimensión de H es 3, porque la base tiene tres vectores

APARTADO b
----------

syms x1 x2 x3 x4 real
x=[x1 x2 x3 x4]' ;
B=[v1 v2 v4]     ;
Bx=[B x]  % La parte izda. es la base y a la derecha escribimos x simbólico.

% [  1,  0,  1,  x1]
% [  0,  1, -3,  x2]
% [ -3,  2, -8,  x3]
% [  2, -3,  7,  x4]

%% El formato de salida de Bx, con corchetes a los lados y comas
%% separando los elementos, es debido a que Bx es matriz simbólica,
%% al construirse con variables simbólicas.

%% Las tres primeras columnas proporcionan rango 3, pues son base.

%% (x1,x2,x3,x4) pertenece a H si y solo si
%% Bx (con el vector genérico añadido a la derecha) no aumenta el rango,
%% es decir, rg(Bx)=3, no pasa a ser 4.

%% Al ser Bx cuadrada podemos usar directamente la condición
%% de que el determinante sea 0 (para que el rango no sea 4).

det(Bx) %% la expresión resultante igualada a cero es la ec. implícita de H.

% 10*x1 - 5*x2 + 4*x3 + x4

%% Por tanto la ec implícita es:   10x1 - 5x2 + 4x3 + x4 = 0

%% A=[10 -5 4 1], por tanto la ec. implícita tb la podemos escribir
%% como A x = 0 , con la A dada  (x  vector y 0 también vector)
%% Dicho de otra forma, A es la matriz de coeficientes
%% de la ecuación implícita de H

%% Se cumple   dim Esp. total = nº de ecs del subesp. + dimensión del subesp
%%                     4       =       1               +  3

%% Comprobación de que la ec. es correcta: A * solución tiene que ser igual a cero
%% y las soluciones que tenemos que comprobar son los tres vectores v1 v2 y v4
%% que forman la base

A*B
% 0     0     0
```

```
%% Otra forma de obtener la ecuación implícita (método 2, pg. 76 de las diapositivas)

A=(null( sym(B')))'
% [10 -5 4 1]

APARTADOS c1 y c2
-----------------

syms a real , v=[a 4 -5 -10]'
A*v  %% v pertenece a H si y solo si cumple la ecuación implicita A * v = 0
     %% por tanto A*v ha de ser 0
% 10*a - 50
solve(ans)
% 5              %% a=5

%% PARA OTRO MODELO DE EJERCICIO
v=[a 8 -10 10]'
A*v
% 10*a - 70
solve(ans)
% 7              %% a = 7


APARTADOS c1 y c2 con otro método:
----------------------------------
%% Por ser H hiperplano, es decir, subespacio de dimensión n-1,
%% podemos hacer uso del determinante de
%% [v1 v2 v4 v] para determinar si v pertenece.
%% Obviamente v pertenece si y solo si el determinante es 0
%% (equivalente al rango 3).

%% solve(  det([v1 v2 v4 v])  )   dará como salida el valor de a.

APARTADO d
----------

%% Recordemos que la solución de un SL proporciona
%% el conjunto de coeficientes por los que hay que
%% multiplicar las columnas para que la combinación
%% lineal de éstas produzca el vector de términos independientes.
%% El apartado d) nos pide calcular los coeficientes
%% que producen el vector 0.

%% null(sym(S)) o null(S,'r') nos dará las dos soluciones independientes.
%% Y esas soluciones son precisamente los coeficientes a usar en las dos
%% relaciones de dependencia lineal, independientes entre sí.

%% En efecto sabemos de antemano que tenemos dos soluciones independientes
%% porque en la escalonada reducida de S teníamos dos columnas no pivotales,
%% que obviamente dan lugar a dos parámetros libres.
```

```
>> null(sym(S))
% [3, -4]
% [4, 5]
% [1, 0]
% [0, 2]
% [0, 1]

%% Las relaciones de dependencia lineal son entonces:
%%  3 v1 + 4 v2 + v3 = 0
%% -4 v1 + 5 v2 + 2 v4 + v5 = 0

%% De la primera y segunda podemos despejar, respectivamente, los vectores
%% dependientes v3 y v5 como combinación lineal de los vectores de B

%% v3 = - 3 v1 - 4 v2
%% v5 =   4 v1 - 5 v2 - 2 v4
```

P.6 Semana 31 de marzo

Ejerc. 3.23 Escribe el vector $\vec{v} = (5, 6)$ como suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y) \,/\, y = 2x\}$ y otro sobre la recta $\{(x, y) \,/\, y = x/2\}$ (*Tomado de Lay, Lay y McDonald, "Linear Algebra and its Applications". Quinta edición. 2016. Pearson pg. 90*).

Solución 3.23

```
% Para la recta de ec. y=2x  tomo como base   { (1 ,  2 ) }
% Para la recta de ec. y=x/2 tomo como base   { (1 , 1/2) }

% llamo a la primera recta r1 y a la segunda r2
% r1 + r2 = R2

% Puedo expresar cualquier vector v de R2 como c.l. de un
% vector de r1 y un vector de r2, es decir,
% existirán alpha y beta tales que v = alpha*b1 + beta*b2
% siendo b1 el vector base de r1 y b2 el vector base de r2

% Entonces v = v1+v2, con v1 en r1 y v2 en r2,
% siendo v1=alpha*b1  y b2=beta*b2


format rat  % Pues ya vemos desde el principio que tenemos fracciones

B=[1 2; 1 1/2]'

%    1    1
%    2    1/2

v=[5 6]'
sol=linsolve(B,v)  % B matriz de coeficientes, v vector de términos independientes

%       7/3
%       8/3

v1=sol(1)*B(:,1)   % sol(1) es la primera entrada de sol, alpha
                   % B(:,1) es b1
%      7/3
%      14/3

v2=sol(2)*B(:,2)   % sol(2) es la segunda entrada de sol, beta
                   % B(:,2) es b2
%       8/3
%       4/3
```

La solución es entonces:

$\vec{v_1} = (7/3, 14/3)$	$\vec{v_2} = (8/3, 4/3)$

Presentamos además como se resolvería a mano el SL $[\vec{b_1}\,\vec{b_2}\,|\,\vec{v}]$, para obtener α y β, mediante eliminación de Gauss-Jordan. Se muestran las sucesivas matrices ampliadas equivalentes, hasta llegar a la escalonada por filas reducida.

