

## **Tema 5. Autovalores, autovectores y diagonalización**

|           |                                                                                                        |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Valores y vectores propios</b>                                                                      | <b>2</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Obtención de los valores propios. Ecuación característica</b>                                       | <b>3</b>  |
| <b>3</b>  | <b>Subespacio propio. Dimensión. Obtención</b>                                                         | <b>5</b>  |
| <b>4</b>  | <b>El producto y la suma de las raíces del polinomio característico</b>                                | <b>9</b>  |
| <b>5</b>  | <b>Matrices semejantes</b>                                                                             | <b>9</b>  |
| <b>6</b>  | <b>La suma directa de los subespacios propios</b>                                                      | <b>9</b>  |
| <b>7</b>  | <b>Existencia o no de base de <math>\mathbb{R}^n</math> formada por autovectores de <math>f</math></b> | <b>10</b> |
| <b>8</b>  | <b>Diagonalización</b>                                                                                 | <b>10</b> |
| <b>9</b>  | <b>Potencia de una matriz diagonalizable</b>                                                           | <b>13</b> |
| <b>10</b> | <b>Endomorfismos geoméricamente sencillos y diagonalizables</b>                                        | <b>14</b> |
| <b>11</b> | <b>Ejercicios</b>                                                                                      | <b>16</b> |

Consideraremos en este capítulo únicamente endomorfismos

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , siendo  $\mathbb{R}^n$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

## 1 Valores y vectores propios

**Definición 1.** Se dice que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es **autovalor o valor propio** del endomorfismo  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  si existe  $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ .

**Definición 2.** Sea  $f$  un endomorfismo en  $\mathbb{R}^n$  con autovalor  $\lambda$ . Los vectores  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tales que  $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$  se denominan **autovectores o vectores propios** de  $f$  correspondientes al autovalor  $\lambda$ .

$\lambda$  puede ser 0.

Si  $\vec{x} = \vec{0} \quad \forall \lambda$  se cumple que  $f(\vec{0}) = \lambda\vec{0}$ , por eso para aceptar  $\lambda$  como autovalor debe existir  $\vec{x} \neq \vec{0}$  tal que  $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ .

Teniendo en cuenta que a  $f$  le corresponde una matriz estándar asociada  $A$ , nos referiremos indistintamente a los autovalores de  $f$  o de  $A$  y a los autovectores de  $f$  o de  $A$ .

**Ejemplo 1.** Sea la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ , sobre  $\mathbb{R}$ , cuya matriz asociada es  $A = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$ . Determina si los vectores  $\vec{u} = (2, 1)$  y  $\vec{v} = (3, 2)$  son vectores propios de  $A$ . En caso afirmativo da el valor del autovalor asociado.

Sol:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$  es vector propio porque  $A\vec{u} = 1\vec{u}$   
el autovalor asociado es  $\lambda = 1$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$  es vector propio porque  $A\vec{v} = -2\vec{v}$   
el autovalor asociado es  $\lambda = -2$

**Ejemplo 2.** Sea la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ , cuya matriz asociada es  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ . Determina si los vectores  $\vec{u} = (6, -5)$  y  $\vec{v} = (3, -2)$  son vectores propios de  $A$ .

Sol:

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$  es vector propio porque  $A\vec{u} = -4\vec{u}$

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$  no es vector propio porque no existe  $s$  tal que  $A\vec{v} = s\vec{v}$ , o lo que es lo mismo,  $(-9, 11)$  no es múltiplo de  $(3, -2)$ .

**Ejemplo 3.** Consideremos el endomorfismo identidad  $id: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ . Sabemos que su matriz asociada es la identidad.

$$id(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

La aplicación tiene un único valor propio, que es 1. Todos los vectores de  $\mathbb{R}^n$  son autovectores correspondientes a ese autovalor.

**Ejemplo 4.** Consideremos la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  cuya matriz asociada es la matriz  $kI_n$  con  $k \in \mathbb{R}$ .

$$f(\vec{x}) = kI\vec{x} = k\vec{x}$$

La aplicación tiene un único valor propio, que es  $\lambda$ . Todos los vectores de  $\mathbb{R}^n$  son autovectores correspondientes a ese autovalor.

