

4.5 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2

Una matriz A cuadrada de orden 2 se dice ortogonal si sus columnas son base ortonormal de \mathbb{R}^2 , es decir, base de \mathbb{R}^2 con vectores ortogonales entre sí y unitarios (producto escalar cero y norma uno). Las aplicaciones lineales en \mathbb{R}^2 cuya matriz estándar es una matriz ortogonal se denominan **transformaciones ortogonales**. En \mathbb{R}^2 una aplicación es ortogonal si y solo si es de alguno de estos dos tipos:

- Giro alrededor del origen
- Simetría ortogonal respecto de una recta que pasa por el origen.

Se reconoce si la transformación ortogonal es del primer tipo o del segundo, porque en el primer caso el determinante de A es positivo (la transformación se dice 'directa') y en el segundo es negativo (la transformación se dice 'inversa').

Las transformaciones ortogonales son las únicas transformaciones lineales en \mathbb{R}^2 que producen los llamados "movimientos rígidos", que conservan longitudes, ángulos y formas de los objetos.

La tabla presenta la clasificación de las transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2 con matriz estándar A , junto con algunas de sus características. La columna de la derecha se explicará en el Tema 5 de 'Autovalores, autovectores y diagonalización'.

	Clasificación	Tipo / Determinante / Traza	Autovalores
I	Rotación respecto al origen	Directa / 1 / $2 \cos \alpha$	no reales
Ia	Rotación de ángulo 0 = Identidad	Directa / 1 / 2	1, 1
Ib	Rotación de ángulo π = Simetría respecto al origen	Directa / 1 / -2	-1, -1
II	Simetría respecto de recta $S = \langle \vec{a} \rangle$	Inversa / -1 / 0	1, -1

La composición de transformaciones ortogonales es transformación ortogonal, por lo que la transformación resultante corresponderá a uno de los cuatro casos anteriores.

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes, por tanto:

- La composición de dos rotaciones es una rotación (sumándose los ángulos).
- La composición de dos simetrías es una rotación (si la simetría es la misma la composición es la identidad, que corresponde a la rotación de ángulo 0).
- La composición de simetría y rotación es una simetría.