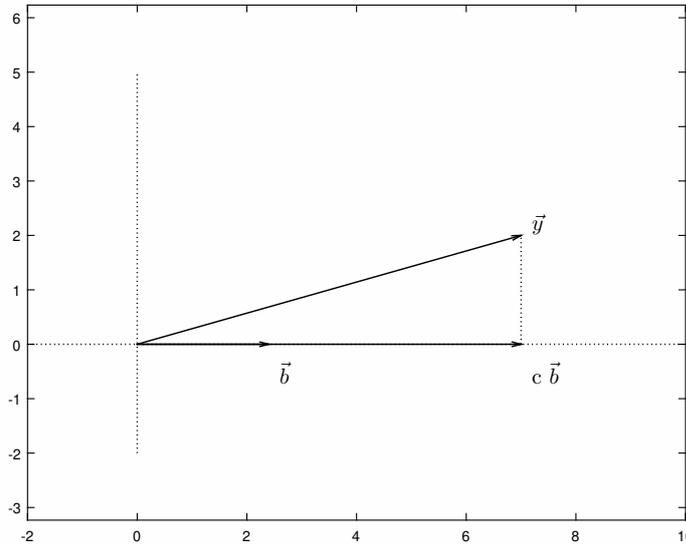


3.2 Proyección y simétrico respecto de una recta en \mathbb{R}^2

Presentamos el esquema en \mathbb{R}^2 de la proyección ortogonal del vector \vec{y} sobre la recta vectorial generada por el vector \vec{b} .



$\hat{y} = \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = c \vec{b}$ es la proyección ortogonal de \vec{y} sobre la recta generada por \vec{b} , denotada como $\langle \vec{b} \rangle$.

$\vec{z} = \vec{y} - c\vec{b}$ es la componente de \vec{y} ortogonal al vector \vec{b} y a la recta $\langle \vec{b} \rangle$.

$$(\vec{y} - c\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{y} \cdot \vec{b} - c \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow c = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

$$\hat{y} = \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

Obsérvese que el vector proyección de \vec{y} sobre $\langle \vec{b} \rangle$ no depende de como esté escalado \vec{b} (con múltiplos de \vec{b} obtendríamos el mismo vector proyección).

La misma fórmula se aplicaría para la proyección ortogonal de un vector sobre una recta vectorial en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 18. Considera en \mathbb{R}^2 los vectores $\vec{y} = (7, 6)$ y $\vec{b} = (2, 1)$. Encuentra la **proyección ortogonal** de \vec{y} sobre $\langle \vec{b} \rangle$ y la distancia de \vec{y} a la recta $\langle \vec{b} \rangle$. Encuentra el **simétrico** de \vec{y} respecto de $\langle \vec{b} \rangle$ y comprueba que la norma del vector simétrico es igual a la norma del vector original.

Sol:

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b}$$

$$\text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = \frac{(7, 6) \cdot (2, 1)}{(2, 1) \cdot (2, 1)} (2, 1) = \frac{20}{5} (2, 1) = 4(2, 1) = (8, 4)$$

- La distancia de \vec{y} a $\langle \vec{b} \rangle$ es igual a la norma de $\vec{z} = \vec{y} - \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y}$

$$\text{dist} = \|\vec{y} - \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y}\|$$

$$\vec{y} - \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} = (7, 6) - (8, 4) = (-1, 2)$$

$$\text{dist} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

- $\vec{y}_{\text{sim}} = \text{proy}_{\langle \vec{b} \rangle} \vec{y} - \vec{z} = (8, 4) - (-1, 2) = (9, 2)$

También se podría haber calculado como:

$$\vec{y}_{\text{sim}} = \vec{y} - 2\vec{z} = (7, 6) - (-2, 4) = (9, 2)$$

La norma de $\vec{y} = (7, 6)$ es $\sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}$ y la norma de \vec{y}_{sim} es $\sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$

3.3 Proyección ortogonal de un vector sobre un plano y simétrico respecto del plano en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 19. Considerados en \mathbb{R}^3 el vector $\vec{v} = (5, -1, 1)$ y el plano Π de ecuación $x - 2y + z = 0$.

a) Obtén la proyección ortogonal de \vec{v} sobre Π .

