Aplicación lineal $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{y} = A\vec{x} \end{aligned}$

4.1 Cambio de base de un endomorfismo

- **Trabajando en base estándar**

$$\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) \quad \overset{\text{A.L.}}{\Rightarrow} \quad \vec{y} = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2 f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) + \dots + x_n f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{[\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \dots \;\; f(\vec{e}_n) \,]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

$$\boxed{A = [\, f(\vec{e}_1) \;\; f(\vec{e}_2) \;\; \dots \;\; f(\vec{e}_n) \,] \qquad A\,\vec{x} = \vec{y}}$$

$\vec{x}$ está en coordenadas estándar
$\vec{y}$ está en coordenadas estándar
A es la matriz estándar de f

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n$$

- **Trabajando en base B**

  $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n$

  $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_n\vec{b}_n) \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = c_1 f(\vec{b}_1) + c_2 f(\vec{b}_2) + \ldots + c_n f(\vec{b}_n)$

  Premultiplicando los dos miembros por B^{-1}, cambiamos $\vec{y}$ y los $f(\vec{b}_i)$ de coordenadas estándar a coordenadas relativas a la base B.

  $\Rightarrow [\vec{y}]_B = c_1 \, [f(\vec{b}_1)]_B + c_2 \, [f(\vec{b}_2)]_B + \ldots + c_n \, [f(\vec{b}_n)]_B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix}}_{[\vec{y}]_B} = \underbrace{[\, [f(\vec{b}_1)]_B \; [f(\vec{b}_2)]_B \; \ldots \; [f(\vec{b}_n)]_B \,]}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{[\vec{x}]_B}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} F = [\; [f(\vec{b}_1)]_B \; [f(\vec{b}_2)]_B \; \ldots \; [f(\vec{b}_n)]_B \;] \\ F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B \end{array}}$$

  Tomamos del vector de partida sus coordenadas relativas a la base B: $[\vec{x}]_B$
  La transformación produce las coordenadas de la imagen relativas a la base B: $[\vec{y}]_B$
  F es la matriz de f relativa a la base B, es decir, a coordenadas del original y transformado, relativas a base B.

$$\vec{x} = c_1\,\vec{b}_1 + c_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n\,\vec{b}_n$$
$$\vec{y} = c'_1\,\vec{b}_1 + c'_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c'_n\,\vec{b}_n$$

- **Relaciones entre A y F, dada base B**
  - $A = BFB^{-1}$, siendo $B = [\vec{b}_1 \; \vec{b}_2 \; \ldots \; \vec{b}_n]$
  - A y F tienen el mismo determinante. Deducción obvia desde el resultado anterior.
  - A y F tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).
  - A y F tienen el mismo rango.

  Si dos matrices cuadradas están asociadas a la misma aplicación lineal, pero cada una usa una base distinta, se dice que son matrices **semejantes** entre sí. Se dice de la traza, el determinante y rango, que son "invariantes" entre matrices semejantes.

- **Justificación de $A = B\,F\,B^{-1}$:**

  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\} \qquad B = [\ \vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n\ ] \qquad \vec{x} = B\,[\vec{x}]_B \qquad \vec{y} = B\,[\vec{y}]_B$

  La ec. $F\,[\vec{x}]_B = [\vec{y}]_B$ la podemos reescribir como: $F\,B^{-1}\,\vec{x} = B^{-1}\,\vec{y}$

  Premultiplicando por la izda. por B: $B\,F\,B^{-1}\,\vec{x} = \vec{y}$

  Por otra parte, $A\vec{x} = \vec{y}$, por lo que igualando las dos últimas ecuaciones: $\boxed{A = B\,F\,B^{-1}}$

Justificación gráfica para interpretar $A = B\,F\,B^{-1}$ como composición de aplicaciones lineales:

Veamos en un esquema conjunto las matrices asociadas a f y a los cambios de base.

$$
\begin{tikzcd}
f: \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^n \\
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\
[\vec{x}]_B \arrow[u, "B"] \arrow[r, dashed] & [\vec{y}]_B \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f: \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^m \\
\vec{x} \arrow[r, dashed, "A"'] & \vec{y} \\
[\vec{x}]_B \arrow[u, "B"] \arrow[r, dashed] \arrow[r, bend left=80, "F"'] & [\vec{y}]_B \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}
$$

$$A = B\ F\ B^{-1} \qquad\qquad F = B^{-1}\ A\ B$$

En el esquema de la izquierda podemos ver A como la composición de tres aplicaciones lineales, y en el de la derecha F como composición de tres aplicaciones lineales.
Fijándonos en la izquierda vemos que A se puede entender como la composición de tres pasos:
1) pasar de $\vec{x}$ a $[\vec{x}]_B$, con B^{-1}.
2) aplicar la función en base B, con la matriz F
3) pasar el resultado a base estándar, con B.
$A = B\,F\,B^{-1}$