```
 1     1      5
 2    1/2     6

 1     1      5
 0   -3/2    -4

 1     1      5
 0    -1    -8/3

 1     0     7/3
 0    -1    -8/3

 1     0     7/3
 0     1     8/3
```

Ejercicio 3.24, con los datos del vector $\vec{v}$ modificados.

Considera los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
* el plano Π: $3x + 6y - z = 0$
* la recta r : $\{(1, 2, 3)\lambda \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Obtén una base de Π.

b) Justifica si la suma de Π y r es o no suma directa.

c) Justifica si Π y r son o no complementarios.

d) Argumenta si es posible expresar el vector $\vec{v} = (7, 11, 63)$ como suma de un vector $\vec{v}_1$ del plano Π y un vector $\vec{v}_2$ de la recta r.

e) Si es posible la descomposición anterior:

Calcula $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_1$ obtenido se encuentra en el plano Π.

Comprueba explícitamente que el vector $\vec{v}_2$ obtenido se encuentra en la recta r.

Comprueba explícitamente que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v} = \vec{0}$.

Solución 3.24

```
% a) Obtenemos la base del plano resolviendo su ecuación  Ax=0  con null()

B_Pi = null([3 6 -1],'r')
```

```
[ -2, 1/3]
[  1,   0]
[  0,   1]
```

Las dos columnas que proporciona null(), que son dos soluciones independientes de la ecuación $3x + 6y - z = 0$, nos dan una base del plano Π:

$\boxed{B_\Pi = \{(-2, 1, 0), (1/3, 0, 1)\}}$

```
% b) Escribimos como vector columna la base de la recta
B_r = [1 2 3]'  ;

% La dimensión del plano es el nº de vectores de cualquier base del plano,
% por tanto 2
% La dim. de la recta es el nº de vectores de cualquier base de la recta,
% por tanto 1
% La unión de las bases de plano y recta  genera el subespacio  plano+recta
% La dimensión de (plano+recta) es el rango de las dos bases unidas.
% La suma es directa si dim (plano+recta) = dim(plano) + dim(recta) =2+1=3

[ B_Pi B_r]
rank([ ans ] )

 [ -2, 1/3, 1]
 [  1,   0, 2]
 [  0,   1, 3]

3
```

El rango es 3 y por tanto la dimensión de la suma es 3. La suma de ambos subespacios es entonces todo $\mathbb{R}^3$. Esto revela que la recta no se encuentra en el plano.

La suma es directa (suma de las dimensiones igual a la dimensión de la suma). Dicho de otra forma, la unión de las bases es base (no hay que quitar ningún vector).

c) Π y r son complementarios porque su suma es directa y porque la suma es igual a $\mathbb{R}^3$.

d) Es posible expresar cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ como suma de un vector de Π y un vector de r, ya que en la expresión de $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(-2,1,0),(1/3,0,1),(1,2,3)\}$, $\vec{v} = c_1(-2,1,0) + c_2(1/3,0,1) + c_3(1,2,3)$, con $\vec{v}_1 = c_1(-2,1,0) + c_2(1/3,0,1)$ en el plano y $\vec{v}_2 = c_3(1,2,3)$ sobre la recta. $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son únicos (no existe otra descomposición posible), porque las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, es decir, c_1, c_2 y c_3 son únicos.

```
Lo aplicamos al vector v del enunciado.
v = [7 11 63]';

% Escribimos la base B de R3, formada por las bases de plano y recta.

B = [ B_Pi B_r ]

% Resolvemos el sistema compatible determinado con linsolve(B,v).
% Llamamos c a la solución, que son las coordenadas de v respecto
% de la base B

c = linsolve(B,v)    % matriz ampliada [ B | v ]
   7
  57
   2

% La solución es (7,57,2), por tanto la combinacion lineal es
% v = 7 b1 + 57 b2 + 2 b3
```

```
% con v1 = 7 b1 + 57 b2   (en el plano)  y  v2 = 2 b3 (en la recta)

v1 = c(1)*B(:,1) + c(2)*B(:,2)

v2 = c(3)*B(:,3)
```

```
 v1=
  5
  7
 57

v2=
  2
  4
  6
```

$\boxed{\vec{v}_1 = (5, 7, 57) \quad \vec{v}_2 = (2, 4, 6)}$

Comprobaciones:

```
[3 6 -1]*v1      % resultado cero si v1 se encuentra en el plano
rank([PB_r v2])  % resultado 1 si v2 se encuentra en la recta r
v1 + v2 - v      % resultado el vector 0 si la descomp. está bien hecha
```

```
ans =
0
ans =
     1
ans =
 0
 0
 0
```

P.7 Semana 7 de abril

Aplicaciones lineales

Imagen de un subespacio

Ejerc. 4.4 modificado . Dada la aplicación lineal f con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,
obtén una base de $f(V)$ y una base de $f(W)$ siendo V y W los siguientes subespacios:
$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x1 = x4, x3 = 0\}$
$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x4 = 0\}$

```
A=[1 0 3 -1; 0 1 2 -1; 0 0 0 0; 1 0 3 1]
%     1     0     3    -1
%     0     1     2    -1
%     0     0     0     0
%     1     0     3     1

%% f(V)
%% ====

ecV = [1 0 0 -1 ; 0 0 1 0] ; % matriz de coeficientes de las ec de V

BV = null(ecV,'r')
%     0     1
%     1     0
%     0     0
%     0     1

sgfV = A*BV     % el resultado es sistema generador de f(V)
%     0     0
%     1    -1
%     0     0
%     0     2

%% Los vectores son l.i. (uno no es múltiplo de otro), por tanto el
%% conjunto es base: Base de f(V)= {(0,1,0,0), (0,-1,0,2)}

%% f(W)
%% ====

ecW = [0 0 0 1] ; % matriz de coeficientes de la ec de W

BW = null(ecW,'r')
%     1     0     0
%     0     1     0
%     0     0     1
%     0     0     0
```

```
sgfW = A*BW     % el resultado es sistema generador de f(W)
%     1     0     3
%     0     1     2
%     0     0     0
%     1     0     3

rank(sgfW)
% 2

%% Los vectores son l.d., pues el rango es menor que el número de ellos.