## 2 Obtención de los valores propios. Ecuación característica

**Teorema 1.** Sea el endomorfismo  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  y  $A_n$  su matriz asociada respecto de la base estándar.  $\lambda \in \mathbb{R}$  es valor propio de  $f \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I) < n$ .

**Demostración:**  $\lambda$  valor propio si  $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$  tal que  $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden  $n$ , o lo que es lo mismo, si  $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$  tal que  $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Por tanto  $\lambda$  es valor propio  $\Leftrightarrow$  el SL  $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$  es indeterminado  $\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I) < n \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$   $\square$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación  $|A - \lambda I| = 0$  se denomina **ecuación característica** de  $f$ , o de  $A$ . Desarrollando la ecuación se obtiene que  $|A - \lambda I|$  es un polinomio de grado  $n$  en  $\lambda$ , y por tanto los valores de  $\lambda$  para los que se verifica la ecuación característica son las raíces de este polinomio.

Al polinomio  $|A - \lambda I|$  se le denomina polinomio característico de  $f$  o (de  $A$ ), y se denota como  $p(\lambda)$ .

Todo polinomio de grado  $n \geq 1$  con coeficientes reales tiene exactamente  $n$  raíces reales o complejas (contando multiplicidades). Denotamos la multiplicidad (también denominada multiplicidad algebraica) de la raíz  $\lambda$  como  $\mu(\lambda)$ .

El polinomio  $(1 - \lambda)^5$  tiene 5 raíces, todas iguales a 1. Decimos que tiene raíz 1 con multiplicidad 5.

El polinomio  $\lambda^2 + 1$  tiene dos raíces complejas,  $+i$  y  $-i$ . (Las raíces complejas siempre forman pares conjugados).

El polinomio  $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$  tiene dos raíces complejas,  $i$  y  $-i$  y dos raíces reales 1 y  $-1$ , ambas simples. Se podría escribir cómo  $(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$ .

El polinomio  $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2(\lambda + 6)^3(\lambda - i)(\lambda + i)$  tiene las siguientes raíces distintas:  $-1$  de multiplicidad 1, 1 de multiplicidad 2,  $-6$  de multiplicidad 3,  $i$  de multiplicidad 1, y  $-i$  de multiplicidad 1.

El polinomio característico de  $A$ ,  $p(\lambda)$ , de grado  $n$ , tendrá  $n$  raíces. **Las raíces reales del polinomio son los autovalores** del endomorfismo  $f$ , también designados como autovalores de  $A$ . Suponiendo  $s$  raíces distintas, incluyendo reales y complejas:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\mu(\lambda_1)} (\lambda_2 - \lambda)^{\mu(\lambda_2)} \dots (\lambda_s - \lambda)^{\mu(\lambda_s)}$$

$$\mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2) + \dots + \mu(\lambda_s) = n$$

Si  $r$  es el número de raíces reales y distintas,  $r \leq s$ , entonces tenemos  $r$  autovalores distintos, y:

$$\mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2) + \dots + \mu(\lambda_r) = n \Leftrightarrow \text{todas las raíces son reales}$$

$$\mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2) + \dots + \mu(\lambda_r) < n \Leftrightarrow \text{existen raíces complejas}$$

Si  $p(\lambda)$  tiene las  $n$  raíces reales y distintas (por tanto todas de multiplicidad algebraica 1), entonces el endomorfismo tiene  $n$  autovalores distintos, y la ec. característica es:

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

**Resumen:** Los valores propios son las raíces reales del polinomio  $|A - \lambda I|$ , o lo que es lo mismo, las soluciones reales de la ecuación característica  $|A - \lambda I| = 0$ .

**Nota:**  $p(\lambda)$  correspondiente a la matriz  $A$  se denota con frecuencia como  $p_A(\lambda)$ , para mantener la información de la matriz de la que procede.

**Ejemplo 5.** ¿Es 5 un valor propio de  $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ?

Sol:

5 es autovalor de  $A \Leftrightarrow 5$  es solución de la ecuación  $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |A - 5I| = 0$

$$|A - 5I| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20, \text{ por tanto } 5 \text{ no es autovalor.}$$

**Ejemplo 6.** a) Averigua si  $\lambda = 4$  es autovalor de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) Determina el valor de  $c$  para que  $\lambda = 4$  sea autovalor de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & c \end{bmatrix}$

Sol:

$$a) |A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ no es autovalor.}$$

$$b) |A - 4I| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & c - 4 \end{vmatrix} = -3c + 12 - 8 = -3c + 4 = 0 \Rightarrow c = 4/3.$$

**Ejemplo 7.** Encuentra la ecuación característica de  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por ser  $A$  triangular,  $A - \lambda I$  también es triangular, y la ec. característica:

$$(5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

Los autovalores son entonces los elementos de la diagonal principal de  $A$ .