En primer lugar proyectamos sobre la recta vectorial perpendicular al plano y seguidamente tenemos que la proyección sobre el plano es el vector original menos la proyección sobre la recta perpendicular al plano.

$\vec{n} = (1, -2, 1)$ es el vector ortogonal al plano.

Calcularemos $\text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{v}$, y seguidamente $\text{proy}_{\Pi} \vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{v}$

$$\text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}{1 + 4 + 1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{proy}_{\Pi} \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 4/3 \\ -1 + 8/3 \\ 1 - 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

b) Obtén el simétrico de \vec{v} respecto de Π .

Es sencillo deducir: $\vec{v}_{\text{sim}} = \text{proy}_{\Pi} \vec{v} - \text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{v}$

El simétrico tiene la misma componente en el plano Π que el vector \vec{v} , y en la dirección de la recta $\langle \vec{n} \rangle$ la componente opuesta a la del vector \vec{v} .

$$\vec{v}_{\text{sim}} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 13/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}$$

También podríamos haber utilizado esta expresión para el simétrico:

$$\vec{v}_{\text{sim}} = \vec{v} - 2 \text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{v} = (5, -1, 1) - 2(4/3, -8/3, 4/3) = (5, -1, 1) + (-8/3, 16/3, -8/3) = (7/3, 13/3, -5/3)$$

c) Obtén la distancia de \vec{v} a Π .

La distancia a Π es la norma de $\text{proy}_{\langle \vec{n} \rangle} \vec{v} = 4/3(1, -2, 1)$.

$$\text{dist} = 4/3\sqrt{1+4+1} = 4/3 \sqrt{6}$$

d) Obtén la norma del simétrico de \vec{v} .

La norma de $\vec{v}_{\text{sim}} = 1/3 (7, 13, -5)$ es: $1/3\sqrt{49+169+25} = 1/3 \sqrt{243}$

Es obviamente igual a la norma de \vec{v} , que es $\sqrt{27}$

e) Obtén el coseno del ángulo que forma el vector \vec{v} con su proyección sobre Π .

Razona si el ángulo es agudo u obtuso.

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \text{proy}_{\Pi}\vec{v}}{\|\vec{v}\| \|\text{proy}_{\Pi}\vec{v}\|}$$

Los vectores son $(5, -1, 1)$ y $1/3(11, 5, -1)$

El ángulo que forman estos dos vectores es el mismo que el que forman $(5, -1, 1)$ y $(11, 5, -1)$, por tanto:

$$\cos\theta = \frac{(5, -1, 1) \cdot (11, 5, -1)}{\sqrt{27}\sqrt{121+25+1}} = \frac{55-5-1}{\sqrt{27}\sqrt{147}} = \frac{49}{3\sqrt{3}\sqrt{49 \times 3}} = \frac{49}{3 \times 7 \times 3} = \frac{7}{9}$$

Es agudo porque el producto escalar es positivo.

$$\arccos\frac{7}{9} = 38.94 \text{ grados}$$

También podría obtenerse el ángulo $\alpha < 90$ grados que forma \vec{v} con la recta generada por $\vec{n} = (5, -1, 1)$ y seguidamente tendríamos $\theta = 90 - \alpha$.

Sabemos que \vec{v} y \vec{n} forman directamente ángulo agudo, pues en la página anterior vemos

que $\vec{v} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 8$.

4 Producto vectorial

El producto vectorial, también denominado producto cruz, solo está definido en \mathbb{R}^3 . Es una operación interna entre dos elementos y cerrada, puesto que el resultado también es elemento de \mathbb{R}^3 .