%% Base de f(W)= {(1,0,0,1), (0,1,0,0)} sin más que tomar
%% las dos primeras columnas, ya que forman un subconjunto l.i. máximo.
```

Endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ con interpretación geométrica sencilla

Ejerc. 4.5 modificado. Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:
a) simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$
b) proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}\,x$

Considerada la figura con los vértices P, M, Q, R y T dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simétrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$M = (6, 7)$		
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

• **Ampliación del ejercicio:** Obtén las siguientes tranformaciones lineales adicionales de la figura original:
c) Dilatación de un factor 2.
d) La siguiente composición de aplicaciones: dilatación de un factor 2 y a continuación simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$.
e) Giro centrado en el origen, de ángulo 20 grados en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

• **Notación:** Denota las matrices obtenidas para las transformaciones a), b), c), d) y e) como As ('s' por simetría), Ap ('p' por proyección), Ad ('d' por dilatación), Acom ('com' por composición) y Ag ('g' por giro), respectivamente.

• **Representación gráfica:** (de los resultados obtenidos en las cinco transformaciones)

Las funciones de MATLAB de representación gráfica se usan para la mejor comprensión de los contenidos, pero no son materia exigida en la asignatura.

Solución Ejercicio 4.5 modificado:

```
% datos = [ 6 6 ; 6 7; 7 7 ; 8 6 ; 7 5 ; 6 6]'  % que están en estándar.
                  % se repite el último punto para cerrar la figura
                  % en la representación gráfica

%  S  = [ 1 0 ; 0 -1 ]  % matriz de la simetría referida a su base natural
%  Pr = [ 1 0 ; 0  0 ]  % matriz de la proyección referida a su base natural

%  B = [ 3 1 ; -1 3 ]'  % base natural para la simetría y la proyección
                        % vector de la recta de simetría o de proy. en col 1
                        % vector perpendicular                      en col 2


% Marco teórico del cambio de base de la AL:
% ------------------------------------------
% A = B*F*inv(B)  % Cambio de base: de matriz F referida a base natural
                  % a matriz A referida a base estándar

                  % Copia de deducción A = B*F*inv(B) de los apuntes:

                  %   Ecuaciones de partida:
                  %     B xB = x  => xB = inv(B)*x
                  %     B yB = y  => yB = inv(B)*y
                  %
                  %     F xB = yB    A x = y
                  %
                  %   A partir de ellas, sustituyendo xB e yB
                  %     F inv(B) x = inv(B) y

                  %     B F inv(B) x =  y      premultiplicando por B
                  %     A = B F inv(B)

% Ejecución:
% ----------
 datos = [ 6 6 ; 6 7 ; 7 7 ; 8 6 ; 7 5; 6 6 ]'
 B = [ 3 1 ; -1 3 ]'
 S  = [1 0; 0 -1]    ,  Pr = [1 0; 0  0]
 As = B*S*inv(B)       % es la matriz estándar pedida (simetría)
 Ap = B*Pr*inv(B)      % es la matriz estándar pedida (proyección)

 datos_s = As*datos    % los vectores simétricos (las imágenes pedidas)
 datos_p = Ap*datos    % los vectores proyectados (las imágenes pedidas)

% Visualización (gráfica):
% ------------------------
plot([ -9  24] , [ -3  8] , 'k-' )   % recta desde -3*(3,1) hasta 8*(3,1)
                                     % de (-9,-3) a (24,8)
hold on

axis equal  % incrementos de x   y  de y son iguales
plot([0], [0] , '+k')                % cruz negra en el origen (0,0)
```

```
% datos(1,:)       % en fila 1    coordenadas x de los vectores
% datos(2,:)       % en fila 2    coordenadas y de los vectores

plot(datos(1,:)   , datos(2,:)   , 'ok-')     % original en negro 'k'
plot(datos_s(1,:) , datos_s(2,:) , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
plot(datos_p(1,:) , datos_p(2,:) , 'or-')     % transformado en rojo 'r'
saveas(figure,'figura_ejerc_4_5_ab.jpg')



% Resultados:
% -----------


datos =
     6     6     7     8     7     6
     6     7     7     6     5     6

B=
     3    -1
     1     3

S =
     1     0
     0    -1

Pr =
     1     0
     0     0

As =
    0.8000    0.6000
    0.6000   -0.8000

Ap =
    0.9000    0.3000
    0.3000    0.1000

datos_s =
    8.4000    9.0000    9.8000   10.0000    8.6000    8.4000
   -1.2000   -2.0000   -1.4000    0.0000    0.2000   -1.2000

datos_p =
    7.2000    7.5000    8.4000    9.0000    7.8000    7.2000
    2.4000    2.5000    2.8000    3.0000    2.6000    2.4000



% datos_s'  y datos_p' nos darán  las coordenadas (x,y) de cada punto
% para cubrir, respectivamente, las columnas 2 y 3 de la tabla.
```

```
datos_s'

    8.4000   -1.2000
    9.0000   -2.0000
    9.8000   -1.4000
   10.0000    0.0000
    8.6000    0.2000
    8.4000   -1.2000

datos_p'

    7.2000    2.4000
    7.5000    2.5000
    8.4000    2.8000
    9.0000    3.0000
    7.8000    2.6000
    7.2000    2.4000
```

Ampliación del ejercicio con las transformaciones lineales c), d) y e)

```
% Ad = 2*eye(2)   % Matriz estándar de la dilatación de factor 2
                  % eye(2) es la matriz identidad de orden 2
                  % Ad es la matriz asociada respecto de cualquier base
                  % Demostración: Supuesto que en cierta base F=2*eye(2)
                  % A = B * F * inv(B) = B * 2*eye(2) * inv(B) =
                  % 2 * B*inv(B) = 2 * eye(2)


% Acom = As * Ad  % Matriz estándar: primero dilatación y después simetría
                  % Nótese que en este caso el orden es indiferente, ya que la matriz
                  % 2*eye(2) conmuta con cualquier matriz.