**Ejemplo 8.** El polinomio característico de una matriz  $6 \times 6$  es  $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$ . Encuentra los valores propios y su multiplicidad algebraica.

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda - 12)\lambda^4$$

Tenemos la raíz  $\lambda = 0$  con multiplicidad 4 y las raíces de  $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$ . Estas últimas son  $\lambda = -2$  y  $\lambda = 6$ , ambas simples.

### 3 Subespacio propio. Dimensión. Obtención

**Teorema 2.** Sea el endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\lambda$  autovalor de  $f$ . El conjunto de todos los vectores propios correspondientes a  $\lambda$ , denotado  $V_\lambda$ , es subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** En efecto, considerando la matriz estándar  $A$  asociada a  $f$ , tenemos:

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}(A - \lambda I). \quad \square$$

El subespacio  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}\}$  se denomina **subespacio propio correspondiente al autovalor  $\lambda_i$** . Se denota como  $V_{\lambda_i}$ .

$$V_{\lambda_i} = \text{Nul}(A - \lambda_i I)$$

Observaciones:

- 1)  $\dim V_\lambda \geq 1$  ya que  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  tiene soluciones de  $\vec{x}$  no nulas.
- 2) Quedó demostrado que  $V_\lambda$  es subespacio, por ser el conjunto de soluciones de un SLH. Presentamos no obstante la demostración de que  $V_\lambda$  cumple los dos axiomas de los subespacios.

- El producto por un escalar es cerrado, pues  $\vec{x} \in V_\lambda \Rightarrow \alpha \vec{x} \in V_\lambda$   
 $f(\alpha \vec{x}) = \lambda \alpha \vec{x}$ , entonces  $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) = \alpha \lambda \vec{x} = \lambda \alpha \vec{x}$ , por tanto  $\alpha \vec{x} \in V_\lambda$
- La suma es cerrada:  $\vec{x}, \vec{x}' \in V_\lambda \Rightarrow \vec{x} + \vec{x}' \in V_\lambda$

$$f(\vec{x} + \vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}') = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{x}' = \lambda(\vec{x} + \vec{x}')$$

Como consecuencia de que la suma sea cerrada y el producto por un escalar también, se tiene que toda combinación lineal de autovectores de un valor propio  $\lambda$  es también autovector de ese autovalor.

Se podría haber presentado la demostración usando  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  para expresar  $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ .

### Dimensión del subespacio propio

$V_\lambda$  es el conjunto de soluciones del SLH  $[A - \lambda I \mid \vec{0}]$ , por tanto:

$\dim V_\lambda = n^\circ$  de parámetros libres  $= n^\circ$  de columnas no pivotaes de la matriz  $[A - \lambda I]$

$$\boxed{\dim V_\lambda = n - \text{rango}(A - \lambda I)}$$

Por ser  $\lambda$  autovalor  $\text{rg}(A - \lambda I) < n$  por tanto:

$$\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq n}$$

$\dim V_\lambda = n$  cuando  $\text{rg}(A - \lambda I) = 0$ , es decir si  $A - \lambda I$  es la matriz cero, o lo que es lo mismo,  $A = \lambda I$ . En este caso  $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , y por tanto  $V_\lambda = \mathbb{R}^n$

**Teorema 3.**  $\dim V_\lambda$  es menor o igual que la multiplicidad algebraica del autovalor  $\lambda$ .

$$\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq \mu(\lambda) \leq n}$$

Se define **multiplicidad geométrica** de un autovalor  $\lambda$  como la dimensión de  $V_\lambda$ .

### Obtención de los subespacios propios

En primer lugar se calculan los valores propios, es decir, las raíces reales de la ecuación  $|A - \lambda I| = 0$ .

A continuación:

- Se determina  $V_{\lambda_i} = \text{Nul}(A - \lambda_i I)$  para cada valor propio  $\lambda_i$ , que es lo mismo que determinar la solución de cada sistema homogéneo  $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$  (un sistema para cada autovalor). La resolución del sistema nos permitirá obtener una base y la dimensión del subespacio propio.