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^3 se define como el vector siguiente:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \quad [6]$$

Existe una forma sencilla de calcular el producto vectorial utilizando el siguiente determinante.¹

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

¹en realidad no es un determinante pues los elementos de la primera fila no son escalares, pero el procedimiento ayuda a recordar cómo calcular el producto cruz

Sin más que aplicar la regla de Sarrus para los determinantes de orden 3, obtenemos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

Podemos observar que las componentes coinciden con las de la definición.

Vemos a continuación una serie de propiedades que cumple el producto vectorial, y de ahí el interés en su definición.

- El vector $\vec{z} = \vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a \vec{u} y a \vec{v} .

Demostramos la ortogonalidad a \vec{u} :

$$(u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 = 0$$

desarrollando la expresión se obtienen 6 sumandos, opuestos dos a dos.

La demostración de la ortogonalidad a \vec{v} es similar.

- El sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ es el del avance de un tornillo dextrógiro que gira del primer al segundo vector por el camino más corto.

Se comprueba fácilmente que efectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} \end{aligned}$$

- El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

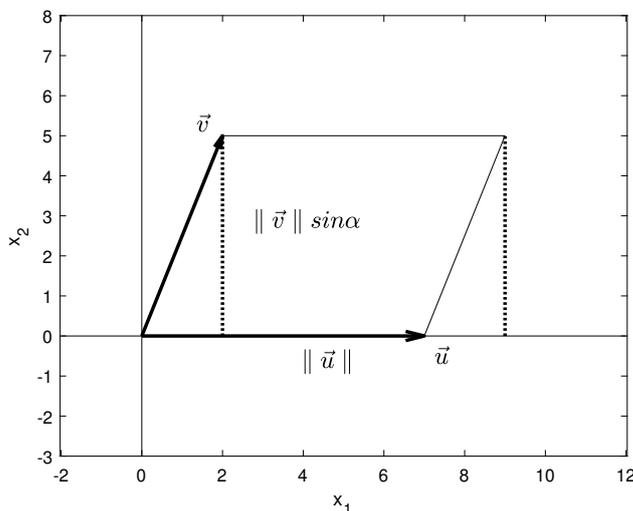
Efectuar la operación en orden inverso equivale a intercambiar dos filas en el determinante, lo que cambia su signo. También es obvio que el camino más corto del giro de \vec{u} a \vec{v} tiene sentido inverso al camino más corto de \vec{v} a \vec{u} .

- Considerados dos vectores \vec{u} y \vec{v} , ninguno de ellos el vector $\vec{0}$, se tiene:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\alpha, \text{ siendo } \alpha \text{ el ángulo que forman } \vec{u} \text{ y } \vec{v}.$$

El requisito de que ningún vector sea $\vec{0}$ es debido a que solo hemos definido ángulo entre vectores distintos de $\vec{0}$.

La norma del producto vectorial tiene una interesante interpretación geométrica pues es el área del paralelogramo definido por los vectores \vec{u} y \vec{v} . Ver el esquema en la siguiente figura.



Obviamente, un medio de la norma es el área del triángulo cuyos vértices son el origen, el extremo de \vec{u} , y el extremo de \vec{v} .

- El producto vectorial de \vec{u} y \vec{v} es el vector $\vec{0}$ si y sólo si los dos vectores son l.d..

5 Ejercicios

EJERCICIO 6.1. Para el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 3)$ y $C = (-3, 7)$, obtén:

- Los ángulos interiores en A , B y C .
- El perímetro.
- El área.
- El centro geométrico, centroide o baricentro.
- El cuarto vértice del paralelogramo de vértices consecutivos CAB

Bisectrices en E_2

EJERCICIO 6.2. MATLAB. Considera en E_2 el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (5, 4)$ y $C = (-8, 5)$.

- Determina un **vector bisector** \vec{v} en A , o vector que divida el ángulo interior en A en dos partes iguales.
- Obtén vectores bisectores \vec{v}_1 entre \vec{AB} y \vec{v} y \vec{v}_3 entre \vec{v} y \vec{AC} .
- Comprueba que los cuatro ángulos formados en A son iguales y escribe su valor.