% a = 20          % ángulo de 20 grados (degrees)

% Matriz estándar de giro 20 grados en sentido positivo,
% es decir, contrario al de las agujas del reloj o antihorario

% Ag = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]  % sufijo 'd' para unidades de grados
                                            % en el argumento ángulo a

                  % Se aplicaría la misma fórmula, con a=-20, si el giro pedido
                  % fuera en el sentido de las agujas del reloj
% Ejecución:
% ----------

Ad   = 2*eye(2)
Acom = As * Ad
```

```
a = 20 , Ag = [cosd(a) -sind(a); sind(a) cosd(a)]

datos_d   = Ad*datos    % dilatación aplicada a figura original

datos_com = Acom*datos  % dilat. y después simetría aplicada a fig. original

datos_g   = Ag*datos    % giro aplicado a figura original

% Visualización:
% --------------

plot(datos_d(1,:)  , datos_d(2,:)  ,'ob-')  % dilatación           color azul
plot(datos_com(1,:), datos_com(2,:),'og-')  % 1º) dil. 2º) simetr. color verde
plot(datos_g(1,:)  , datos_g(2,:)  ,'om-')  % giro                 color magenta
saveas(figure(1),'figura_ejerc_4_5_abcde.jpg')

% Resultados:
% -----------

Ad =
     2     0
     0     2

Acom =
    1.6000    1.2000
    1.2000   -1.6000

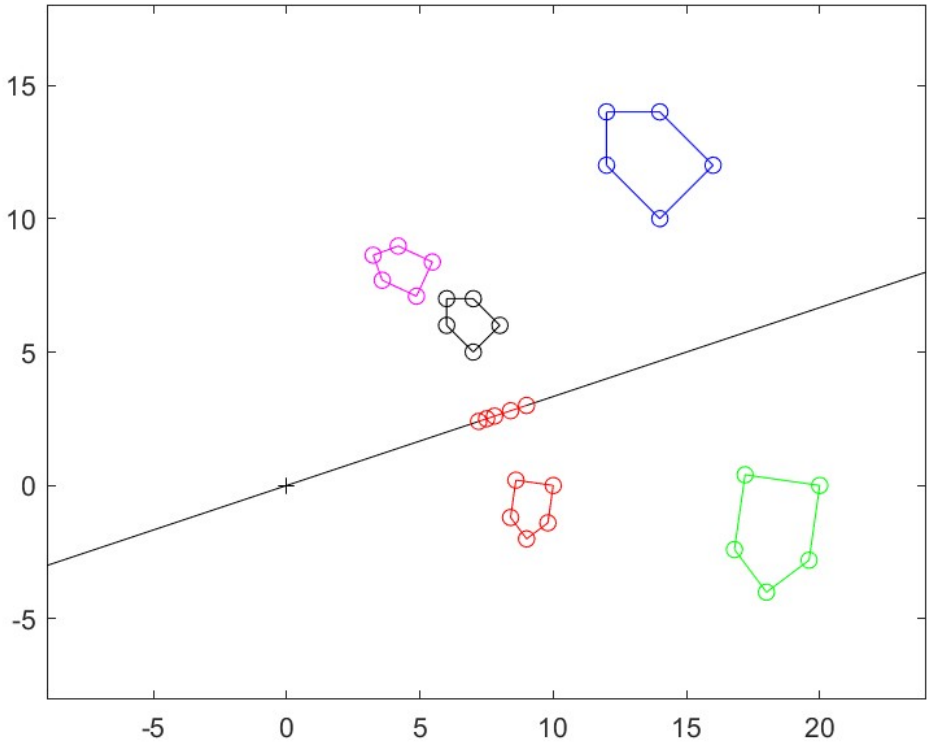
a =
   20

Ag =
    0.9397   -0.3420
    0.3420    0.9397

datos_d =
    12    12    14    16    14    12
    12    14    14    12    10    12

datos_com =
   16.8000   18.0000   19.6000   20.0000   17.2000   16.8000
   -2.4000   -4.0000   -2.8000    0.0000    0.4000   -2.4000

datos_g =
    3.5860    3.2440    4.1837    5.4654    4.8677    3.5860
    7.6903    8.6300    8.9720    8.3743    7.0926    7.6903
```



Matrices As, Ap, Acom en formato racional:

```
format rat
As
Ap
Acom


% As =
%       4/5            3/5
%       3/5           -4/5

% Ap
%       9/10           3/10
%       3/10           1/10

% Acom =
%       8/5            6/5
%       6/5           -8/5
```

P.8 Semana 28 de abril

Tema 5. Autovalores, autovectores y diagonalización

Ejemplo 9 ampliado

```
A= [3 2; 3 -2] ;  n=2 ; i2=eye(2)

% 1 0
% 0 1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Obtención de los autovalores
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

syms a
                     %% | A - a I |  es el polinomio característico de A
                     %% Queremos determinar todas las raíces del polinomio, es decir
                     %% tanto las reales como las complejas,
                     %% por lo que no añadimos la opción
                     %% 'real' en la instrucción ">> syms a "

a=solve(det(A-a*i2)) %% La salida contiene todas las raíces del pol. característico.
                     %% Serán n raíces en total
                     %%   si hay raíces complejas aparecerá cada una con su conjugado
                     %%   las raíces reales son los autovalores
                     %%     si sólo hay un autovalor diferente, lo llamamos lambda
                     %%     si hay varios autovals diferentes:  lambda1, lambda2, etc
                     %% Si quisiéramos dar nombres a los autovalores en MATLAB
                     %% preferiríamos llamarlos por ejemplo a1, a2, etc

%  -3
%   4

%% Los autovalores son -3 y 4, ambos de multiplicidad algebraica 1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Obtención de una base de cada subespacio propio
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Hay dos subespacios propios, el asociado a -3, y el asociado a 4

Bmenos3=null(sym(A-(-3)*i2)  %% Las cols de la salida nos dan una base B de V(-3).
                             %% Es decir una base de las soluciones del SL  A x = -3 x
                             %% que es el mismo SL que    (A - (-3) I) x = 0

  %% Observación: Si te da como resultado que no existe base es que has cometido un error,
  %% ya que la dim de un subesp. propio siempre es como mínimo 1.