**Ejemplo 9.** Considerada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ , se pide. a) Los autovalores de  $A$ . b) Una base de cada subespacio propio. c) ¿En qué direcciones de  $\vec{v}$  se cumplirá que la imagen  $A\vec{v}$  tiene la misma dirección de  $\vec{v}$ ? ¿En cuáles no?

• Autovalores

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado  $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$  obteniendo que las raíces son 4 y -3.

Las dos son reales y por tanto autovalores.

$A$  tiene los valores propios  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = -3$ , obviamente ambos simples.

• Subespacio propio para  $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 4x \\ 3x - 2y = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \quad [1] \Rightarrow x = 2y$$

$\vec{b}_1 = (2, 1)$  es una base de  $V_4$ .  $V_4$  tiene dimensión 1.

Comprobación:  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Procedimiento más directo:

Los autovectores son las soluciones de  $A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x}$ , es decir, del sistema homogéneo  $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ .

La matriz de coeficientes  $A - \lambda I$  es en este caso  $A - 4I$ .

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

que es precisamente la del SL [1] de arriba.

Los autovectores se obtienen resolviendo el SL  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 3 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$   
 $\Rightarrow \vec{b}_1 = (2, 1)$  es autovector y base de  $V_4$ .

• De la misma forma se puede calcular un vector propio asociado a  $\lambda_2 = -3$ .

Los autovectores se obtienen resolviendo en este caso el SL  $\begin{bmatrix} 6 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$ , por tanto  $\vec{b}_2 = (-1, 3)$  es base del subespacio propio  $V_{-3}$ , también de dimensión 1.

• Comprobaciones: Efectuando el producto  $A[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$  deberíamos obtener  $[4\vec{b}_1 \ -3\vec{b}_2]$ , teniendo en cuenta que los autovalores asociados a  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  son 4 y -3 respectivamente.

• Los vectores que se encuentren en las direcciones de  $(2, 1)$  o  $(-1, 3)$  tendrán sus imágenes en esas mismas direcciones. El resto de vectores tendrán imágenes con dirección distinta a la de partida.

**Ejemplo 10.** Obtén los autovalores y base de cada subespacio propio para la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

*Solución:*

- Autovalores

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{Fila3} = \text{Fila3} - \text{Fila2}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 + \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Fil1} = \text{Fil1} - \text{Fil2}$$

$$= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 + \lambda & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hemos sacado fuera  $(1 - \lambda)^2$  y el determinante que queda está ya muy simplificado y lo podemos resolver mediante Sarrus.

$$= (1 - \lambda)^2((-2 - \lambda) + 1 + 1) = (1 - \lambda)^2(-\lambda)$$

|                                                            |
|------------------------------------------------------------|
| Autovalores: $\lambda_1 = 0$ simple $\lambda_2 = 1$ doble. |
|------------------------------------------------------------|

- Base de cada subespacio propio.  $V_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda_i)$

– Base de  $V_0$

$$[A - 0I | \vec{0}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad x = z, y = z, z = z$$

|                               |                                             |
|-------------------------------|---------------------------------------------|
| Base de $V_0 = \{(1, 1, 1)\}$ | Nótese que $V_0$ es siempre $\text{Nul}A$ . |
|-------------------------------|---------------------------------------------|

– Base de  $V_1$

$$[A - 1I | \vec{0}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad x = 3y - z, y =$$

$$y, z = z$$

|                                           |
|-------------------------------------------|
| Base de $V_1 = \{(3, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ |
|-------------------------------------------|

- Comprobaciones: Denotando como  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  a los autovectores obtenidos, en su orden, efectuando  $A[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  deberíamos obtener  $[\vec{0} \vec{b} \vec{c}]$ , teniendo en cuenta que los autovalores asociados son 0, 1 y 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots$$

## 4 El producto y la suma de las raíces del polinomio característico

**Teorema 4.** *El determinante de la matriz  $A_n$  es igual al producto de las raíces del polinomio característico de  $A$ .*