- **Obtención operativa de** $F = [\ [f(\vec{b}_1)]_B\ [f(\vec{b}_2)]_B\ \dots\ [f(\vec{b}_n)]_B\ ]$
  Tenemos la expresión de F del título de este apartado, o $F = B^{-1}AB$, sin más que despejar F en $A = BFB^{-1}$.

  Por tanto F se puede obtener operativamente así, utilizando la eliminación de Gauss-Jordan:

  $[\ B \mid AB\ ] \sim \dots \sim [\ I \mid F\ ]$

  De esta forma nos ahorramos el cálculo de una inversa.

4.2 Imagen y núcleo

- **Im** f El subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las imágenes.

  $\text{Im}f = \{f(\vec{x}) \ / \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_2 f(\vec{e}_1) \ / \ x_i \in \mathbb{R}\}$

  Por comodidad trabajamos con la base canónica.

  Cada vector de Imf es una combinación lineal de los $f(\vec{e}_i)$. Los $\vec{x}$ de salida dan los coeficientes que se usan en la imagen. Ya que Imf es el conjunto de las imágenes de <u>todos los $\vec{x}$</u>, tendremos en Imf <u>todas las combinaciones lineales posibles</u> de los $f(\vec{e}_i)$.

  $\text{Im}f = <\ f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\ > = \text{Col}A.$

  La base de $\text{Im}f$ se obtiene eliminando uno a uno los vectores del conjunto $\{\ f(\vec{e}_1),\ f(\vec{e}_2), \dots,\ f(\vec{e}_n)\}$ que sean c.l. del resto. O lo que es lo mismo, <u>quedándonos</u> con los vectores correspondientes a las columnas pivotales de A.

  dim Imf = número de columnas de A l.i. = rg$A$.

- **Núcleo de una aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ Se denota $\text{Ker}f$ y es el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^n$:

  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$

  Teniendo en cuenta que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, Ker $f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\} = \text{Nul}A$

- **Dimensiones de Imf y Ker$f$**
  Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, con matriz asociada A. Teniendo en cuenta que Imf=Col$A$ y que Ker$f$=Nul$A$, se tiene la relación de dimensiones siguiente:

$$\boxed{\textbf{dim } \mathbb{R}^n = \textbf{dim Ker}f + \textbf{dim Im}f}$$

$$\boxed{n = \textbf{dim Nul}A + \textbf{dim Col}A = \textbf{dim Nul}A + \textbf{rg } A}$$

  Recordamos que el resultado muestra simplemente que el número de columnas de A es igual al nº de no pivotales, que es igual al nº de parámetros libres y dimensión del núcleo, más el nº de pivotales, que es igual al rg$A$ y dimensión de la imagen.

De la relación de dimensiones anterior se deduce que A invertible o de rango n si y solo si Im$f=\mathbb{R}^n$ si y sólo si Ker$f=\{\vec{0}\}$

Una aplicación entre dos conjuntos se dice sobreyectiva si el conjunto final y la imagen de la aplicación coinciden.

Una aplicación se dice inyectiva si todo par de elementos distintos, en el conjunto inicial, tiene imágenes distintas.

Una aplicación se dice biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva a la vez.

En el caso de los endomormismos, o son inyectivos y sobreyectivos a la vez (rg$A=n$) o no son ni inyectivos ni sobreyectivos (caso contrario).

La justificación es sencilla. Si rg$(A)=n$, entonces $A\vec{x}=\vec{y}$ es compatible para todo $\vec{y}$, por lo que todo $\mathbb{R}^n$ tiene antecedente y por tanto es imagen de un vector. Así tenemos la sobreyectividad. Por otra parte, el sistema es compatible determinado, por lo que dada una imagen tendrá un único antecedente. No pueden existir dos antecendentes distintos de la misma imagen y por tanto tenemos la inyectividad. En caso de rg$(A)< n$ fallan las dos cosas. Existirán vectores sin antecente (casos de sistema incompatible) y vectores con más de un antecedente (los casos en los que el sistema es indeterminado, como por ejemplo en el caso de los antecedentes del vector $\vec{0}$).