% -1/3
%   1
```

```
%% Podríamos tomar como base de este subespacio propio {(-1,3)} si queremos
%% evitar denominadores.

B4=null(sym(A-4*i2)       %% las cols de la salida nos dan una base B de V(4).
                          %% Es decir una base de las soluciones del SL  A x = 4 x
                          %% que es el mismo SL que   (A - 4 I) x = 0

% 2
% 1



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Existencia o no de base de R2 formada por autovectores de A
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Por comodidad
b1=Bmenos3*3 ; b2=B4 ;

%% Es un resultado general que la unión de las bases de subespacios propios distintos
%% es un conjunto linealmente independiente.
%% O lo que es lo mismo, que la suma de subespacios propios es suma directa.

B=[b1 b2]
% [ -1, 2]
% [  3, 1]

rank(B)  %% confirmamos que la unión es l.i.
% 2

%% Al tener dos autovectores l.i. tenemos una base de R2, B={b1,b2},
%% formada por autovectores de A.

%% V(-3) +(suma directa) V(4) = R2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Comprobación de los autovectores, cada uno con su autovalor
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A*b1 - (-3)*b1   %% comprob. de que A*b1 = -3 b1
A*b2 -    4*b2   %% comprob. de que A*b2 =  4 b2

% 0
% 0

% 0
% 0

%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Diagonalización
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% La matriz de la aplicación lineal respecto a la base B de R2, formada por autovectores,
%% es la matriz D cuyos elementos son los autovalores en el mismo orden en el que aparecen
%% los correspondientes autovectores en la base B.

D=diag([-3 4])

% [-3, 0]
% [ 0, 4]

%% La razón es que:
%%   f(b1)= -3*b1  por tanto f(b1)= -3 b1 + 0 b2 , y de ahí la primera columna [-3 0]'
%%   f(b2)=  4*b2  por tanto f(b2)=  0 b1 + 4 b2 , y de ahí la segunda columna [ 0 4]'

%% D es la matriz asociada a la base B
%% de la misma forma que A es la asociada a la base canónica.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Comprobación de A = B D B^-1 en la forma más sencilla AB = BD
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A*B

% [ 3, 8]
% [-9, 4]

B*D

% [ 3, 8]
% [-9, 4]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Comprobación de los invariantes
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[trace(A) trace(D)]
[det(A)   det(D)  ]
[rank(A)  rank(D) ]

%   1     1
% -12   -12
%   2     2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Interpretación geométrica del endomorfismo f, representado por A
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% La transformación lineal deja invariante la recta  r: <(-1,3)>, ya que los vectores
%% de la recta permanecen en la recta. f(r) = r
%% Los vectores no permanecen fijos en ella, sino que cada uno se transforma en -3 veces
%% él mismo.
```

```
%% Los vectores sólo estarían fijos si el autovalor fuera el 1.

%% Lo mismo sucede con la recta s: <(2,1)>. Los vectores se transforman en
%% 4 veces ellos mismos, y f(s) = s

%% Todos los vectores que están fuera de alguna de las dos rectas sufren
%% un cambio de dirección en la transformación, ya que no son vectores propios.

%% Utilizando como sistema de referencia la base B={(-1,3),(2,1)}, la matriz asociada
%%  a f  queda muy sencilla,  D=[-3 0; 0 4].
%% Las coordenadas xB=(alpha,beta) del vector original simplemente se transforman en
%% yB=(-3*alpha,4*beta) en el vector transformado.
```

P.9 Semana 12 de mayo

Tema 6. Geometría elemental de vectores, rectas y planos en el espacio ordinario

En las soluciones, las instrucciones de MATLAB, incluidos los comentarios, están escritos en azul, y las salidas en rojo.

Ejemplo 19. (Tema 6, página 30).
Considerado el vector $\vec{v} = (5, -1, 1)$ y el plano $x - 2y + z = 0$ se pide:
a) Obtén la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre Π
b) El simétrico de $\vec{v}$ respecto de Π
c) La distancia de $\vec{v}$ a Π
e) El coseno del ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con su proyección sobre Π.

```
v=[5 -1 1]'
n=[1 -2 1]'              % vector normal del plano Pi

format rat
z=dot(v,n)/dot(n,n)*n    % dot(a,b) es el producto escalar de los vectores a,b
                         % con esta expresión calculamos la proyección ortogonal sobre la
                         % recta ortogonal (perpendicular) al plano.
       4/3
      -8/3
       4/3

proy=v-z                  % respuesta al apartado a) "proyección de v sobre Pi"
      11/3
       5/3
      -1/3

vsim=v-2*z                % respuesta al apartado b) "simétrico de v respecto de Pi"
       7/3
      13/3
      -5/3

dist=norm(z)
                         % norm(a) es la norma del vector a
                         % respuesta al apartado c) "distancia de v a Pi"
    1277/391

format short
dist
3.2660

dot(v,proy) / (norm(v) * norm(proy))  % respuesta a d) "coseno del ángulo de v
                                      % con su proyección"
0.7778

% El coseno es positivo. Efectivamente ha de ser así, pues el ángulo entre el vector
%  y su  proyectado en el plano sólo puede estar entre 0 y 90 grados
% (0 si el vector estuviera en el plano, 90 grados si fuera ortogonal al plano).
```

Ejercicio 6.1 (Tema 6, página 33), ampliado y modificados ligeramente los datos.

Para el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 2.5)$ y $C = (-3, 6.5)$, se pide:
a) Los ángulos interiores en A, B y C (en grados). b) El perímetro.
c) El área. d) El centro geométrico, centroide o baricentro.
e) El cuarto vértice del paralelogramo de vértices consecutivos CAB.
f) Un vector bisector en el vértice A (vector que divida el ángulo interior en A en dos partes iguales).

La diferencia con el Ejercicio 6.1 de los apuntes es la inclusión aquí del apartado f), y el cambio de datos. $(A = (1, 1), B = (5, 3), C = (-3, 7))$ en los apuntes).

a) Ángulos.