*Si todas las raíces son reales, el determinante de  $A$  es igual al producto de sus autovalores, es decir  $\det A = \lambda_1^{\mu(\lambda_1)} \times \lambda_2^{\mu(\lambda_2)} \times \dots \times \lambda_r^{\mu(\lambda_r)}$ , siendo  $\lambda_i$  los  $r$  autovalores distintos y  $\mu(\lambda_i)$  sus respectivas multiplicidades.*

**Teorema 5.** *La traza de la matriz  $A_n$  es igual a la suma de las raíces de su polinomio característico.*

*Si todas las raíces son reales, la traza de  $A$  es igual a la suma de sus autovalores, es decir,  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^r \mu(\lambda_i) \lambda_i$ , siendo  $\lambda_i$  los  $r$  autovalores distintos y  $\mu(\lambda_i)$  sus respectivas multiplicidades.*

Ambos resultados son muy útiles para el cálculo y la comprobación de autovalores.

## 5 Matrices semejantes

**Teorema 6.** *Si dos matrices  $F_n$  y  $G_n$  son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores y con la misma multiplicidad.*

**Demostración:**  $F$  y  $G$  semejantes  $\Leftrightarrow \exists P / F = PGP^{-1}$

$P$  es la matriz de cambio de coordenadas desde la base a la que está referida  $G$  a la base a la que está referida  $F$ .

$$F - \lambda I = PFP^{-1} - \lambda I = PFP^{-1} - P\lambda IP^{-1} = P(F - \lambda I)P^{-1}$$

$$|F - \lambda I| = |P||G - \lambda I||P^{-1}| = |G - \lambda I|, \text{ por tanto } |F - \lambda I| = |G - \lambda I|$$

Si una de las matrices es  $A$ , referida a la base estándar, recordamos que la factorización queda como  $A = BGB^{-1}$ , donde  $B$  es la matriz de paso de coordenadas relativas a la base  $B$ , a la que está referida  $G$ , a coordenadas estándar.

□

## 6 La suma directa de los subespacios propios

**Teorema 7.** *Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  son autovalores distintos de  $A$ , con autovectores correspondientes  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$ , entonces el conjunto  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r$  es linealmente independiente.*

De este resultado se deduce sin mucha dificultad que la unión de las bases de los subespacios propios es conjunto linealmente independiente y por tanto base del subespacio suma.

$$B_1 \cup B_2 \dots \cup B_r = \text{Base de } (V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}), \text{ siendo } B_i \text{ la base de } V_{\lambda_i}.$$

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = \dim (V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r})$$

Por tanto la suma de subespacios propios es suma directa:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} \subseteq \mathbb{R}^n$$

La intersección de los subespacios propios es el vector  $\vec{0}$ .

## 7 Existencia o no de base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de $f$

**Teorema 8.** *Existe base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ , o lo que es lo mismo,  $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow p(\lambda)$  tiene  $n$  raíces reales contando multiplicidades (o lo que es lo mismo, no hay raíces complejas) y  $\dim V_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i) \forall \lambda_i$*

**Demostración:** Existe base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores si y sólo si  $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = n$

Sabemos que  $\dim V_{\lambda_i} \leq \mu(\lambda_i) \quad i = 1, \dots, r$ , por tanto:

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} \leq \mu(\lambda_1) + \mu(\lambda_2) + \dots + \mu(\lambda_r) \leq n$$

Para obtener la dimensión máxima,  $n$ , se debe cumplir  $\dim V_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, r$  (para que el primer “menor o igual” sea un “igual”) y que todas las raíces sean reales (para que el segundo “menor o igual” sea un “igual”).  $\square$

**Teorema 9.** *Si  $A_n$  tiene  $n$  autovalores distintos, entonces existe base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ .*

En efecto, si el polinomio característico de grado  $n$  tiene  $n$  autovalores distintos, significa que las multiplicidades son todas igual a uno. Por tanto los  $n$  subespacios  $V_{\lambda_i}$  tienen dimensión 1, y tendremos  $n$  autovectores linealmente independientes.

Nótese que este teorema nos da una condición suficiente para que exista base de autovectores, pero no es una condición necesaria.

## 8 Diagonalización

Consideramos un endomorfismo  $f$  con matriz estándar  $A$ ,  $r$  autovalores distintos, y para el que se puede obtener una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores.