4.3 Endomorfismos con interpretación geométrica sencilla

En $\mathbb{R}^2$. Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^2$ giro de ángulo α alrededor del origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ respecto de todas las bases ortonormales[9] de $\mathbb{R}^2$ con orientación positiva (determinante positivo de la matriz que tiene por columnas los vectores base).

  Por tanto también respecto de la base estándar, ya que es base ortonormal y de orientación positiva.

  $0<\alpha<\pi$ o $-\pi<\alpha<0$

  α positivo o sentido positivo corresponde al giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj.
  α negativo corresponde al giro en el sentido de las agujas del reloj.

  Giro de ángulo $0=$ Matriz I. Esta misma matriz para cualquier base.

  Giro de ángulo $\pi=$ Simetría respecto del origen. Matriz $-I$. Esta misma matriz para cualquier base.

[9] Los vectores son unitarios y ortogonales entre sí, es decir: $\vec{a}\cdot\vec{a}=1$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=1$ y $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

- En $\mathbb{R}^2$ simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

$$\begin{cases} f(\vec{a}) = 1\vec{a} + 0\vec{b} \\ f(\vec{b}) = 0\vec{a} - 1\vec{b} \end{cases} \qquad F = [\,[\,f(\vec{a})\,]_B\;[\,f(\vec{b})\,]_B\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- En $\mathbb{R}^2$ proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ un vector de la recta y $\vec{b}$ un vector ortogonal a $\vec{a}$.

$$\begin{cases} f(\vec{a}) = 1\vec{a} + 0\vec{b} \\ f(\vec{b}) = 0\vec{a} + 0\vec{b} \end{cases} \qquad F = [\,[\,f(\vec{a})\,]_B\;[\,f(\vec{b})\,]_B\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- En $\mathbb{R}^2$ contracción de factor k o dilatación de factor k

  Esta transformación tiene la matriz asociada $k\,I$ respecto de cualquier base. También se denomina escalamiento uniforme.

  Contracción: $0 < k < 1$
  Dilatación: $k > 1$

  Para $k = 1$ la matriz asociada es I.

- En $\mathbb{R}^2$ escalamiento anísotropo o no uniforme en dos direcciones l.i.

  Escalamientos de factores k_1 y k_2, con $k_i > 0$ y $k_1 \neq k_2$.
  Esta transformación tiene la matriz asociada $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^2$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores base de las direcciones de escalamiento k_1 y k_2 respectivamente.

  Si el escalamiento es uniforme, de factor k, la matriz asociada es $k\,I$ respecto de cualquier base.

• Para pasar de la matriz relativa a la base natural $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de la transformación, a la matriz estándar, si no son la misma, se debe aplicar:

$$\boxed{A = B\, F\, B^{-1}},$$

siendo F la matriz del endomorfismo referida a la base natural B y $B = [\vec{a}\ \vec{b}]$.

Deben comprobarse los tres invariantes: traza, rango y determinante. En $\mathbb{R}^2$ son cálculos sencillos.

En $\mathbb{R}^3$. Matrices asociadas respecto de la base natural de la transformación

- En $\mathbb{R}^3$ giro de ángulo α alrededor del eje dirigido según el vector $\vec{n}$

  Esta transformación tiene la matriz asociada $G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en todas las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}\}$.

  Cambiando $\vec{n}$ por un vector múltiplo positivo del mismo, la matriz asociada sería la misma.

  Para α positivo se produce el giro de acuerdo con el criterio de la mano derecha, con el pulgar apuntando según $\vec{n}$, y los demás dedos en el sentido del giro.

- En $\mathbb{R}^3$ simetría ortogonal respecto de un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano (o lo que es lo mismo, ortogonal a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$).

- En $\mathbb{R}^3$ proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen

  Esta transformación tiene la matriz asociada $Pr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en todas las bases de $\mathbb{R}^3$ de la forma $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, siendo $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ una base del plano y $\vec{c}$ un vector ortogonal al plano.

- Otras dos transformaciones lineales sencillas son el escalamiento uniforme y el escalamiento no uniforme, en ambos casos sobre tres direcciones linealmente independientes.

  En el segundo caso $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada relativa a la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, que da las direcciones de los tres escalamientos, en el mismo orden.

  Si el escalamiento es uniforme, de factor k, la matriz asociada es $k\, I$ independientemente de la base utilizada.

De nuevo, la transformación de la matriz F relativa a la base natural a la matriz estándar A se realizará mediante la fórmula, $A = B\, F\, B^{-1}$. Una vez obtenida pueden comprobarse los invariantes. Obviamente la comprobación más sencilla es la de la traza.