```
% Introducimos los datos que son las coordenadas de los tres vértices A, B, C y
% seguidamente determinamos los vectores AB, AC, BC

 A=[1 1]'; B=[5 2.5]'; C=[-3 6.5]';  % introducidos como vectores columna
 AB=B-A  ,  AC=C-A , BC=C-B


AB =
    4.0000
    1.5000
AC =
   -4.0000
    5.5000
BC =
    -8
     4


% tomamos AB y AC para calcular el ángulo en el vértice A

 angA=acosd(dot(AB,AC)/norm(AB)/norm(AC));

% dot( , )  es el producto escalar de los vectores que aparecen como argumentos
% norm(  )  es la norma o longitud del vector
% acosd( )  es el arcocoseno en grados

% tomamos BA y BC para obtener con el mismo procedimiento el ángulo en B
% (BA=-AB)

 angB=acosd(dot(-AB,BC)/norm(AB)/norm(BC));

% tomamos CA y CB para obtener el ángulo en vértice C (CA=-AC , CB=-BC)

 angC=acosd(dot(-AC,-BC)/norm(AC)/norm(BC));

[ angA  angB angC]   % Pedimos que los valores de los ángulos se muestren como
                     % una fila para ahorrar espacio.

  105.4713   47.1211   27.4076
```

```
angA + angB + angC  - 180   % Este resultado deber salir 0, como comprobación
                            % de que la suma de los ángulos es 180
  0
```

b) Perímetro.

```
peri=norm(AB)+norm(BC)+norm(AC)
20.0170
```

c) Área.

```
% Situamos el triángulo en el plano XY de R3, añadiendo a los vértices la coordenada
% z=0

% Hallamos el área a partir de la norma del producto vectorial de los vectores
% AB3, AC3, siendo AB3, AC3 los vectores AB, AC, pero considerados no sobre R2
% sino sobre el plano XY de R3.
% Es necesario hacerlo así ya que el producto vectorial es una operación en R3

AB3 = [AB ; 0] % extendemos el vector col. AB con una tercera coord. igual a 0
AC3 = [AC ; 0] % extendemos el vector col. AC con una tercera coord. igual a 0
area=1/2*norm(cross(AB3,AC3))

% cross( , )  producto vectorial de los vectores que aparecen como argumentos
AB3 =
    4.0000
    1.5000
         0
AC3 =
   -4.0000
    5.5000
         0
area =
    14
```

d) Centroide

```
cen= 1/3*(A+B+C)
    1.0000
    3.3333
```

e) El cuarto vértice, D, del paralelogramo de vértices consecutivos CAB.

```
AD = AB+AC      % AB+AC  es el vector AD.
D = A + AD      % D es igual a A + el vector AD
                % También se puede entender así: OD = OA + AD
AD =
     0
     7

D =
     1
     8
```

f) Un vector bisector en el vértice A.

```
% El ángulo en A se obtuvo en el apartado a).
% En este apartado obtendremos un vector con origen en A que divide el ángulo
% anterior en dos partes iguales, o lo que es lo mismo, que forma el mismo ángulo
% con AB y con AC

v=AB/norm(AB)+AC/norm(AC)  % es necesario tomar los vectores en las orientaciones
                           % AB y AC con la misma longitud, porque solo así la suma
                           % de los vectores da como resultante un vector
                           % que divide el ángulo en A en dos partes iguales.
```

```
v =
    0.3482
    1.1599
```

P.10 Semana 19 de mayo

Tema 7: Espacio euclídeo canónico $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 9. Considerados en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{y} = (7, 6)$ y $\vec{b} = (2, 1)$, se pide:
a) La proyección ortogonal de $\vec{y}$ sobre $< \vec{b} >$
b) La distancia de $\vec{y}$ a la recta $< \vec{b} >$.

```
PROYECCIÓN ORTOGONAL MEDIANTE TRES MÉTODOS DISTINTOS

% Método 1: Obtención de la proyección ortogonal mediante producto escalar
% ------------------------------------------------------------------------
>> y=[7 6]'
>> b=[2 1]'
>> proy1 = y'*b/(b'*b) * b
     8
     4

% Método 2: Obtención mediante descomposición ortogonal
% -----------------------------------------------------
>> n=[-1 2]'
>> Ampli= [b n y]   % sólo para fijarme en la ampliada
>> sol=linsolve([b n], y)
     4
     1
>> proy2=sol(1)*b
     8
     4

% Método 3: Recordatorio de la proyección mediante su forma diagonal
% ------------------------------------------------------------------
>> B=[b n]
>> Pr=[1 0; 0 0]
>> A=B*Pr*inv(B)
    0.8000    0.4000
    0.4000    0.2000

>> A-A'  % para comprobar que queda matriz simétrica (resultado = matriz cero),
         % ya que es diangonalizable y los subespacios propios son ortogonales entre sí.
    0     0
    0     0

>> proy3=A*y
     8
     4

DISTANCIA

>> norm(y-proy1)
    2.2361
```

Ejemplo 10. Sea $W =< (0,1,1),(1,1,2) >$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Obtén una base ortogonal de este subespacio.

```
>> format rat
>> a1=[0 1 1]' ;  a2=[1 1 2]'  ;
% El par de vectores forma base del subespacio W porque son sistema generador de W
% y son linealmente independientes (esto último se deduce de que uno no es múltiplo
% del otro).

>> b1 = a1 ;
>> b2 = a2 - dot(a2,b1)/dot(b1,b1)*b1
       1
      -1/2
       1/2

% {b1,b2} es base ortogonal de W
% Podríamos tomar esta otra, si queremos evitar fracciones:

>> b2=[2 -1 1]'

% Comprobación de la ortogonalidad: dot(b1,b2) ha de ser 0.
>> dot(b1,b2)
       0
```

Ejemplo 11. Supongamos dos clases de alimento, A y B, con las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de alimento.

	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

a) Demuestra que combinando las dos clases de alimentos no podemos obtener el siguiente aporte exacto: $\vec{v} = (17\ mg\ de\ vitamina\ C, 54\ mg\ de\ calcio, 31\ mg\ de\ magnesio)$

b) Determina el aporte más cercano al aporte exacto que se podría conseguir combinando los dos alimentos.