Sea  $B$  una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores.

$$B = \{ \vec{b}_1^1, \dots, \vec{b}_{\mu(\lambda_1)}^1, \vec{b}_1^2, \dots, \vec{b}_{\mu(\lambda_2)}^2, \dots, \vec{b}_1^r, \dots, \vec{b}_{\mu(\lambda_r)}^r \}$$

Cada superíndice  $i$  corresponde al autovalor  $\lambda_i$   $\mu(\lambda_i)$  es la multiplicidad de ese autovalor

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{b}_1^1) = \lambda_1 \vec{b}_1^1 \\ \vdots \\ f(\vec{b}_{\mu(\lambda_1)}^1) = \lambda_1 \vec{b}_{\mu(\lambda_1)}^1 \\ \vdots \\ f(\vec{b}_1^r) = \lambda_r \vec{b}_1^r \\ \vdots \\ f(\vec{b}_{\mu(\lambda_r)}^r) = \lambda_r \vec{b}_{\mu(\lambda_r)}^r \end{array} \right. \Rightarrow F = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix} \\ \leftarrow \mu(\lambda_1) \rightarrow \qquad \qquad \qquad \leftarrow \mu(\lambda_r) \rightarrow \end{array}$$

Observamos que la matriz  $F$ , que es la relativa a la base  $B$ , es diagonal, y que el elemento de la diagonal principal de la columna  $i$  es el autovalor correspondiente al autovector de la posición  $i$  en la base.

Denotamos a la matriz  $F$  como  $D$ , por ser diagonal.

Recordamos la expresión de construcción de  $F$ :  $F = [ [f(\vec{b}_1)]_B \dots [f(\vec{b}_{\mu(\lambda_r)})]_B ]$ .

Recíprocamente, si supiéramos de  $f$  que respecto de una base  $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$  tiene asociada una matriz diagonal  $E$ , entonces concluiríamos que esa base estaría formada por autovectores y que los elementos de la diagonal de  $E$  serían los correspondientes autovalores, ya que  $f(\vec{c}_i) = e_{ii}\vec{c}_i$ .

**Definición 3.** Una matriz  $A$  (o el endomorfismo  $f$  del que  $A$  es matriz estándar) se dice **diagonalizable** si tiene una matriz semejante diagonal, es decir, si existen base  $B$  y matriz  $D$  diagonal tales que  $A = BDB^{-1}$ .

**Teorema de la diagonalización.**  $A_n$  es diagonalizable si y sólo si tiene  $n$  autovectores linealmente independientes, es decir, si y sólo si existe una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ . En la factorización  $A = BDB^{-1}$  con  $P$  invertible y  $D$  diagonal, las columnas de  $B$  son  $n$  autovectores de  $A$  linealmente independientes, y los elementos de  $D$  son los autovalores correspondientes y en el mismo orden.

## RESUMEN sobre diagonalización

Dada  $A_n$  existen  $B$  invertible y  $D$  diagonal tales que  $A = BDB^{-1}$  si y sólo si  $A$  tiene  $n$  valores propios reales (incluidas multiplicidades) y  $\dim V_{\lambda_i}$  es igual a la multiplicidad de  $\lambda_i$ .

Los elementos de  $D$  son los autovalores. Las columnas de  $B$  son una base de autovectores, en el mismo orden que sus correspondientes autovalores en  $D$ .

$A$  es la matriz estándar de  $f$ .  $D$  es la matriz de  $f$  para trabajar con coordenadas relativas a la base de autovectores dada en  $B$ .

La base de autovectores se construye uniendo las bases de los subespacios propios, siendo la dimensión de cada uno de éstos igual a la multiplicidad del autovalor.

Las dos condiciones de diagonalización:

1.  $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\mu(\lambda_1)}(\lambda_2 - \lambda)^{\mu(\lambda_2)} \dots (\lambda_r - \lambda)^{\mu(\lambda_r)}$ , con  $\lambda_i$  raíces reales y distintas  
(esto significa que  $\sum_{i=1}^r \mu(\lambda_i) = n$ )
2.  $\dim V_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i)$

Esquema para las matrices asociadas  $A$  y  $D$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 f: & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n & \\
 & \vec{x} & \xrightarrow{\quad} & \vec{y} & \\
 B^{-1} & \downarrow & A & \uparrow & B \\
 & [\vec{x}]_B & \xrightarrow{\quad} & [\vec{y}]_B & \\
 & & D & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 B: \text{ base de autovectores} \\
 \text{elementos de } D: \text{ autovalores en el mismo orden}
 \end{array}$$

$A = B D B^{-1}$   $B$  es la matriz de paso de coordenadas en  $B$  a coordenadas estándar.