EJERCICIO 6.3. (HVZ12. Ejemplo I. páginas 325-326)

- Halla la ecuación vectorial paramétrica de la bisectriz interior de las rectas:

$$r_1 : x - y = -1$$

$$r_2 : 2x + y = 4$$

- Halla la ecuación vectorial paramétrica de la bisectriz exterior.

Puntos de proyección ortogonal en rectas y planos afines

EJERCICIO 6.4. (HVZ12. Ejemplo F. página 322). En E_2 obtén el punto P' correspondiente a la proyección de $P = (1, 2)$ sobre la recta r de ecuación $-2x + 3y = -6$.

EJERCICIO 6.5. (HVZ12. Ejemplo G. página 322). En E_3 obtén el punto P' correspondiente a la proyección de $P = (1, 2, 3)$ sobre $x + y - 2z = 3$.

6 Aplicación de los determinantes para el cálculo de áreas y volúmenes

1) El área de un paralelogramo en \mathbb{R}^2 es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

Tomando en \mathbb{R}^2 los vectores \vec{u} y \vec{v} , el área del paralelogramo que definen es:

$$\text{Area} = || \vec{u} \vec{v} || = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right|$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O , por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector \vec{u} .

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector \vec{v} .

Este paralelogramo tiene vértices consecutivos U, O, V .

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B y C , usaríamos:

$$\vec{u} = \vec{AB} \quad \vec{v} = \vec{AC}$$

2) El volumen de un paralelepípedo en \mathbb{R}^3 es igual al valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores que lo determinan.

Tomando en \mathbb{R}^3 los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , el volumen del paralelepípedo que definen es:

$$\text{Volumen} = || \vec{u} \vec{v} \vec{w} || = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \right|$$

Las barras interiores corresponden al determinante y las exteriores al valor absoluto.

Los vectores se toman con su origen en O , por tanto:

$\vec{u} = \vec{OU}$, siendo U el extremo del vector \vec{u} .

$\vec{v} = \vec{OV}$, siendo V el extremo del vector \vec{v} .

$\vec{w} = \vec{OW}$, siendo W el extremo del vector \vec{w} .

El vértice principal es O y U, V y W son los vértices adyacentes.

Si se tomara el origen en A y los vértices adyacentes fueran B, C y D usaríamos:

$$\vec{u} = \vec{AB} \quad \vec{v} = \vec{AC} \quad \vec{w} = \vec{AD}$$

Teniendo en cuenta que $|A| = |A^t|$, también podríamos haber colocado los vectores en filas.

$$\text{Área del paralelogramo} = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right|$$

El volumen del paralelepípedo coincide con el valor absoluto del **producto mixto** de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, definido como

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

EJERCICIO 6.6.

a) Considerado el paralelogramo en \mathbb{R}^2 con vértices consecutivos $A = (-2, -2)$, $B = (0, 3)$, $C = (4, -1)$, calcula su área.

Presentamos su solución en MATLAB

```
A=[-2 -2]'; B=[0 3]'; C=[4 -1]'; % Vértices escritos como matrices columna
abs (det([A-B C-B])) % Valor absoluto del determinante
ans
28
```

La solución es 28 unidades al cuadrado.

b) Considerado el paralelepípedo en \mathbb{R}^3 con un vértice en $A = (1, 1, 1)$ y vértices adyacentes en $B = (3, 3, 6)$, $C = (5, 7, 3)$ y $D = (4, -10, 9)$, calcula su volumen.

```
A=[1 1 1]';
B=[3 3 6]';
C=[5 7 3]';
D=[4 -10 9]';
abs(det([B-A C-A D-A]))
ans
222
```

El volumen tiene 222 unidades al cubo.

EJERCICIO 6.7. (HVZ12. Ejemplo B. página 341). Calcula el área del triángulo que tiene como vértices los puntos de intersección del plano de ecuación $2x + y + 3z = 6$ con los ejes coordenados.

Realiza el boceto, señalando los vértices.

EJERCICIO 6.8. (HVZ12. Ejemplo D. página 346). Halla el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, -2, -1)$.