```
% a)
format rat
a1=[1 5 3]'    % distribución de nutrientes en el alimento A
a2=[1 2 1]'    % distribución de nutrientes en el alimento B
v=[17 54 31]'  % objetivo de distribución de nutrientes

%  v se puede obtener por combinación lineal de {a1,a2} si el sistema lineal
%  [a1 a2 | v ] es compatible.
%  Haría falta además que en la solución encontrada (x,y) ninguno de los dos
%  reales fuera negativo.

%  a1 =
%        1
%        5
%        3
```

```
%   a2 =
%        1
%        2
%        1

%   v =
%       17
%       54
%       31

% Es obvio que [a1 a2] tiene rango 2, pues los vectores no son uno múltiplo del otro.
% Confirmación:

rank([a1 a2])    % ans = 2

% Si rango de [a1 a2 v] es 3 quedará demostrado que v no puede obtenerse combinando
% las dos clases de alimento.

rank([a1 a2 v])  % ans = 3

% b) El aporte más cercano es la proyección ortogonal de v sobre W=<a1 a2>.
% Llamamos a este vector vproy.

% Obtención mediante descomposición ortogonal
% -------------------------------------------
% Descomponemos el espacio principal R3 como suma de W + Wco (Wco es el
% complemento ortogonal de W)

W=[a1 a2]

% dim(Wco) = 3 - 2 = 1
% La base {n} de Wco está formada por un vector n que sea a la vez
% ortogonal a a1 y a a2.

n=null(W','r')  % las columnas son la base de Wco

%  1/3
% -2/3
%   1

a1'*n               % ans= 0   comprobación de que n es ortog a a1
a2'*n               % ans= 0   comprobación de que n es ortog a a2

B=[a1 a2 n]         % Es base de R3, con los dos primeros vectores
                    % en W y el tercero en el compl. ortog. de W.

% [1, 1,  1/3]
% [5, 2, -2/3]
% [3, 1,    1]
```

```
% [a1 a2 n | v ]      % Resolviendo el SL compatible determinado con esta
                      % matriz ampliada, obtendremos  sol=(alpha,beta,gamma)

sol = linsolve(B, v) % función para resolver un SCD
% 48/7
%  10
% 3/7

vproy = sol(1)*a1 + sol(2)*a2    % sol tiene 3 entradas, sol(i) es la entrada i
% 118/7
% 380/7
% 214/7

double(vproy)   % para pasar a formato decimal
%      16.8571
%      54.2857
%      30.5714

% En este ejercicio la base de Wco también se podría haber
% obtenido mediante el producto vectorial de a1 por a2
n2 = cross(a1,a2)
%    -1
%     2
%    -3

% Este vector n2 normal al plano no coincide con el vector n determinado
más arriba, aunque obviamente sí es proporcional.

% La base B sería entonces [a1 a2 n2]
% El vector vproy resultante será obviamente el mismo.

% Nótese que si estuviéramos por ejemplo en R4, con cuatro variables
% y con dim W =2, tendríamos dos vectores en el complemento ortogonal "n", "o",
% y el SL a resolver sería [a1 a2 n o | v ], siendo de nuevo la proyección
% vproy = sol(1) * a1 + sol(2) * a2


% Obtención mediante producto escalar
% -----------------------------------

% Teniendo en cuenta que R3 = W + Wco, con dimensiones respectivas 2 y 1,
% calcularemos en primer lugar la proyección de v sobre Wco (dimensión d=1),
% que llamaremos z, y seguidamente obtendremos  vproy = v - z .

% Con este método no podemos calcular directamente la proyección sobre W
% (dimensión d=2), ya que antes deberíamos obtener una base ortogonal
% de <a1,a2>  ( {a1,a2} no lo es).
```

```
z = dot(v,n)/dot(n,n)*n   ,  vproy=v-z

%  1/7
% -2/7
%  3/7

% 118/7
% 380/7
% 214/7

% Obtención mediante producto escalar sobre el subespacio de dim=2
% ----------------------------------------------------------------

% Determinaremos una base ortogonal de W (d=2) y aplicaremos la fórmula de la
% proyección de un vector sobre dicho subespacio, que requiere conocer una base
% ortogonal del subespacio.
% En este caso dim W=2, por tanto
% vproy = dot(v,b1)/dot(b1,b1)*b1 + dot(v,b2)/dot(b2,b2)*b2 ,
% siendo {b1, b2} base ortogonal de W.

% La base ortogonal de W la obtendremos con la función orth().
% orth() devuelve, de hecho, una base ortonormal.

Worton=orth(W)
%    -736/3605        97/103
%   -1190/1409      -111/3535
%   -1137/2297      -368/1099

format short    % para que no nos queden las fracciones de números enormes
                % que aproximan los números decimales resultantes

Worton=orth(W)
%   -0.2042    0.9417
%   -0.8446   -0.0314
%   -0.4950   -0.3348

Worton'*Worton  % Comprobación de que la base es ortonormal
                % (U'*U = I  en matrices U cuyas cols. son base ortonormal del
                % subespacio generado por ellas)

%    1.0000   -0.0000
%   -0.0000    1.0000
```

```
u1=Worton(:,1) ;  u2=Worton(:,2) ;
vproy=dot(v,u1)*u1+dot(v,u2)*u2   % Al haber tomado una base ortonormal no es
                                  % necesario escribir los denominadores
                                  % dot(ui,ui) (su valor es 1).

%   16.8571
%   54.2857
%   30.5714

% Obtención mediante la matriz de proyección usando una de estas formas:
% ----------------------------------------------------------------------

% Ap1 = B*inv(B'*B)*B'            con B base de W                B=[a1 a2]
% Ap2 = B*B'                      con B base ortonormal de W     B=[u1 u2 ]

% Ap3 = B*diag([1 1 0])*inv(B)    A partir de su conocida forma diagonal respecto
%                                 de la base natural B=[a1 a2 n] de autovectores.