$D = B^{-1} A B$   $B^{-1}$  es la matriz de paso de coordenadas estándar a coordenadas en  $B$ .

Comprobaciones en los ejercicios:

$AB = BD$  es una comprobación más sencilla de efectuar que  $BDB^{-1} = A$ .

**Ejemplo 11.** *Estudia si son diagonalizables las siguientes matrices. En caso afirmativo obtén  $B$  invertible y  $D$  diagonal tales que  $X = BDB^{-1}$ , siendo  $X$  la matriz dada, y presenta la comprobación.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Las dos son triangulares.

Los autovalores de las matrices triangulares son los elementos de la diagonal principal.

Tienen los mismos autovalores: 2, 4, 2.

A:

==

Autovectores para lambda=2

-----

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Resolviendo el SL tenemos que  $\dim V(2) = 1$ .

Base de  $V(2) = \{ (0,0,1) \}$

Al ser la dimensión menor que la multiplicidad, la matriz no es diagonalizable. Se dice que el avalor es 'defectivo'.

T:

==

Autovectores para lambda=2

-----

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

Resolviendo el SL tenemos que  $\dim V(2) = 2$ .

Base de  $V(2) = \{ (2,1,0), (0,0,1) \}$

Al ser dimensión = multiplicidad tenemos que la matriz es diagonalizable.

$V(4)$  tiene dimensión 1, por ser 4 autovalor simple.

Autovectores para lambda=4

-----

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

Base de  $V(4) = \{ (0,1,3) \}$

Por tanto

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 0 & 0 \\ \text{B:} & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & 0 & 0 \\ \text{D:} & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

La comprobación consiste en probar que  $T*B$  es igual a  $B*D$ . Es lo mismo que comprobar  $T=B*D*B^{-1}$  y evita tener que calcular una inversa.

## 9 Potencia de una matriz diagonalizable

Si  $A$  es diagonalizable, con  $A = BDB^{-1}$ , entonces  $A^k = BD^k B^{-1}$ .

$$\text{En efecto} \quad A^k = \overbrace{BDB^{-1} BDB^{-1} \dots BDB^{-1}}^{k \text{ veces}} = BD^k B^{-1}$$

$D^k$  es matriz diagonal de elementos  $d_{ii}^k$

**Ejemplo 12.** Factoriza la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  en la forma  $A = BDB^{-1}$ , con  $D$  diagonal, y calcula  $A^5$ .

• Autovalores:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) + 2 + 2 - (3 - \lambda) - 2(2 - \lambda) - 2(2 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0 \end{aligned}$$

Calculamos las raíces aplicando el método de Ruffini:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} & 1 & -7 & 11 & -5 \\ 1) & & 1 & -6 & 5 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 \\ 1) & & 1 & -5 & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \\ 5) & & 5 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array} \end{array}$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$$

Los autovalores son  $\lambda = 1$  (multiplicidad 2) y  $\lambda = 5$  (multiplicidad 1)

• Base de autovectores:

Calculamos  $V_1$  obteniendo  $V_1 = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$ , con  $\vec{b}_1 = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, -1, 0)$ , confirmando que su dimensión es 2, y que por tanto  $A$  es diagonalizable.

Calculamos  $V_5$  obteniendo  $V_5 = \langle \vec{b}_3 \rangle$ , con  $\vec{b}_3 = (1, 2, 1)$ .

Tomamos  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  como base de  $\mathbb{R}^3$  formada por autovectores de  $A$ . Las matrices  $B$  y  $D$  para este orden son:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{con } A = BDB^{-1}$$

(Compruébese que  $AB = BD$ )

•  $A^5$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ A^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3125 \\ 0 & -1 & 6250 \\ -1 & 0 & 3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 782 & 781 & 781 \\ 1562 & 1563 & 1562 \\ 781 & 781 & 782 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 10 Endomorfismos geoméricamente sencillos y diagonalizables

Las siguientes transformaciones geométricas en  $\mathbb{R}^2$  son endomorfismos diagonalizables:

- Transformación escalamiento uniforme de razón  $k$ .

