

4.4 Ejercicios

4.1. Dada la aplicación lineal con matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

- a) Obtén una base de $\text{Im}f$.
- b) Obtén una base de $\text{Ker}f$.
- c) Razona si la aplicación lineal es o no sobreyectiva².
- c) Razona si la aplicación lineal es o no inyectiva³.
- e) Obtén la imagen de $(2, 7, 0)$.
- f) Determina el/los antecedentes de $(6, 9, a)$ en función de a .

4.2. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por:

$$(1, 0, 0) \longmapsto (1, 1, 1) \qquad (0, 1, 0) \longmapsto (2, 0, -3) \qquad (0, 0, 1) \longmapsto (0, 0, 4)$$

- a) Halla la matriz estándar asociada a f .
- b) Halla la imagen de $\vec{a} = (2, -3, 5)$
- c) Halla el vector cuya imagen es $\vec{b} = (2, -5, 4)$

4.3. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 1, 3)$ y $f(\vec{e}_3) = (0, c + 3, 2)$. Determina una base de $\text{Ker}f$ en función del parámetro c .

4.4 Dada la aplicación lineal f con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, determina

- a) Una base y la dimensión de $\text{Im}f$. *Es decir, base y dimensión de $\text{Col}A$*
- b) Una base y la dimensión de $\text{Ker}f$. *Es decir, base y dimensión de $\text{Nul}A$*
- c) Calcula una base del subespacio $f(V)$, siendo $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 = x_4, x_3 = 0\}$. Concepto de **imagen de subespacio**.

² Recuerda que sobreyectiva significa que $\text{Im}f$ y el espacio final son el mismo

³ Recuerda que inyectiva significa que cada elemento de $\text{Im}f$ tiene un único antecedente

4.5 Obtén la matriz estándar de las siguientes transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:

* simetría respecto de la recta $y = \frac{1}{3}x$

* proyección ortogonal sobre la recta $y = \frac{1}{3}x$

Considerada la figura con los vértices P , Q , R y T dados en la tabla, obtén sus imágenes para las transformaciones anteriores y rellena la tabla con los resultados.

(x, y)	simétrico (x', y')	proyectado (x', y')
$P = (6, 6)$	$P' = (\quad , \quad)$	$P' = (\quad , \quad)$
$Q = (7, 7)$		
$R = (8, 6)$		
$T = (7, 5)$		

4.6 Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal f correspondiente a la proyección ortogonal sobre el plano $x + y + z = 0$.

a) Determina una base B respecto de la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible. Escribe también dicha matriz.

b) Obtén la matriz asociada respecto de la base canónica.

4.7 Resuelve el ejercicio anterior tomando f correspondiente a la simetría ortogonal respecto del plano $x + y + z = 0$.

4.8 La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ produce un **estiramiento** en la dirección x . Representa la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y esboza a su alrededor los puntos (x, y) que resultan de multiplicar por A . ¿Cuál es la forma de la figura?.

G. Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Edición 4. Wellesley Cambridge Press. 2009. Pg. 149. Ejercicio 3.

4.9 Dada la aplicación lineal f en $\mathbb{R}^3$ con matriz estándar asociada $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtén la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1, -1, 0), (-2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

S.J. Leon. Linear Algebra with Applications. Edición 9. Pearson 2015. Pg. 212. Ejemplo 2.

4.10 a) En $\mathbb{R}^3$, obtén la matriz estándar A correspondiente al giro de 90 grados en sentido positivo respecto del eje dirigido según el vector $(0, 0, 1)$. b) Obtén la matriz estándar de la siguiente composición de transformaciones: en primer lugar el giro anterior, y a continuación dilatación de factor 4 según el eje Z .

4.11 a) En $\mathbb{R}^2$, interpreta geoméricamente, cualitativa y cuantitativamente, la transformación lineal con la matriz estándar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.12 a) Demuestra que tanto la matriz estándar A de la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto de un plano como la de la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto de una recta son matrices **involutivas**, es decir $AA = I$. b) Demuestra que en el caso de la proyección, en $\mathbb{R}^3$ sobre un plano y en $\mathbb{R}^2$ sobre una recta, las matrices estándar son **idempotentes**, es decir $AA = A$.