B = [ a1 a2 ]  ; Ap1 = B*inv(B'*B)*B'

U = [ u1 u2 ]  ; Ap2 = U*U'

B = [ a1 a2 n] ; Pr=diag([1 1 0]); Ap3 = B *  Pr * inv(B)

Ap1 =
    0.9286    0.1429   -0.2143
    0.1429    0.7143    0.4286
   -0.2143    0.4286    0.3571

Ap2 =
    0.9286    0.1429   -0.2143
    0.1429    0.7143    0.4286
   -0.2143    0.4286    0.3571

Ap3 =
    0.9286    0.1429   -0.2143
    0.1429    0.7143    0.4286
   -0.2143    0.4286    0.3571


vproy=Ap1*v   % el mismo formato de resultado para Ap2*v y para Ap3*v
% vproy =
%   16.8571
%   54.2857
%   30.5714
```

Ejemplo 12. a) Demuestra que no es posible expresar el vector $\vec{v} = (15, 6, 4, -5)$ como combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \{(-1, 0, 0, 1), (4, 1, -1, -2)\}$.
b) Obtén los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de S que dan el vector más cercano a $\vec{v}$.

```
% a)
v = [15 6 4 -5]'
%    15
%     6
%     4
%    -5

% Denotamos a los dos vectores de S como b1 y b2.  S={b1,b2}
% {b1,b2} es base de <S>, ya que siendo dos vectores, uno no es múltiplo de otro.

B=[-1 0 0 1; 4 1 -1 -2]' % Construimos la matriz B que tiene por columnas esa base.
%    -1     4
%     0     1
%     0    -1
%     1    -2

rank(B)   % ans = 2   Confirmación de que el par es conjunto l.i.

% Demostración de que el SL [ B | v ]  es incompatible
rref([B v])
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0

% Efectivamente la última columna añade pivote.
% O podemos verlo de esta forma más directa:

[ rank(B) rank (B v]) ]  % ans = 2  3  => SL incompatible


% b) Se piden los coeficientes c1 y c2 tales que  c1*b1 + c2*b2 = vproy
% ya que vproy, proyección de v sobre <S>, es el vector de < S > más cercano a v.

% Método 1: Cálculo de vproy a partir de la descomposición ortogonal
% ------------------------------------------------------------------

Bco=null(B','r')     % nos da los vectores b3, b4,
                     % que completan 'ortogonalmente'
                     % al subespacio <b1,b2>.
% [0,  1]
% [1, -2]
% [1,  0]
% [0,  1]

B'*Bco    % comprobación de ortogonalidades
```

```
% [0, 0]
% [0, 0]

% Obtención de los coefs:
rref([B Bco v])    % en la última columna leeremos los coefs
                   %    c1,     c2,     c3,     c4     de la c.l. tales que
                   %    c1*b1 + c2*b2 + c3*b3 + c4*b4 = v
[1, 0, 0, 0, -1]
[0, 1, 0, 0,  3]
[0, 0, 1, 0,  7]
[0, 0, 0, 1,  2]

BR4=[B Bco]  ;                 % obtención más directa de los coefs
sol=linsolve(BR4, v)
% -1
%  3
%  7
%  2

sol(1)  % es el coeficiente c1 pedido en el enunciado
sol(2)  % es el coeficiente c2 pedido en el enunciado
-1
 3

% c1*b1 + c2*b2 = vproy . c1,c2 son los coefs de la c.l. de los vectores de
% S={b1,b2} que producen el vector más cercano a v

% Método 2: obtención de vproy mediante productos escalares
% ----------------------------------------------------------
%  1º)  obtención de base ortogonal de <S>
%  2º)  obtención de vproy mediante la formula de productos escalares
%  3º)  la solución de [b1 b2 | vproy] son los coeficientes c1 y c2

Borton = orth(B) % convierte base B en base ortonormal del mismo subesp.
%   -0.8473   -0.1789
%   -0.1981   -0.4591
%    0.1981    0.4591
%    0.4511   -0.7393

u1 = Borton(:,1) ; u2 = Borton(:,2) ;

vproy = v'*u1 *u1 + v'*u2 *u2  % no hace falta dividir por las normas al cuadrado
                               % porque los ui son unitarios

%   13.0000
%    3.0000
%   -3.0000
%   -7.0000
```

```
% obtención de los coefs
rref([B vproy])        % en la última col. leemos los coefs c1, c2 de la c.l.
sol=linsolve(B,vproy)  % forma más directa: las entradas de sol son c1 y c2

%    1.0000         0   -1.0000
%         0    1.0000    3.0000
%         0         0         0
%         0         0         0

%   -1.0000
%    3.0000


% Método 3:
% ---------
% No vamos a desarrollar éste. Serían una de estas dos alternativas:

% 1a) obtención de A=B*inv(B'*B)*B' con la B que venimos usando
% 1b) obtención de A=BR4 * diag(1,1,0,0)* inv(BR4)
% 2 ) vproy = A * v

% Método 4:
% ---------
% linsolve(matrizcoefs, terminosindep)   produce la solución

% Hemos insistido hasta ahora en que linsolve se use sólo cuando el SL es
% compatible y determinado. Es decir, que tenga solución (compatible) y que ésta sea
% única (columnas de la matriz de coeficientes linealmente independientes, es decir,
% todas pivotales.)

% Sin embargo, en el caso de que las cols de la matriz de coeficientes sean l.i.
% y el SL sea incompatible, linsolve también nos dará una solución,
% porque en vez de resolver A x = v   resuelve A x = vproy.
% vproy sí que es c.l. de las cols de A y por tanto el nuevo SL es compatible.
% Además vproy es el vector más cercano a v para el que existe solución.

% Esta solución, que no es la "solución exacta" ya que el SL original es incompatible.
% se denomina  "solución de mínimos cuadrados".

% Veámoslo:

c=linsolve(B,v)
%   -1.0000
%    3.0000
```