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$

- Transformación escalamiento no uniforme de factores  $k_1$  y  $k_2$  distintos.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ , señalando  $\vec{a}$  la dirección del escalamiento de factor  $k_1$  y  $\vec{b}$  la dirección del escalamiento de factor  $k_2$ .

- Simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ , siendo  $\vec{a}$  un vector de la recta y  $\vec{b}$  un vector ortogonal a  $\vec{a}$ .

- Proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ , siendo  $\vec{a}$  un vector de la recta y  $\vec{b}$  un vector ortogonal a  $\vec{a}$ .

- Simetría respecto del origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^2$ . Es la misma transformación que el giro de 180 grados alrededor del origen.

**Las siguientes transformaciones geométricas en  $\mathbb{R}^3$  son endomorfismos diagonalizables:**

- Transformación escalamiento uniforme de razón  $k$ .

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^3$

- Transformación escalamiento no uniforme de factores  $k_1, k_2, k_3$  (al menos uno distinto del resto).

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^3$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , correspondiendo cada dirección al escalamiento asociado  $k_1, k_2$  o  $k_3$ .

- Simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^3$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , siendo  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  una base del plano y  $\vec{c}$  un vector ortogonal al plano.

- Proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^3$  de la forma  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , siendo  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  una base del plano y  $\vec{c}$  un vector ortogonal al plano.

- Simetría respecto del origen.

Esta transformación tiene la matriz asociada diagonal  $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  en todas las bases de  $\mathbb{R}^3$ .

## 11 Ejercicios

1. Obtén los autovalores y las bases de los subespacios propios de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

*HVZ12, ejemplo E, pg. 214*

2. Demuestra que una matriz de la forma  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$  no es diagonalizable.

3. Para  $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ , señala la afirmación correcta:

- a)  $\lambda = 6$  es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado  $V_6$  es 1.
- b)  $\lambda = 6$  es autovalor y la dimensión del subespacio propio asociado  $V_6$  es 2.
- c)  $\lambda = 6$  no es autovalor

Determina todos los autovalores y multiplicidades de  $A$ .

4. Para la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$  usa una factorización  $A = BDB^{-1}$ , con  $D$  diagonal, para obtener  $A^6$ .

5. Determina si la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$  es diagonalizable para algún valor de  $c$ , y cuál o cuáles son estos valores en caso afirmativo.

6. Considerado el endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que:

$\vec{a} = (1, 2)$  es autovector con autovalor asociado 3

$\vec{b} = (-1, 1)$  es autovector con autovalor asociado 4.

- a) Obtén la matriz estándar  $A$  de  $f$ .
- b) Obtén  $f(1, 7)$ . Si no conocieras  $A$  podrías resolver este apartado tomando como punto de partida la expresión de  $(1, 7)$  como combinación lineal de los autovectores dados. En efecto si  $(1, 7) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ , entonces  $f(1, 7) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b})$ , por ser  $f$  aplicación lineal. Por tanto  $f(1, 7) = 3\alpha\vec{a} + 4\beta\vec{b}$ .

7. Obtén los autovalores y las bases de los subespacios propios de  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Determina si existe una base de  $\mathbb{R}^3$  formada por autovectores de esta aplicación lineal. En caso afirmativo escribe la base y la matriz de la aplicación referida a esa base.

*HVZ12, ejercicios 1 y 2, matriz h, pgs. 220-221*

8. Determina si las siguientes matrices tienen semejante diagonal  $D$ , y en caso afirmativo determina la matriz  $B$  tal que  $BDB^{-1} = A$

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

*HVZ12, ejercicio 5 a) y b) pg. 221*

9. Determina para que valores de  $a$  y  $b$  es diagonalizable la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

|                                                                                                                                                   |                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Considerada en $\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal $f$ con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ , se pide: |                    |
| Los autovalores                                                                                                                                   |                    |
| Una base de cada subespacio propio indicando el autovalor asociado                                                                                | $\lambda =$ Base = |
|                                                                                                                                                   | $\lambda =$ Base = |
| Matrices $B$ invertible y $D$ diagonal tales que $A = BDB^{-1}$                                                                                   | $B =$ $D =$        |
| Interpretación geométrica cualitativa y cuantitativa                                                                                              |                    |

11. Obtén los subespacios propios, si existen, de la transformación lineal de matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$